Konstruktionsteknik

Kursbok

Utkast · 2026-11-20 · A4

Innehåll

1 Förkunskaper 5
Inledning 5
1.1 Dimensioneringsprinciper och beteckningar 5
Trä 6
1.2 Trä: hållfasthet och styvhet 6
1.3 Trä: krypning och deformationsfaktorn kdef 9
Stål 10
1.4 Stål: material och tvärsnittskapacitet 10
Betong 13
1.5 Betong och armering: material 13
1.6 Betong: krypning och krympning 16
1.7 Böjsprucket armerat tvärsnitt i brottgränstillstånd (ULS) 18
1.8 Betong: tvärkraftskapacitet 23
2 Bruksgränstillstånd 25
Betong – tvärsnittsanalys 25
2.1 Förutsättningar 25
2.2 Korttidsrespons - ren böjning 34
2.3 Korttidsrespons - Inverkan av normalkraft 42
Betong – sprickbildning 45
2.4 Sprickbildningsprocessen 45
2.5 Beräkning av sprickbredd 50
Betong – långtidseffekter 53
2.6 Inverkan av tidsberoende effekter 53
2.7 Tvärsnittsanalys vid långtidsrespons 56
Nedböjning 60
2.8 Nedböjning: gemensam grund 60
2.9 Nedböjning av armerade betongbalkar 68
2.10 Nedböjning av stålbalkar 74
2.11 Nedböjning av träbalkar 75
3 Förband och förankring 77
Inledning 77
3.1 Förband och förankring – allmänt 77
Stål – skruvförband 81
3.2 Stål: skruvar och skruvförband 81
3.3 Skruvförband: brottyper och bärförmåga 85
3.4 Skruvförband: kraftfördelning i skruvgrupper 91
Stål – svetsförband 96
3.5 Stål: svetsar och svetsförband 96
3.6 Svetsförband: spänningar och bärförmåga i kälsvetsar 100
Trä 109
3.7 Träförband: typer och verkningssätt 109
3.8 Skjuvbelastade förbindare: Johansens modell 113
3.9 Dimensionering av förband med stavformiga förbindare 123
Betong – förankring 130
3.10 Dragkraftsbehov i längsarmeringen 130
3.11 Vidhäftning och förankring av armering 135
3.12 Avkortning, förankring vid stöd och skarvning av armering 143
4 Knäckning 151
Allmänt 151
4.1 Pelare och knäckning 151

4.2 Imperfektioner och andra ordningens moment 158
4.3 Interaktion mellan normalkraft och moment 163
Trä 167
4.4 Trä: tryck vinkelrätt mot fibrerna (stämpeltryck) 168
4.5 Trä: pelare och tryck längs fibrerna 174
Stål 184
4.6 Stålpelare: knäckkurvan 184
4.7 Stålpelare: snittkraftsmetoden 191
Betong 198
4.8 Betongpelare: tvärsnittets respons och första ordningens moment 198
4.9 Betongpelare: andra ordningens moment och dimensionering 208
Sammanfattning 215
4.10 Sammanfattning 215
5 Tilläggsmaterial 217
5.1 Tyngdpunkt 217
5.2 Yttröghetsmoment 220
5.3 Elementarfall för balkar 225

1 Förkunskaper

Inledning

1.1 Dimensioneringsprinciper och beteckningar

Det här kapitlet samlar det som behövs från tidigare kurser i bärande konstruktioner för att kunna följa resten av boken: materialens hållfasthets- och styvhetsvärden, hur dimensionerande värden tas fram, långtidseffekter och tvärsnittsmodellen för armerad betong i brottgränstillstånd. Härledningarna hålls korta; tyngdpunkten ligger på vilka värden och samband som används och varför.

Boken följer den nya generationen eurokoder: SS-EN 1992-1-1:2023 (betong, här kallad EC2), SS-EN 1993-1-1:2022 (stål, EC3) och SS-EN 1995-1-1:2025 (trä, EC5). Tabellvärden återges med hänvisning till respektive standard, avsnitt och tabell.

1.1.1 Gränstillstånd

En bärande konstruktion ska klara två typer av krav:

- **Brottgränstillstånd (ULS, *ultimate limit state*)**: konstruktionen får inte gå till brott, förlora stabiliteten eller deformeras så att bärförmågan går förlorad. Kontrollen görs med dimensionerande laster och dimensionerande hållfastheter.
- **Bruksgränstillstånd (SLS, *serviceability limit state*)**: konstruktionen ska fungera under normal användning, till exempel utan för stora nedböjningar, sprickor eller svängningar. Kontrollen görs med lägre laster (bruksgränslastkombinationer) och normalt med partialkoefficienten 1,0 på materialet.

Kapitel 2 i boken behandlar bruksgränstillståndet. I det här kapitlet används brottgränstillståndet främst för det armerade betongtvärsnittet (avsnitt 1.7) och för tvärkraft (avsnitt 1.8).

1.1.2 Karakteristiska och dimensionerande värden

En materialegenskap har ett **karakteristiskt värde** X_k, i regel den 5-procentsfraktil som bara var tjugonde provkropp underskrider. Det **dimensionerande värdet** fås genom att dela med en partialkoefficient γ_M och, för vissa material, multiplicera med en omräkningsfaktor η som beskriver exempelvis lastvaraktighet, fuktförhållanden eller storlekseffekter:

$$X_d = \eta \cdot \frac{X_k}{\gamma_M} \tag{1.1}$$

Omräkningsfaktorn heter olika saker i de olika materialen: k_{mod} och k_h för trä (avsnitt 1.2), η_{cc} och k_{tc} för betong (avsnitt 1.5). För stål är $\eta = 1$.

Styvhetsvärden (elasticitetsmoduler) används i regel som medelvärden, eftersom en konstruktions deformation beror på materialets genomsnittliga egenskaper och inte på det svagaste stället.

1.1.3 Partialkoefficienter

Tabell 1.1 sammanfattar de partialkoefficienter för material som används i boken, för varaktiga och tillfälliga dimensioneringssituationer i brottgränstillstånd.

Tabell 1.1 Partialkoefficienter för material i brottgränstillstånd (varaktiga och tillfälliga dimensioneringssituationer)

Material	Egenskap	γ_M	Referens
Betong	tryck- och draghållfasthet	1,50	EC2 tabell 4.3
Betong	tvärkraft utan tvärkraftsarmering	1,40 (γ_V)	EC2 tabell 4.3

Material	Egenskap	γ_M	Referens
Armering	sträckgräns	1,15	EC2 tabell 4.3
Stål	tvärsnitt	1,00 (γ_{M0})	EC3 8.1
Stål	instabilitet	1,00 (γ_{M1})	EC3 8.1
Stål	dragbrott i nettotvärsnitt	1,25 (γ_{M2})	EC3 8.1
Konstruktionsvirke	hållfasthet	1,30	EC5 tabell 4.3
Limträ, KL-trä	hållfasthet	1,25	EC5 tabell 4.3

I bruksgränstillståndet är $\gamma_M = 1{,}0$ för alla material.

> **Notera:** Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar ännu till den äldre generationen eurokoder och anger några svenska värden som skiljer sig från tabellen ovan. För stål gäller dragbrott $\gamma_{M2} = 0{,}9 f_u / f_y$, dock högst 1,1, och för betongens elasticitetsmodul i brottgränstillstånd $\gamma_{CE} = 1{,}2$. EKS saknar ett eget γ_V. Boken använder de värden som eurokoderna rekommenderar och påpekar skillnaden där den har betydelse.

På lastsidan multipliceras lasteffekten dessutom med en faktor γ_d som beror på säkerhetsklassen: 0,83, 0,91 och 1,00 för säkerhetsklass 1, 2 och 3 (EKS 3 kap. 2 §).

1.1.4 Teckenkonvention

Samma teckenkonvention används i hela boken:

- Normalkraft N: positiv vid **drag**. I spänningsdiagram ritas drag till vänster.
- Moment M: positivt när det ger **drag i underkant**.
- Koordinaten z: mäts från tvärsnittets tyngdpunkt (för armerad betong det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt), positiv **nedåt**.
- Excentriciteten e: normalkraftens avstånd från samma tyngdpunkt, positiv **nedåt**.
- Spänningar och töjningar: positiva vid **drag**.

Med dessa konventioner blir normalspänningen i ett homogent tvärsnitt

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} + \frac{M + N \cdot e}{I} \cdot z \tag{1.2}$$

Det är Naviers formel. För armerade betongtvärsnitt används den med det ekvivalenta tvärsnittets area och tröghetsmoment, ekv. (2.16) härledningen finns i avsnitt 2.1.4.

> **Obs:** Äldre kurslitteratur räknar ofta tryckkraft som positiv, särskilt för pelare. Byt tecken på N när formler hämtas därifrån.

Trä

1.2 Trä: hållfasthet och styvhet

Trä är ett naturmaterial med fibrer som löper i stammens längdriktning. Hållfasthet och styvhet är därför helt olika parallellt med och vinkelrätt mot fibrerna, och de påverkas av fuktkvot och av hur länge lasten verkar. Dessa effekter beskrivs med klimatklasser, lastvaraktighetsklasser och faktorn k_{mod}.

1.2.1 Hållfasthetsklasser

Konstruktionsvirke sorteras i hållfasthetsklasser C14–C40 enligt EN 338, och limträ i klasser enligt EN 14080: GL..c (kombinerat, med starkare lameller i ytterzonerna) och GL..h (homogent). Siffran anger den karakteristiska böjhållfastheten i MPa. EC5 innehåller inga egna klasstabeller; den listar i bilaga M vilka egenskaper som behövs och hänvisar till produktstandarderna. Tabell 1.2 och tabell 1.3 återger värden enligt EN 338 och EN 14080 för några vanliga klasser.

Tabell 1.2 Konstruktionsvirke enligt EN 338: hållfasthet och moduler i MPa, densitet i kg/m³

Egenskap	C14	C18	C24	C30	C35	C40
Böjning $f_{m,k}$	14	18	24	30	35	40
Drag parallellt $f_{t,0,k}$	7,2	10	14,5	19	22,5	26
Drag vinkelrätt $f_{t,90,k}$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
Tryck parallellt $f_{c,0,k}$	16	18	21	24	25	27
Tryck vinkelrätt $f_{c,90,k}$	2,0	2,2	2,5	2,7	2,7	2,8
Skjuvning $f_{v,k}$	3,0	3,4	4,0	4,0	4,0	4,0
$E_{0,mean}$	7 000	9 000	11 000	12 000	13 000	14 000
$E_{0,k}$	4 700	6 000	7 400	8 000	8 700	9 400
G_{mean}	440	560	690	750	810	880
ρ_k	290	320	350	380	390	400
ρ_{mean}	350	380	420	460	470	480

Tabell 1.3 Limträ enligt EN 14080: hållfasthet och moduler i MPa, densitet i kg/m³

Egenskap	GL24c	GL28c	GL30c	GL24h	GL28h	GL30h
$f_{m,k}$	24	28	30	24	28	30
$f_{t,0,k}$	17	19,5	19,5	19,2	22,3	24
$f_{t,90,k}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$f_{c,0,k}$	21,5	24	24,5	24	28	30
$f_{c,90,k}$	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
$f_{v,k}$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
$E_{0,mean}$	11 000	12 500	13 000	11 500	12 600	13 600
$E_{0,k}$	9 100	10 400	10 800	9 600	10 500	11 300
G_{mean}	650	650	650	650	650	650
ρ_k	365	390	390	385	425	430

Den nya EC5 kallar 5-procentsfraktilen av elasticitetsmodulen $E_{0,k}$ (tidigare $E_{0,05}$). Motsvarande värde för skjuvmodulen tabelleras inte utan beräknas som

$$G_{0,05} = 0{,}67 \cdot G_{mean} \quad \text{(barrträ)} \tag{1.3}$$

enligt EC5 5.4.1, formel (5.4).

1.2.2 Dimensionerande hållfasthet

Den dimensionerande hållfastheten fås ur det karakteristiska värdet enligt EC5 4.5.1, formel (4.6):

$$f_d = k_{mod} \cdot \eta \cdot \frac{f_k}{\gamma_M} \tag{1.4}$$

där k_{mod} beror på klimatklass och lastvaraktighet, η samlar eventuella övriga faktorer (till exempel storleksfaktorn k_h) och $\gamma_M = 1{,}30$ för konstruktionsvirke och $1{,}25$ för limträ och KL-trä (EC5 tabell 4.3).

Klimatklasser

Klimatklassen (på engelska *service class*) beskriver det fuktklimat som konstruktionen befinner sig i. EC5 4.3.1.4 och tabell 4.2 definierar fyra klasser:

Tabell 1.4 Klimatklasser enligt EC5 tabell 4.2

Klimatklass	Omgivande klimat	Fuktkvot i virket, ungefär
1	relativ fuktighet över 65 % bara några veckor per år; uppvärmda, isolerade utrymmen	≤ 12 %
2	relativ fuktighet över 85 % bara några veckor per år; skyddat men ouppvärmt	≤ 20 %
3	relativ fuktighet över 95 % bara några veckor per år; utomhus, med möjlighet till uttorkning	≤ 24 %
4	vattenmättat, till exempel i mark eller vatten	mättat

Klimatklass 4 är ny i EC5:2025.

Lastvaraktighetsklasser

Hur länge en last verkar påverkar träets hållfasthet: en last som verkar i många år ger lägre hållfasthet än en kortvarig. EC5 4.3.1.3, tabell 4.1, definierar fem klasser:

Tabell 1.5 Lastvaraktighetsklasser enligt EC5 tabell 4.1

Klass	Ackumulerad varaktighet	Exempel enligt svensk praxis
Permanent	mer än 10 år	egentyngd
Långtidslast	6 månader – 10 år	nyttig last i lagerlokaler
Medellång	1 vecka – 6 månader	nyttig last i övrigt, snölast
Korttidslast	mindre än 1 vecka	vindlast som samverkande last
Momentan	i regel mindre än en minut	vind som huvudlast, olyckslast

> **Notera:** Exemplen följer den indelning som hittills använts i Sverige. EC5:2025 tillåter att snö och vind räknas som korttidslast; tills ett nytt nationellt val finns behåller boken den svenska indelningen ovan.

Faktorn kmod

k_{mod} hämtas ur EC5 5.2.1, tabell 5.4; värdena för konstruktionsvirke och limträ finns i tabell 1.6.

Tabell 1.6 Faktorn kmod för konstruktionsvirke och limträ enligt EC5 tabell 5.4

Klimatklass	Permanent	Lång	Medellång	Kort	Momentan
1 och 2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
3	0,55	0,60	0,70	0,80	1,00
4 (endast konstruktionsvirke)	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90

När en lastkombination innehåller laster med olika varaktighet används det k_{mod} som hör till den **kortvarigaste** lasten i kombinationen (EC5 5.2.1(2)).

> **Notera:** I klimatklass 1 får tryckhållfastheten parallellt med fibrerna, $f_{c,0,k}$, multipliceras med 1,2 för konstruktionsvirke och limträ (EC5 5.2.1(3)). Detta är nytt jämfört med den tidigare utgåvan.

Storleksfaktorn kh

Små tvärsnitt har statistiskt färre svaga partier och får därför räkna med något högre hållfasthet. Storleksfaktorn ges av EC5 5.3, formel (5.3) och tabell 5.6:

$$k_{h,min} \le k_h = \left(\frac{a_{ref}}{a}\right)^{s} \le k_{h,max} \tag{1.5}$$

där a är tvärsnittets höjd h vid böjning kring styva axeln (bredden b kring veka axeln). För konstruktionsvirke gäller $a_{ref} = 150$ mm, $s = 0{,}2$, $k_{h,min} = 1{,}0$ och $k_{h,max} = 1{,}3$, både för böjning och drag. För limträ

i böjning gäller $a_{ref} = 600$ mm och $s = 0{,}04$ utan gränser, vilket betyder att balkar högre än 600 mm nu får en något **lägre** böjhållfasthet; limträ i drag parallellt med fibrerna har ingen storleksfaktor.

Exempel 1.1 Dimensionerande böjhållfasthet

En regel av konstruktionsvirke C24 med tvärsnittet 45×145 mm böjs kring sin styva axel. Lasten är av medellång varaktighet och regeln sitter i klimatklass 2. Bestäm den dimensionerande böjhållfastheten.

Storleksfaktor. Höjden $h = 145$ mm är mindre än referenshöjden 150 mm, så hållfastheten får ökas något enligt ekv. (1.5):

$$k_h = \left(\frac{150}{145}\right)^{0{,}2} = 1{,}007$$

Värdet ligger mellan gränserna 1,0 och 1,3.

Modifikationsfaktor. Klimatklass 2 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6).

Dimensionerande hållfasthet. Med $f_{m,k} = 24$ MPa (tabell 1.2) och $\gamma_M = 1{,}30$ ger ekv. (1.4)

$$f_{m,d} = k_{mod} \cdot k_h \cdot \frac{f_{m,k}}{\gamma_M} = 0{,}80 \cdot 1{,}007 \cdot \frac{24}{1{,}30} = 14{,}9 \text{ MPa}$$

1.2.3 Styvhet i beräkningar

Vilket elasticitetsmodulvärde som används beror på vad som beräknas (EC5 4.4):

- **Deformationer i bruksgränstillståndet:** medelvärdena $E_{0,mean}$ och G_{mean}. Hur krypning påverkar deformationerna behandlas i avsnitt 1.3.
- **Snittkrafter i brottgränstillståndet** i statiskt obestämda system: också medelvärdena $E_{0,mean}$ och G_{mean}. Förbandens förskjutningsmodul ska däremot reduceras, $K_{ULS} = K_{SLS}/1{,}5$ (EC5 4.4.2).
- **Stabilitet (knäckning, vippning)** för konstruktioner med få samverkande delar: de karakteristiska värdena $E_{0,k}$ och $G_{0,05}$.

1.3 Trä: krypning och deformationsfaktorn kdef

Trä kryper: under en konstant last fortsätter deformationen att öka med tiden, och ökningen är större ju fuktigare klimatet är och ju mer fuktkvoten varierar. Krypningen påverkar inte hållfastheten (den hanteras med k_{mod}, se avsnitt 1.2), men den kan dubbla eller tredubbla en balks nedböjning.

1.3.1 Deformationsfaktorn kdef

Krypningen beskrivs med deformationsfaktorn k_{def}, som anger hur stor kryptillskottet blir i förhållande till den momentana deformationen. Värden enligt EC5 5.2.2, tabell 5.5, finns i tabell 1.7.

Tabell 1.7 Deformationsfaktorn kdef enligt EC5 tabell 5.5

Material	Klimatklass 1	Klimatklass 2	Klimatklass 3
Konstruktionsvirke, limträ, LVL	0,60	0,80	2,00
KL-trä	0,80	1,00	–

För konstruktionsvirke i klimatklass 4 används samma värde som i klimatklass 3. Om virket monteras nära fibermättnad och torkar under last ökas k_{def} med 1,0.

1.3.2 Slutlig deformation

För en last som verkar under hela konstruktionens livslängd blir den slutliga deformationen

$$w_{fin} = w_{inst} \cdot (1 + k_{def}) \tag{1.6}$$

där w_{inst} är den momentana (elastiska) deformationen beräknad med $E_{0,mean}$. Bara den del av en variabel last som verkar länge ger krypning, så för variabla laster multipliceras k_{def} med den kvasipermanenta faktorn ψ_2.

Krypningen kan också uttryckas som en reducerad, "slutlig" elasticitetsmodul, $E_{mean,fin} = E_{mean}/(1 + k_{def})$ (EC5 4.4.1, formel (4.1)). Den används främst när material med olika krypegenskaper samverkar, till exempel trä och betong i ett samverkansbjälklag.

Hur nedböjningen av en träbalk delas upp i momentan del, kryptillskott och variabel del (w_1, w_2, w_3 enligt EC5 9.2), och hur den kontrolleras, behandlas i avsnitt 2.11.

Stål

1.4 Stål: material och tvärsnittskapacitet

Konstruktionsstål är ett homogent, isotropt och mycket segt material. Det beter sig linjärt elastiskt upp till sträckgränsen f_y, flyter sedan vid i stort sett konstant spänning och hårdnar till sist upp mot brottgränsen f_u innan det går till brott. I tryck är beteendet detsamma, men slanka tryckta delar kan förlora stabiliteten (bucka eller knäcka) innan sträckgränsen nås. Det hanteras med tvärsnittsklasser och, för hela bärverksdelar, i kapitlet om knäckning.

1.4.1 Hållfasthetsvärden

Nominella värden på sträckgräns och brottgräns för varmvalsat konstruktionsstål finns i EC3 5.2.1, tabell 5.1, och återges i tabell 1.8.

Tabell 1.8 Nominell sträckgräns och brottgräns (MPa) för varmvalsat konstruktionsstål enligt EC3 tabell 5.1

Stålsort	f_y, $t \le 40$ mm	f_u, $t \le 40$ mm	f_y, $40 < t \le 80$ mm	f_u, $40 < t \le 80$ mm
S235	235	360	215	360
S275	275	390	245	370
S355	355	490	325	470
S420	420	510	390	490
S460	460	540	410	510
S500	500	580	450	580
S550	550	600	500	600
S600	600	650	550	650
S620	620	700	560	660
S650	650	700	–	–
S690	690	770	630	710
S700	700	750	–	–

Ett streck betyder att stålsorten inte tabelleras för den tjockleken. Jämfört med den tidigare utgåvan har några värden ändrats, till exempel brottgränsen för S355 (nu 490 MPa) och för S275 (nu 390 MPa).

Materialkonstanterna enligt EC3 5.2.5 finns i tabell 1.9.

Tabell 1.9 Materialkonstanter för konstruktionsstål enligt EC3 5.2.5

Konstant	Värde
Elasticitetsmodul E	210 000 MPa
Tvärkontraktionstal ν	0,3
Skjuvmodul $G = E/(2(1+\nu))$	≈ 81 000 MPa
Längdutvidgningskoefficient α_T	$12 \cdot 10^{-6}$ per °C
Densitet	7 850 kg/m³

I många formler ingår parametern

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} \tag{1.7}$$

med f_y i MPa. För S235 är $\varepsilon = 1{,}0$ och för S355 är $\varepsilon = 0{,}81$.

Partialkoefficienterna är $\gamma_{M0} = 1{,}00$ för tvärsnitt, $\gamma_{M1} = 1{,}00$ för instabilitet och $\gamma_{M2} = 1{,}25$ för dragbrott i nettotvärsnitt; se tabellen i avsnitt 1.1 och kommentaren om EKS där.

1.4.2 Tvärsnittsklasser

Ett ståltvärsnitt består av tunna plåtdelar (liv och flänsar). Om en tryckt del är för slank buktar den lokalt ut innan tvärsnittet nått sin fulla kapacitet. Tvärsnitt delas därför in i fyra klasser efter hur slanka de tryckta delarna är, uttryckt som förhållandet c/t mellan delens fria bredd och tjocklek:

- **Klass 1:** tvärsnittet kan bilda en plastisk led med stor rotationsförmåga.
- **Klass 2:** tvärsnittet når full plastisk momentkapacitet men har begränsad rotationsförmåga.
- **Klass 3:** spänningen i den mest tryckta fibern når sträckgränsen, men lokal buckling hindrar plasticering; elastisk kapacitet.
- **Klass 4:** lokal buckling inträffar innan sträckgränsen nås; effektiva tvärsnitt måste användas.

Tvärsnittets klass är den högsta (sämsta) klassen bland dess tryckta delar. Gränsvärdena finns i EC3 7.5.2, tabell 7.3 (invändiga delar, till exempel liv) och tabell 7.4 (utstående flänsar). Några av de vanligaste:

Tabell 1.10 Gränsvärden för c/t för några vanliga tryckta delar enligt EC3 tabell 7.3 och 7.4

Del	Klass 1	Klass 2	Klass 3
Invändig del, böjning	$c/t \le 72\varepsilon$	$c/t \le 83\varepsilon$	$c/t \le 121\varepsilon$
Invändig del, tryck	$c/t \le 28\varepsilon$	$c/t \le 34\varepsilon$	$c/t \le 38\varepsilon$
Utstående fläns, tryck	$c/t \le 9\varepsilon$	$c/t \le 10\varepsilon$	$c/t \le 14\varepsilon$

> **Notera:** Gränserna för invändiga delar i ren tryckning är strängare än i den tidigare utgåvan av EC3 (där 33ε, 38ε och 42ε gällde). Livet i en tryckt I-profil kan därför hamna i en högre klass än tidigare.

Massiva tvärsnitt, till exempel en rektangulär plåt som böjs i sitt eget plan, har inga slanka tryckta delar och tillhör klass 1.

1.4.3 Momentkapacitet

Böjmomentet ska uppfylla $M_{Ed} \le M_{c,Rd}$, där momentkapaciteten beror på tvärsnittsklassen (EC3 8.2.5):

$$M_{c,Rd} = \frac{W \cdot f_y}{\gamma_{M0}}, \qquad W = \begin{cases} W_{pl} & \text{klass 1 och 2} \\ W_{el} & \text{klass 3} \\ W_{eff} & \text{klass 4} \end{cases} \tag{1.8}$$

Det elastiska böjmotståndet är $W_{el} = I/(h/2)$ för ett symmetriskt tvärsnitt: momentet då den yttersta fibern når f_y. Det plastiska böjmotståndet W_{pl} svarar mot att hela tvärsnittet flyter, i drag på ena sidan och tryck på den andra om neutrallagret, och är summan av de två halvornas statiska moment kring neutrallagret. För ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h:

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6}, \qquad W_{pl} = \frac{bh^2}{4} = 1{,}5 \cdot W_{el} \tag{1.9}$$

För valsade profiler (IPE, HEA, HEB med flera) tabelleras W_{el} och W_{pl} i profiltabeller. Kvoten W_{pl}/W_{el} kallas formfaktor och är ungefär 1,1–1,15 för I-profiler böjda kring styva axeln.

> **Notera:** I EC3:2022 får tvärsnitt i klass 3 räkna med ett elastoplastiskt böjmotstånd mellan W_{el} och W_{pl} (EC3 bilaga B). I boken används W_{el} för klass 3.

Om bärverksdelen kan vippa (en böjd balk vars tryckta fläns inte är stagad i sidled) måste momentkapaciteten reduceras. Det behandlas i kapitlet om knäckning.

1.4.4 Tvärkraftskapacitet

Tvärkraften ska uppfylla $V_{Ed} \le V_{pl,Rd}$, där den plastiska tvärkraftskapaciteten är (EC3 8.2.6, formel (8.23))

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot f_y/\sqrt{3}}{\gamma_{M0}} \tag{1.10}$$

Faktorn $1/\sqrt{3}$ kommer från von Mises flytvillkor: ren skjuvning ger flytning vid skjuvspänningen $f_y/\sqrt{3}$. Skjuvarean A_v är den del av tvärsnittet som bär tvärkraften. För en valsad I- eller H-profil belastad parallellt med livet är den ungefär livets area,

$$A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f \ge \eta\, h_w t_w \tag{1.11}$$

med $\eta = 1{,}2$ för stål upp till S460. För ett massivt rektangulärt tvärsnitt, till exempel en plåt belastad i sitt eget plan, räknas hela arean, $A_v = A$ EC3 ger ingen egen formel för det fallet. Tunna, höga liv kan skjuvbuckla innan $V_{pl,Rd}$ nås; det behöver kontrolleras om $h_w/t_w > 72\varepsilon/\eta$ (EC3 8.2.6(6)).

Om tvärkraften är stor samtidigt som momentet är stort sjunker momentkapaciteten. Enligt EC3 8.2.8 behöver samverkan beaktas först när $V_{Ed} > 0{,}5\, V_{pl,Rd}$.

Exempel 1.2 Moment- och tvärkraftskapacitet för en plåt

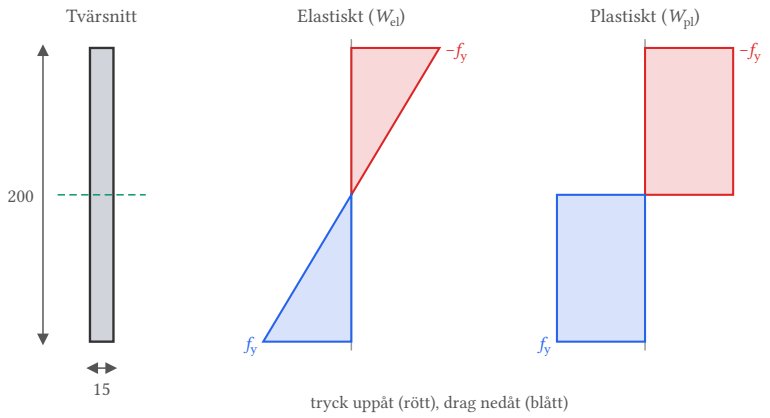
En påläggsplåt 15×200 mm i S355 böjs och skjuvas i sitt eget plan. Bestäm momentkapaciteten och tvärkraftskapaciteten.

Tvärsnittsklass. Plåten är ett massivt tvärsnitt utan slanka tryckta delar och tillhör därför klass 1. Hela tvärsnittet får plasticeras.

Böjmotstånd. Med $b = 15$ mm och $h = 200$ mm ger ekv. (1.9)

$$W_{el} = \frac{15 \cdot 200^2}{6} = 100\,000\text{mm}^3, \qquad W_{pl} = \frac{15 \cdot 200^2}{4} = 150\,000\text{mm}^3$$

Figur 1.1 visar skillnaden: elastiskt når bara kantfibrerna f_y, plastiskt flyter hela tvärsnittet.



Figur 1.1 Plåtens tvärsnitt med elastisk och plastisk spänningsfördelning.

Momentkapacitet. Klass 1 ger $W = W_{pl}$ i ekv. (1.8):

$$M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{150\,000 \cdot 355}{1{,}00} = 53{,}3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 53{,}3 \text{ kNm}$$

Tvärkraftskapacitet. För ett massivt rektangulärt tvärsnitt räknas hela arean som skjuvarea, $A_v = A = 15 \cdot 200 = 3\,000$ mm². Ekv. (1.10) ger

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v f_y/\sqrt{3}}{\gamma_{M0}} = \frac{3\,000 \cdot 355/\sqrt{3}}{1{,}00} = 615 \cdot 10^3 \text{ N} = 615 \text{ kN}$$

1.4.5 Normalkraft

I drag gäller $N_{Ed} \le N_{t,Rd}$, där $N_{t,Rd}$ är det minsta av flytning i bruttotvärsnittet, $N_{pl,Rd} = Af_y/\gamma_{M0}$, och brott i nettotvärsnittet genom hål, $N_{u,Rd} = kA_{net}f_u/\gamma_{M2}$ (EC3 8.2.3). Faktorn k är ny: $k = 1{,}0$ för borrade hål och $k = 0{,}9$ för stansade eller brännskurna hål. I tryck är kapaciteten $N_{c,Rd} = Af_y/\gamma_{M0}$ för klass 1–3, förutsatt att bärverksdelen inte knäcker.

Betong

1.5 Betong och armering: material

Betong har hög tryckhållfasthet men låg och osäker draghållfasthet. Därför armeras den med stål där dragspänningar uppstår, och vid dimensionering i brottgränstillståndet räknar man normalt inte med betongens draghållfasthet alls. Det här avsnittet samlar materialvärdena för betong och armering enligt EC2.

1.5.1 Hållfasthetsklasser

Betongens hållfasthetsklass betecknas med bokstaven C följt av två tal, till exempel C30/37. Det första talet är den karakteristiska tryckhållfastheten f_{ck} mätt på cylindrar och det andra motsvarande värde $f_{ck,cube}$ mätt på kuber, båda i MPa vid 28 dygns ålder. Värden enligt EC2 5.1.3, tabell 5.1, finns i tabell 1.11.

Tabell 1.11 Hållfasthetsvärden (MPa) för betong enligt EC2 tabell 5.1

Klass	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
f_{ck}	20	25	30	35	40	45	50
f_{cm}	28	33	38	43	48	53	58
f_{ctm}	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
$f_{ctk;0,05}$	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9
$f_{ctk;0,95}$	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3

Tabellen i standarden omfattar klasserna C12/15–C100/115. Värdena följer de samband som anges i tabellen:

$$\begin{aligned} f_{cm} &= f_{ck} + 8 \text{ MPa} \\ f_{ctm} &= 0{,}3\, f_{ck}^{2/3} \qquad (f_{ck} \le 50 \text{ MPa}) \\ f_{ctk;0,05} &= 0{,}7\, f_{ctm} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Vid böjning kan en högre draghållfasthet utnyttjas för lägre balkar; den används i kapitel 2 för att avgöra om ett tvärsnitt spricker:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{ \left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\; f_{ctm} \right\} \tag{1.13}$$

med h i mm (EC2 9.3, formel (9.30)).

1.5.2 Dimensionerande hållfasthet

Den dimensionerande tryckhållfastheten är enligt EC2 5.1.6, formel (5.3)–(5.4):

$$f_{cd} = \eta_{cc} \cdot k_{tc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_C}, \qquad \eta_{cc} = \left(\frac{40}{f_{ck}}\right)^{1/3} \le 1{,}0 \tag{1.14}$$

- η_{cc} beskriver att höghållfast betong är sprödare. Faktorn är 1,0 upp till C40/50 och minskar därefter.

- k_{tc} tar hänsyn till att hållfastheten bestäms vid 28 dygn och till långtidslastens inverkan. Den är **0,85** i normalfallet. Värdet 1,00 får användas om hållfastheten provas vid högst 28 dygn (högst 56 dygn för långsamt hårdnande cement) **och** den dimensionerande lasten inte förväntas förrän tidigast tre månader efter gjutning.
- $\gamma_C = 1{,}5$.

Den dimensionerande draghållfastheten är enligt formel (5.5)

$$f_{ctd} = k_{tt} \cdot \frac{f_{ctk;0,05}}{\gamma_C} \tag{1.15}$$

med $k_{tt} = 0{,}70$ i normalfallet (0,80 under samma villkor som $k_{tc} = 1{,}00$).

> **Notera:** I den tidigare utgåvan av EC2 var $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_C$ i Sverige. Med $k_{tc} = 0{,}85$ blir dagens dimensionerande tryckhållfasthet cirka 15 % lägre än tidigare.

Dimensionerande värden för några vanliga klasser finns i tabell 1.12.

Tabell 1.12 Dimensionerande hållfasthet (MPa) och elasticitetsmodul (GPa) för några betongklasser

Klass	η_{cc}	f_{cd} ($k_{tc}=0{,}85$)	f_{cd} ($k_{tc}=1{,}00$)	f_{ctd}	E_{cm}
C20/25	1,00	11,3	13,3	0,70	28,8
C25/30	1,00	14,2	16,7	0,84	30,5
C30/37	1,00	17,0	20,0	0,93	31,9
C35/45	1,00	19,8	23,3	1,03	33,3
C40/50	1,00	22,7	26,7	1,17	34,5
C45/55	0,96	24,5	28,8	1,26	35,7
C50/60	0,93	26,3	30,9	1,35	36,8

1.5.3 Elasticitetsmodul

Betongens elasticitetsmodul (sekantmodulen mellan noll och $0{,}4 f_{cm}$) beräknas enligt EC2 5.1.4, formel (5.1):

$$E_{cm} = k_E \cdot f_{cm}^{1/3} \tag{1.16}$$

med f_{cm} i MPa och E_{cm} i MPa. $k_E = 9\,500$ för betong med kvartsitballast; andra ballastsorter ger värden mellan ungefär 5 000 och 13 000. Värdena i tabellen ovan gäller $k_E = 9\,500$. Tvärkontraktionstalet är 0,2 för osprucken och 0 för sprucken betong.

> **Obs:** Den äldre formeln $E_{cm} = 22(f_{cm}/10)^{0{,}3}$ GPa ger 2–4 % högre värden. Använd formeln ovan.

1.5.4 Spännings–töjningssamband

För dimensionering av tvärsnitt i brottgränstillståndet beskrivs betongen i tryck med ett **parabel–rektangel-samband** (EC2 8.1.2, formel (8.4)):

$$\sigma_{cd} = \begin{cases} f_{cd}\left[1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^{2}\right] & 0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{c2} \\ [4pt] f_{cd} & \varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} \end{cases} \tag{1.17}$$

med $\varepsilon_{c2} = 2{,}0$ ‰ och brottstukningen $\varepsilon_{cu} = 3{,}5$ ‰ för **alla** hållfasthetsklasser. Ett enklare alternativ är ett **rektangulärt spänningsblock** med intensiteten f_{cd} över djupet $0{,}8x$, där x är tryckzonens höjd (EC2 figur 8.2d). Spänningsblocket används i avsnitt 1.7.

1.5.5 Armering

Armeringsstålets hållfasthetsklass anges med den karakteristiska sträckgränsen, till exempel B500 med $f_{yk} = 500$ MPa (EC2 tabell 5.4). Dessutom har stålet en seghetsklass A, B eller C (tabell 5.5) som anger hur mycket det kan töjas före brott, se tabell 1.13.

Tabell 1.13 Seghetsklasser för armeringsstål enligt EC2 tabell 5.5

Seghetsklass	$k = (f_t/f_y)_k$	Töjning vid maxlast ε_{uk}
A	≥ 1,05	≥ 2,5 %
B	≥ 1,08	≥ 5,0 %
C	1,15–1,35	≥ 7,5 %

I boken används **B500B**: $f_{yk} = 500$ MPa, seghetsklass B och elasticitetsmodulen $E_s = 200\,000$ MPa (EC2 5.2.4). Den dimensionerande sträckgränsen och flyttöjningen är

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_S} = \frac{500}{1{,}15} = 435 \text{ MPa}, \qquad \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = 2{,}17 \text{ ‰} \tag{1.18}$$

I brottgränstillståndet beskrivs armeringen som linjärt elastisk upp till f_{yd} och därefter idealplastisk (en horisontell gren utan töjningsgräns). Alternativt får en lutande gren upp till kf_{yk}/γ_S användas, med töjningsgränsen $\varepsilon_{ud} = \varepsilon_{uk}/\gamma_S$.

1.5.6 Övriga materialdata

Tunghet är tyngden per volymenhet (kN/m³), den term som används i EKS och i SS-EN 1991-1-1.

Tabell 1.14 Tunghet och längdutvidgning för betong och armering

Storhet	Värde	Referens
Tunghet, armerad betong	25 kN/m³	EC2 5.1.6
Tunghet, armeringsstål	78,5 kN/m³	EC2 5.2.4
Längdutvidgningskoefficient, betong och armering	$10 \cdot 10^{-6}$ per °C	EC2 5.1.6, 5.2.4

1.5.7 Täckande betongskikt

Armeringen ska ligga under ett tillräckligt tjockt betongskikt för att skyddas mot korrosion och för att krafterna ska kunna föras över mellan stål och betong. Det nominella täckskiktet är (EC2 6.5)

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev}, \qquad c_{min} = \max\{c_{min,dur} + \textstyle\sum \Delta c;\; c_{min,b};\; 10 \text{ mm}\} \tag{1.19}$$

där Δc_{dev} är ett toleranstillägg (normalt 10 mm) och $c_{min,b}$ minst lika med stångdiametern. Beständighetskravet $c_{min,dur}$ hämtas ur EC2 tabell 6.3 (karbonatisering) och tabell 6.4 (klorider) och beror på miljö (exponeringsklass, till exempel XC3), betongens motståndsklass (XRC eller XRDS) och konstruktionens livslängd.

Rekommenderade värden på $c_{min,dur}$ för en avsedd livslängd på 50 respektive 100 år finns i tabell 1.15 och tabell 1.16. Raderna anger betongens motståndsklass: XRC för karbonatisering och XRDS för klorider. Tabellerna är nationellt valbara parametrar (NDP), så EKS kan ange andra värden.

Tabell 1.15 Minsta täckande betongskikt cmin,dur (mm) vid karbonatisering, för livslängd 50 och 100 år, enligt EC2 tabell 6.3

Motståndsklass	XC1, 50	XC1, 100	XC2, 50	XC2, 100	XC3, 50	XC3, 100	XC4, 50	XC4, 100
XRC 0,5	10	10	10	10	10	10	10	10
XRC 1	10	10	10	10	10	15	10	15
XRC 2	10	15	10	15	15	25	15	25
XRC 3	10	15	15	20	20	30	20	30
XRC 4	10	20	15	25	25	35	25	40
XRC 5	15	25	20	30	25	45	30	45
XRC 6	15	25	25	35	35	55	40	55
XRC 7	15	30	25	40	40	60	45	60

Tabell 1.16 Minsta täckande betongskikt cmin,dur (mm) vid klorider, för livslängd 50 och 100 år, enligt EC2 tabell 6.4 (XS från havsvatten och XD från andra källor har samma värden)

Motstånds-klass	XS1/XD1, 50	XS1/XD1, 100	XS2/XD2, 50	XS2/XD2, 100	XS3/XD3, 50	XS3/XD3, 100
XRDS 0,5	20	20	20	30	30	40
XRDS 1	20	25	25	35	35	45
XRDS 1,5	25	30	30	40	40	50
XRDS 2	25	30	35	45	45	55
XRDS 3	30	35	40	50	55	65
XRDS 4	30	40	50	60	60	80
XRDS 5	35	45	60	70	70	–
XRDS 6	40	50	65	80	–	–
XRDS 8	45	55	75	–	–	–
XRDS 10	50	65	80	–	–	–

Ett streck betyder att kombinationen inte är tillåten. Värdena förutsätter utförande och härdning minst enligt klass 2 i EN 13670. För en livslängd på högst 30 år får 50-årsvärdena minskas med högst 5 mm (EC2 6.5.2.2(2)).

1.6 Betong: krypning och krympning

Betongens deformationer fortsätter att utvecklas i åratal efter gjutning och pålastning. Två fenomen dominerar:

- **Krypning:** en tryckt betong fortsätter att stukas under konstant spänning. Den slutliga kryptöjningen är ofta två till tre gånger den elastiska.
- **Krympning:** betongen minskar i volym när den torkar ut och när cementet hydratiserar, oberoende av last.

Båda beror främst på fuktklimatet, på hur tjockt tvärsnittet är (tunna delar torkar ut fortare) och på betongens ålder vid pålastning. Här samlas de värden som behövs; hur krypning och krympning påverkar spänningar och nedböjning behandlas i avsnitt 2.6 och avsnitt 2.7.

1.6.1 Krypning

Kryptalet $\varphi(t, t_0)$ anger kryptöjningen vid tiden t som en multipel av den elastiska töjningen för en last pålagd vid åldern t_0 (EC2 5.1.5, formel (5.2)):

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \frac{\sigma_c}{1{,}05\, E_{cm}} \tag{1.20}$$

EC2 tabell 5.2 ger kryptalet efter 50 år, $\varphi(50y, t_0)$, för betong med $f_{ck} = 35$ MPa; värdena återges i tabell 1.17. Åldern vid pålastning t_0 (dygn) beror på cementklassen: CS hårdnar långsamt, CN normalt och CR snabbt. Den nominella tjockleken är

$$h_n = \frac{2A_c}{u} \tag{1.21}$$

där A_c är betongarean och u den del av omkretsen som är utsatt för uttorkning (mm).

Tabell 1.17 Kryptal φ(50y, t0) för fck = 35 MPa vid RH 50 % och RH 80 %, enligt EC2 tabell 5.2

t_0 (dygn)			RH 50 %; h_n (mm)				RH 80 %; h_n (mm)			
CS	CN	CR	100	200	500	1000	100	200	500	1000
3	1	1	4,2	3,8	3,4	3,1	3,0	2,8	2,6	2,5
10	7	3	3,1	2,8	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
32	28	23	2,4	2,2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5
91	91	91	1,9	1,7	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,2
365	365	365	1,4	1,3	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	0,8
Exponent A			0,82	0,79	0,75	0,72	0,71	0,68	0,66	0,64

RH 50 % motsvarar torrt klimat (till exempel uppvärmt inomhus) och RH 80 % fuktigt klimat (till exempel utomhus i Sverige). Raden "Exponent A" används i korrektionen nedan. För andra hållfasthetsklasser, $12 \le f_{ck} \le 100$ MPa, multipliceras tabellvärdet med

$$\left(\frac{35}{f_{ck}}\right)^{A} \tag{1.22}$$

Tabellen gäller när tryckspänningen vid pålastning är högst $0{,}40 f_{cm}(t_0)$ i den kvasipermanenta lastkombinationen. Vid högre spänning blir krypningen icke-linjär (EC2 bilaga B).

Effektiv elasticitetsmodul

Elastisk deformation och krypning kan räknas ihop genom att använda en reducerad, **effektiv** elasticitetsmodul (EC2 9.1, formel (9.1)):

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05\, E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \tag{1.23}$$

Den används i kapitel 2 för spänningar och nedböjning under långtidslast.

1.6.2 Krympning

EC2 tabell 5.3 ger krympningen efter 50 år, $\varepsilon_{cs,50y}$, i ‰; värdena återges i tabell 1.18.

Tabell 1.18 Krympning εcs,50y (‰) vid RH 50 % och RH 80 %, enligt EC2 tabell 5.3

		RH 50 %; h_n (mm)				RH 80 %; h_n (mm)			
Cement	f_{ck}	**100**	**200**	**500**	**1000**	**100**	**200**	**500**	**1000**
CS	20	0,57	0,56	0,48	0,36	0,33	0,32	0,28	0,21
CS	35	0,53	0,51	0,45	0,35	0,31	0,31	0,27	0,22
CS	50	0,49	0,48	0,43	0,35	0,30	0,29	0,27	0,23
CN	20	0,67	0,65	0,56	0,41	0,38	0,37	0,32	0,24
CN	35	0,60	0,59	0,51	0,39	0,34	0,34	0,30	0,24
CN	50	0,55	0,54	0,48	0,37	0,31	0,31	0,28	0,23
CN	80	0,48	0,48	0,43	0,36	0,30	0,30	0,28	0,25
CR	35	0,76	0,74	0,65	0,48	0,42	0,41	0,36	0,28
CR	50	0,67	0,66	0,58	0,44	0,36	0,35	0,32	0,26
CR	80	0,55	0,54	0,49	0,39	0,31	0,30	0,28	0,25

Mellanliggande värden får interpoleras linjärt. Värdena är medelvärden med en variationskoefficient på ungefär 30 %.

Exempel 1.3 Kryptal, effektiv elasticitetsmodul och krympning

En utomhusbalk (RH 80 %) i C30/37 med cement av klass CN belastas vid 28 dygns ålder. Den nominella tjockleken är $h_n = 200$ mm. Bestäm kryptalet, den effektiva elasticitetsmodulen och krympningen efter 50 år.

Kryptal. tabell 1.17 ger för RH 80 %, $t_0 = 28$ dygn (CN) och $h_n = 200$ mm värdet $\varphi = 1{,}6$ för $f_{ck} = 35$ MPa. Exponenten är $A = 0{,}68$, och korrektionen ekv. (1.22) till C30/37 ger

$$\varphi(50y, 28) = 1{,}6 \cdot \left(\frac{35}{30}\right)^{0{,}68} = 1{,}78$$

Effektiv elasticitetsmodul. Med $E_{cm} = 31{,}9$ GPa (tabell 1.12) ger ekv. (1.23)

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05 \cdot 31{,}9}{1 + 1{,}78} = 12{,}1 \text{ GPa}$$

Långtidsdeformationerna blir alltså ungefär 2,6 gånger de momentana.

Krympning. tabell 1.18 ger för CN, RH 80 % och $h_n = 200$ mm värdet 0,37 ‰ vid $f_{ck} = 20$ MPa och 0,34 ‰ vid $f_{ck} = 35$ MPa. Linjär interpolation till $f_{ck} = 30$ MPa ger

$$\varepsilon_{cs,50y} = 0{,}37 + \frac{30-20}{35-20}\cdot(0{,}34-0{,}37) = 0{,}35\ ‰$$

Notera: Cementklasserna CS, CN och CR motsvarar de tidigare beteckningarna S, N och R. Tabellerna ersätter de diagram och formler som användes med den äldre utgåvan av EC2.

1.7 Böjsprucket armerat tvärsnitt i brottgränstillstånd (ULS)

I kapitel 2 analyseras armerade betongtvärsnitt i bruksstadiet, där både betong och stål är linjärt elastiska (stadium I och II). Här behandlas i stället tvärsnittets **bärförmåga**: det moment eller den normalkraft som tvärsnittet klarar när betongen i tryckzonen når sin brottstukning (stadium III). Det behövs för dimensionering i brottgränstillståndet (ULS), till exempel för balkar i konstruktionstävlingen och för betongpelare.

1.7.1 Antaganden

Tvärsnittsmodellen bygger på följande antaganden (EC2 8.1.1(2)). De två första är desamma som i bruksstadiet, och det tredje gäller även för ett sprucket tvärsnitt i stadium II (men inte i stadium I). Det som är nytt är materialens icke-linjära beteende i det fjärde. Antagandena för bruksstadiet beskrivs mer utförligt, med figurer, i avsnitt 2.1.1.

1. Plana tvärsnitt förblir plana: töjningen varierar linjärt över tvärsnittet.
2. Armeringen har samma töjningsändring som betongen omkring den.
3. Betongens draghållfasthet försummas.
4. Betongens tryckspänning följer parabel–rektangel-sambandet eller spänningsblocket i avsnitt 1.5, och armeringen är elastisk–idealplastisk med flytspänningen f_{yd}.

Brott inträffar när den mest tryckta betongfibern når brottstukningen $\varepsilon_{cu} = 3{,}5$ ‰. Med tryckzonens höjd x (neutrallagrets läge, mätt från den tryckta kanten) ger den linjära töjningsfördelningen töjningen i ett armeringslager på avståndet d_i från den tryckta kanten:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cu}\cdot\frac{d_i - x}{x} \tag{1.24}$$

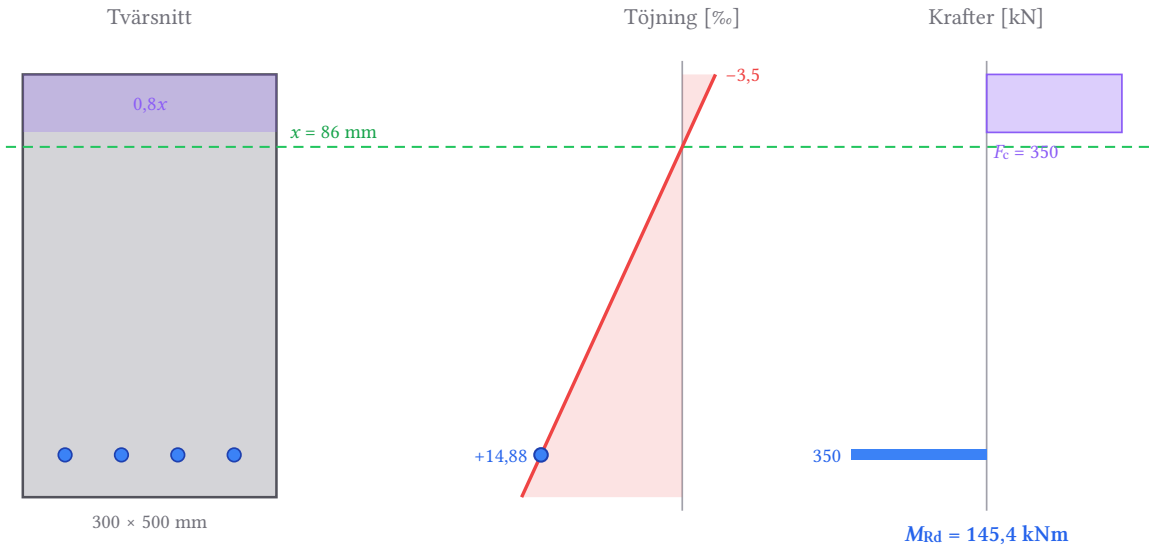
Positiv töjning är drag. Armering under neutrallagret ($d_i > x$) är dragen och armering ovanför är tryckt. Spänningen är $\sigma_{si} = E_s\varepsilon_{si}$, men högst f_{yd} i absolutbelopp.

1.7.2 Spänningsblocket

Med det rektangulära spänningsblocket är betongens tryckresultant och dess läge

$$F_c = f_{cd}\cdot b\cdot 0{,}8x \tag{1.25}$$

för ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b. Resultanten angriper i blockets mitt, på djupet $0{,}4x$ från den tryckta kanten. Blocket ger nästan samma resultant och hävarm som parabel–rektangel-sambandet och är betydligt enklare att räkna med.



Figur 1.2 Töjning och spänning i ett armerat betongtvärsnitt i brottgränstillstånd. Ändra armering och mått och se hur tryckzonen, ståltöjningarna och momentkapaciteten ändras.

1.7.3 Enkelarmerat tvärsnitt

För ett tvärsnitt med enbart dragarmering A_s på djupet d ger jämvikt i horisontalled, förutsatt att armeringen flyter,

$$f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8x = f_{yd} \cdot A_s \quad \Rightarrow \quad x = \frac{f_{yd} A_s}{0{,}8\, f_{cd}\, b} \tag{1.26}$$

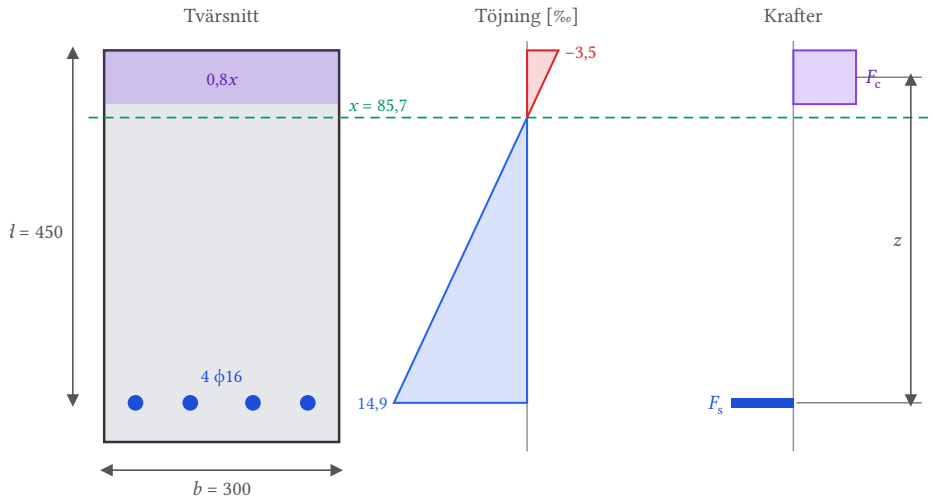
och momentjämvikt kring tryckresultanten ger momentkapaciteten

$$M_{Rd} = f_{yd} \cdot A_s \cdot (d - 0{,}4x) \tag{1.27}$$

Antagandet att armeringen flyter kontrolleras med ekv. (1.24): $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} = 2{,}17$ ‰.

Exempel 1.4 Momentkapacitet för ett enkelarmerat tvärsnitt

En balk med tvärsnittet 300 × 500 mm i C30/37 är armerad med 4 ϕ16 B500B i underkant, på djupet $d = 450$ mm, se figur 1.3. Bestäm momentkapaciteten.



Figur 1.3 Tvärsnittet i exemplet med töjningar och krafter i brottgränstillstånd.

Material. $f_{cd} = 17{,}0$ MPa (tabell 1.12), $f_{yd} = 435$ MPa och $\varepsilon_{yd} = 2{,}17$ ‰. Armeringsarean är $A_s = 4 \cdot \pi \cdot 16^2/4 = 804$ mm².

Tryckzonens höjd. Anta att armeringen flyter. Ekv. (1.26) ger

$$x = \frac{f_{yd} A_s}{0{,}8\, f_{cd}\, b} = \frac{435 \cdot 804}{0{,}8 \cdot 17{,}0 \cdot 300} = 85{,}7 \text{ mm}$$

Kontroll av antagandet. Ståltöjningen enligt ekv. (1.24) är

$$\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot \frac{450 - 85{,}7}{85{,}7} = 14{,}9 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2{,}17 \text{ ‰}$$

så armeringen flyter, och antagandet var riktigt.

Momentkapacitet. Dragkraften är $F_s = 435 \cdot 804 = 349{,}7$ kN och hävarmen $z = d - 0{,}4x = 450 - 0{,}4 \cdot 85{,}7 = 415{,}7$ mm. Ekv. (1.27) ger

$$M_{Rd} = F_s \cdot z = 349{,}7 \cdot 0{,}4157 = 145{,}4 \text{ kNm}$$

Samma tvärsnitt visas i den interaktiva figur 1.2, där armering och mått kan ändras.

Snabb uppskattning

Hävarmen $z = d - 0{,}4x$ är för normalt armerade balkar ungefär $0{,}9d$ i exempel 1.4 är $z = 0{,}92d$. Det ger en snabb överslagsformel för att uppskatta den armering som behövs för ett givet moment:

$$A_s \approx \frac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot 0{,}9d} \tag{1.28}$$

Överslaget används för att välja armering, som sedan kontrolleras med den noggrannare analysen. Är tryckzonen en tunn fläns (T-tvärsnitt) kan hävarmen i stället uppskattas som $z \approx \max\{d - h_f/2;\, 0{,}9d\}$.

1.7.4 Segt verkningssätt

Ett armerat tvärsnitt ska ha ett **segt verkningssätt** (på engelska *ductile*): armeringen ska flyta och tvärsnittet deformeras kraftigt innan betongen krossas, så att brottet föregås av stora sprickor och nedböjningar. Gränsen går där armeringen precis når flyttöjningen samtidigt som betongen når brottstukningen:

$$\frac{x_{bal}}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} = \frac{3{,}5}{3{,}5 + 2{,}17} = 0{,}62 \tag{1.29}$$

Är x/d större än så flyter inte armeringen; tvärsnittet är **överarmerat** och går till ett sprött brott (*brittle failure*) i betongen, utan förvarning. Mer armering höjer då knappt bärförmågan. För god seghet bör x/d vara väsentligt lägre. EC2:2023 ställer konkreta krav när plastisk analys eller momentomlagring (*moment redistribution*) används: plastisk analys utan kontroll av rotationsförmågan kräver $x_u/d \leq 0{,}25$ (EC2 7.3.3.2), och hur mycket momentet får lagras om begränsas av x_u/d enligt formel (7.16).

1.7.5 Dubbelarmerat tvärsnitt

Med tryckarmering A_s' på djupet d' tillkommer en tryckkraft i stålet. Jämvikt i horisontalled och momentjämvikt kring dragarmeringen ger

$$f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8x + |\,\sigma_s'\,| \cdot A_s' = \sigma_s \cdot A_s \tag{1.30}$$

$$M_{Rd} = f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8x \cdot (d - 0{,}4x) + |\,\sigma_s'\,| \cdot A_s' \cdot (d - d') \tag{1.31}$$

Tryckarmeringen ligger nära neutrallagret och **flyter ofta inte**. Spänningen σ_s' beror på töjningen och därmed på x, som inte är känd förrän jämvikten är löst. Därför antas först hur armeringen beter sig, antagandet kontrolleras och beräkningen görs om med ett nytt antagande om det inte stämde:

1. Anta att all armering flyter och lös x ur ekv. (1.30).
2. Kontrollera töjningarna med ekv. (1.24). Om tryckarmeringen inte flyter ($|\,\varepsilon_s'\,| < \varepsilon_{yd}$), sätt in $|\,\sigma_s'\,| = E_s\varepsilon_{cu}(x - d')/x$ i jämviktsekvationen. Den blir då en andragradsekvation i x.
3. Kontrollera de nya töjningarna och beräkna M_{Rd} ur ekv. (1.31).

Momentet kan tas kring vilken punkt som helst; kring dragarmeringen försvinner dragkraften ur ekvationen. Med flera armeringslager behandlas varje lager på samma sätt, med sin egen töjning och spänning. Uppgift 1.2 visar hela gången.

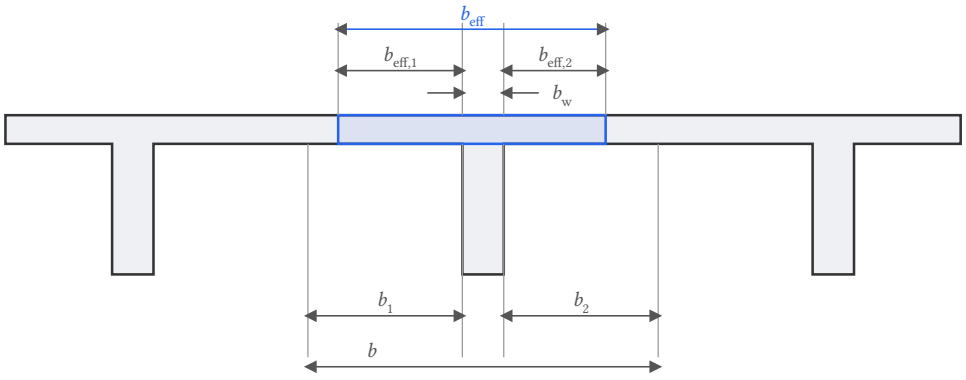
1.7.6 T-tvärsnitt

I en T- eller L-balk (och en U-sektion) är spänningen i en bred fläns inte jämnt fördelad: den är störst över livet och avtar ut mot kanterna. Det beaktas genom att räkna med en **medverkande bredd** b_{eff} (*effective width*) av flänsen, inom vilken spänningen antas vara jämnt fördelad (EC2 7.2.3, formel (7.11)–(7.12)):

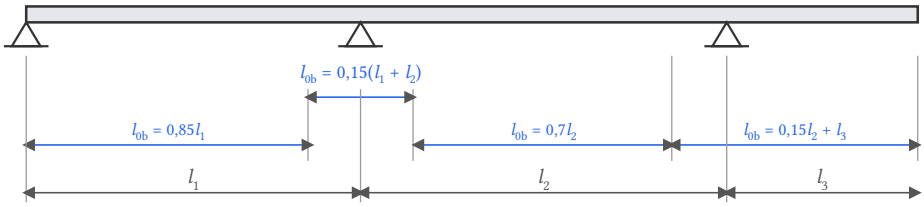
$$b_{eff} = \sum b_{eff,i} + b_w \leq b, \qquad b_{eff,i} = \min\{0{,}2b_i + 0{,}1l_{0b};\; 0{,}2l_{0b};\; b_i\} \tag{1.32}$$

där b_i är flänsens utstickande del på var sida om livet, högst halva fria avståndet till nästa liv, och l_{0b} avståndet mellan momentets nollpunkter, se figur 1.4. För en fritt upplagd balk är l_{0b} lika med spännvidden. För kontinuerliga balkar med ungefär jämnt utbredd last, konstant tvärsnitt och närliggande spännvidder som inte skiljer sig för mycket (kvoten mellan 2/3 och 1,5) kan l_{0b} tas enligt figur 1.4b (EC2 figur 7.2).

a) Medverkande bredd



b) Avstånd mellan momentnollpunkter



Figur 1.4 a) Medverkande bredd b_{eff} i ett bjälklag med T-balkar: inom b_{eff} (skuggat) antas spänningen jämnt fördelad. b) Avståndet l_{0b} mellan momentnollpunkter längs en kontinuerlig balk med konsol. Omritad efter EC2 figur 7.2 och 7.3.

I ett T-tvärsnitt med flänsbredden b (lika med b_{eff}) och flänstjockleken h_f som är tryckt i flänsen räknas tvärsnittet som rektangulärt med bredden b så länge spänningsblocket ryms i flänsen, $0{,}8x \leq h_f$. Annars delas tryckzonen upp i flänsens utstickande delar och livet:

$$F_c = f_{cd} \cdot (b - b_w) \cdot h_f + f_{cd} \cdot b_w \cdot 0{,}8x \tag{1.33}$$

med respektive delkrafts hävarm. Är flänsen dragen (negativt moment över ett stöd) räknas tryckzonen med livets bredd b_w.

1.7.7 Tvärsnitt med normalkraft

En pelare eller en balk med normalkraft analyseras med samma töjningsfördelning, men jämvikten i horisontalled innehåller nu normalkraften. Med bokens teckenkonvention ($N > 0$ drag) och normalkraften verkande i tvärsnittets mitt på höjden $h/2$:

$$\sum_i \sigma_{si} A_{si} - F_c = N_{Ed} \tag{1.34}$$

$$M_{Rd} = F_c \left(\frac{h}{2} - 0{,}4x \right) + \sum_i \sigma_{si} A_{si} \left(d_i - \frac{h}{2} \right) \tag{1.35}$$

där momentet tas kring tvärsnittets mitt. För en tryckt pelare är N_{Ed} negativ. Ofta söks den största tryckkraft som tvärsnittet klarar vid en given excentricitet e: då gäller dessutom $M_{Rd} = |N_{Ed}| \cdot e$, och de två villkoren löses tillsammans, antingen som ett ekvationssystem eller genom att pröva olika värden på x.

Tryckta tvärsnitt ska dimensioneras för minst momentet $M_{Ed,min} = |N_{Ed}| \cdot e_{d,min}$ med $e_{d,min} = \max\{h/30;\ 20\ \text{mm}\}$ (EC2 8.1.1(5), formel (8.1)), även om den beräknade excentriciteten är mindre. Pelare behandlas vidare i kapitlet om knäckning.

> **Obs:** Äldre kurslitteratur räknar tryckande normalkraft som positiv och tar momentet kring dragarmeringen. Resultatet blir detsamma, men tecknen måste översättas.

1.8 Betong: tvärkraftskapacitet

Nära stöden, där tvärkraften är stor, kan en betongbalk spricka snett. Snedsprickorna går ungefär i 45° mot balkaxeln, vinkelrätt mot de huvuddragspänningar som tvärkraft och moment ger tillsammans. Om inget hindrar sprickan kan balken gå till ett sprött **skjuvbrott**. Tvärkraften bärs därför antingen av betongen själv (friktion i sprickytorna och dymlingsverkan i längsarmeringen) eller av **tvärkraftsarmering**, i regel byglar som korsar snedsprickorna.

EC2:2023 uttrycker hela kontrollen i **skjuvspänningar** i stället för krafter. Den genomsnittliga skjuvspänningen i tvärsnittet är (EC2 8.2.1(3), formel (8.18))

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z}, \qquad z = 0{,}9d \tag{1.36}$$

där b_w är tvärsnittets (livets) bredd och d den effektiva höjden till dragarmeringens tyngdpunkt.

1.8.1 Kontroll i tre steg

EC2 8.2.1(1) anger en kontroll i tre steg:

1. Om $\tau_{Ed} \le \tau_{Rdc,min}$ behövs ingen detaljerad kontroll.
2. Om $\tau_{Ed} \le \tau_{Rd,c}$ behövs ingen beräknad tvärkraftsarmering.
3. Annars dimensioneras tvärkraftsarmering så att $\tau_{Ed} \le \tau_{Rd}$.

Även när ingen tvärkraftsarmering behövs enligt beräkning kan **minimiarmering** krävas för balkar (EC2 kapitel 12). I statiskt bestämda balkar med $d > 500$ mm ska minimiarmering alltid finnas.

1.8.2 Utan tvärkraftsarmering

Den minsta skjuvspänningskapaciteten är (formel (8.20))

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{\gamma_V}\sqrt{\frac{f_{ck}}{f_{yd}} \cdot \frac{d_{dg}}{d}} \tag{1.37}$$

och den mer detaljerade kapaciteten för en balk utan tvärkraftsarmering är (formel (8.27)–(8.28))

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{\gamma_V}\left(100\,\rho_l \cdot f_{ck} \cdot \frac{d_{dg}}{d}\right)^{1/3} \ge \tau_{Rdc,min}, \qquad \rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \tag{1.38}$$

med f_{ck} och f_{yd} i MPa och längder i mm.

- $\gamma_V = 1{,}40$ är partialkoefficienten för tvärkraft utan tvärkraftsarmering.
- d_{dg} beskriver hur skrovlig en skjuvspricka är, vilket beror på ballastens storlek: $d_{dg} = 16 + D_{lower} \le 40$ mm för $f_{ck} \le 60$ MPa. D_{lower} är ballastens största stenstorlek; till exempel $D_{lower} = 16$ mm ger $d_{dg} = 32$ mm.
- A_{sl} är den förankrade dragarmeringen vid snittet (EC2 figur 8.7).

Kapaciteten ökar alltså med armeringsmängden, betonghållfastheten och ballastens storlek, och minskar med balkhöjden (storlekseffekt).

1.8.3 Med tvärkraftsarmering

Med byglar bärs tvärkraften enligt en **fackverksmodell**: snedsträvor av tryckt betong med lutningen θ mot balkaxeln, byglar som dragna vertikaler, tryckzonen som överram och dragarmeringen som underram. Lutningen väljs inom gränserna (formel (8.41))

$$1 \le \cot\theta \le 2{,}5 \tag{1.39}$$

för vanliga armerade balkar utan normalkraft ($21{,}8° \le \theta \le 45°$); med betydande normaltryck eller dragkraft gäller andra gränser. Kapaciteten när byglarna flyter är (formel (8.42)–(8.43))

$$\tau_{Rd,sy} = \rho_w \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta, \qquad \rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s} \tag{1.40}$$

där A_{sw} är tvärsnittsarean av en bygel (båda skänklarna) och s avståndet mellan byglarna. Samtidigt måste betongen i snedsträvorna klara trycket (formel (8.44)):

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(\cot\theta + \tan\theta) \le \nu \cdot f_{cd}, \qquad \nu = 0{,}5 \tag{1.41}$$

En flackare sträva (större $\cot\theta$) gör att varje bygel bär mer, men ökar trycket i strävorna. Multipliceras spänningarna med $b_w z$ fås motsvarande krafter, $V_{Rd,s} = (A_{sw}/s)\, z\, f_{ywd} \cot\theta$ och $V_{Rd,max} = b_w z \nu f_{cd}/(\cot\theta + \tan\theta)$.

Exempel 1.5 Tvärkraftskapacitet för en balk

Balken i exempel 1.4 ($b_w = 300$ mm, $d = 450$ mm, C30/37, 4 ϕ16, största stenstorlek 16 mm) belastas med tvärkraften $V_{Ed} = 120$ kN. Kontrollera om tvärkraftsarmering behövs och dimensionera den i så fall.

Skjuvspänning. Med $z = 0{,}9d = 405$ mm ger ekv. (1.36)

$$\tau_{Ed} = \frac{120 \cdot 10^3}{300 \cdot 405} = 0{,}99 \text{ MPa}$$

Kapacitet utan tvärkraftsarmering. Med $d_{dg} = 16 + 16 = 32$ mm, $\gamma_V = 1{,}40$ och $\rho_l = 804/(300 \cdot 450) = 0{,}60$ % ger ekv. (1.37) och ekv. (1.38)

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}40}\sqrt{\frac{30}{435}\cdot\frac{32}{450}} = 0{,}55 \text{ MPa}, \qquad \frac{0{,}66}{1{,}40}\left(0{,}60 \cdot 30 \cdot \frac{32}{450}\right)^{1/3} = 0{,}51 \text{ MPa}$$

Det större värdet gäller, $\tau_{Rd,c} = 0{,}55$ MPa. Eftersom $\tau_{Ed} = 0{,}99$ MPa är större behövs tvärkraftsarmering.

Byglar. Välj tvåskäriga byglar ϕ8 s150, det vill säga $A_{sw} = 2 \cdot 50{,}3 = 101$ mm² per bygel och $\rho_w = 101/(300 \cdot 150) = 0{,}22$ %. Med den flackaste tillåtna strävan, $\cot\theta = 2{,}5$, ger ekv. (1.40)

$$\tau_{Rd,sy} = 0{,}00224 \cdot 435 \cdot 2{,}5 = 2{,}43 \text{ MPa} > \tau_{Ed}, \qquad V_{Rd,s} = 2{,}43 \cdot 300 \cdot 405 = 295 \text{ kN}$$

Strävorna. ekv. (1.41) ger

$$\sigma_{cd} = 0{,}99 \cdot (2{,}5 + 0{,}4) = 2{,}9 \text{ MPa} \le \nu f_{cd} = 0{,}5 \cdot 17{,}0 = 8{,}5 \text{ MPa}$$

Byglarna och strävorna klarar alltså tvärkraften med god marginal.

Notera: Formlerna ersätter de äldre $V_{Rd,c} = C_{Rd,c}k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} b_w d$ och $V_{Rd,max}$ med $\nu_1 = 0{,}6(1 - f_{ck}/250)$. Den nya modellen tar med ballastens storlek, har en egen partialkoefficient γ_V och en fast reduktionsfaktor $\nu = 0{,}5$ för strävorna.

2 Bruksgränstillstånd

Betong – tvärsnittsanalys

2.1 Förutsättningar

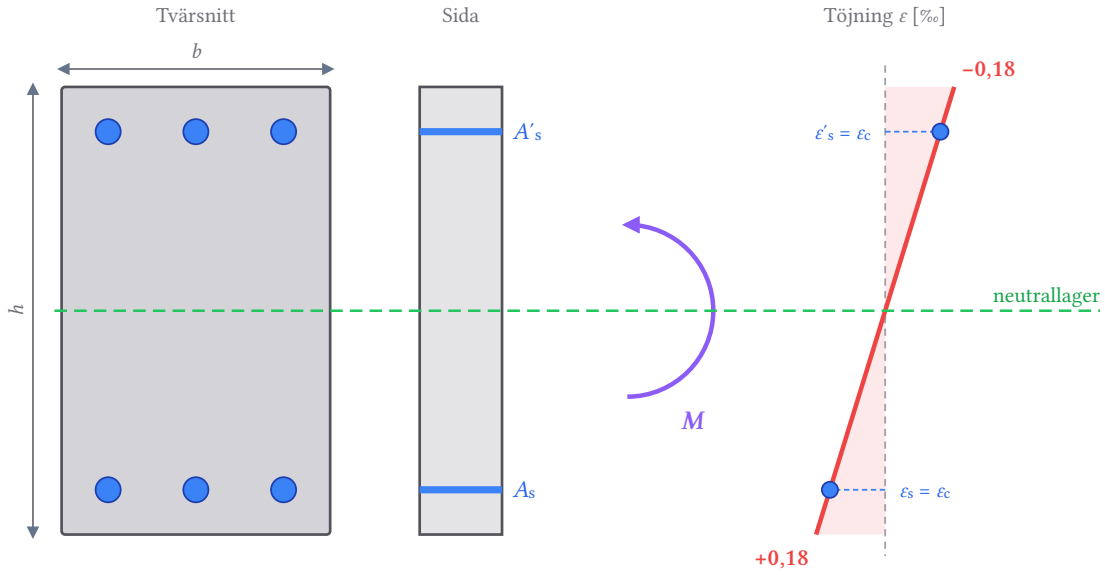
2.1.1 Beräkningsprinciper för tvärsnittsanalys i bruksstadiet

Metoder för att beräkna normalspänningar (σ) hos ett betongtvärsnitt utsatt för böjning med eller utan normalkraft införs följande beräkningsantaganden:

1. Töjningen antas variera rätlinjigt över tvärsnittet, $\varepsilon(z) = a + b \cdot z$, där a och b är konstanter som bestäms av jämviktsvillkoren.
2. Ingjuten armering antas samverka fullständigt med omgivande betong:

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_c$$

Antagande 1 och 2 illustreras i figur 2.1.

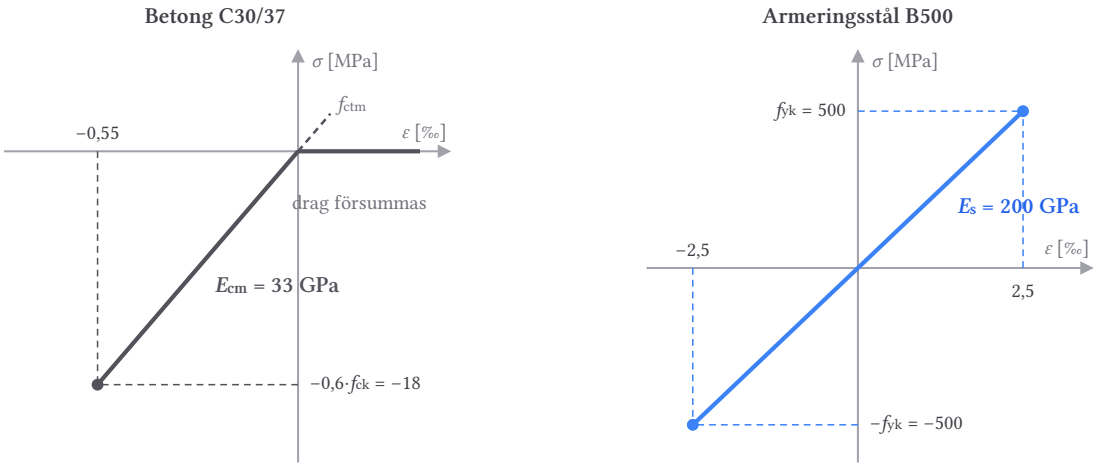


Figur 2.1 Töjningsfördelning (N + M) + Δεs=Δεc (1 och 2)

3. För böjsprucket tvärsnitt försummas inverkan av dragen betong under neutrallagret
4. Linjärelastisk respons för betong och armering:

$$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \qquad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

Materialmodellerna i antagande 4 visas i figur 2.2.



Figur 2.2 Materialmodeller — betong och stål (linjärelastiska) (3 och 4)

2.1.2 Spänningsbegränsningar i bruksstadiet

Antagandet 4) om linjärelastisk materialrespons bör kontrolleras när beräkningsmodellen tillämpas. Betongens arbetskurva är egentligen icke-linjär från första början. Men Hookes lag tillämpas approximativt upp till ca 0,5–0,6 gånger tryckhållfasthetsvärdet. Därför är beräkningsmodellen tillämplig om spänningarna begränsas enligt:

$$\sigma_{cc} \leq 0{,}6\, f_{ck} \qquad \text{(tryckspänning i betong)}$$

$$\sigma_{s} \leq 1{,}0\, f_{yk} \qquad \text{(drag- och tryckspänning i stål)}$$

Tabell 2.1 Spänningsbegränsningar i bruksgränstillståndet enligt EC2

Begränsning	Villkor	Anmärkning
Betongtryck (karakteristisk last)	$\sigma_{cc} \leq 0{,}6\, f_{ck}$	Risk för längsgående sprickor
Betongtryck (långtidslast)	$\sigma_{cc} \leq 0{,}45\, f_{ck}$	Risk för olinjär krypning
Ståldrag (allmänt)	$\sigma_{s} \leq 0{,}8\, f_{yk}$	Oacceptabel sprickbildning
Ståldrag (tvångsinverkan)	$\sigma_{s} \leq 1{,}0\, f_{yk}$	

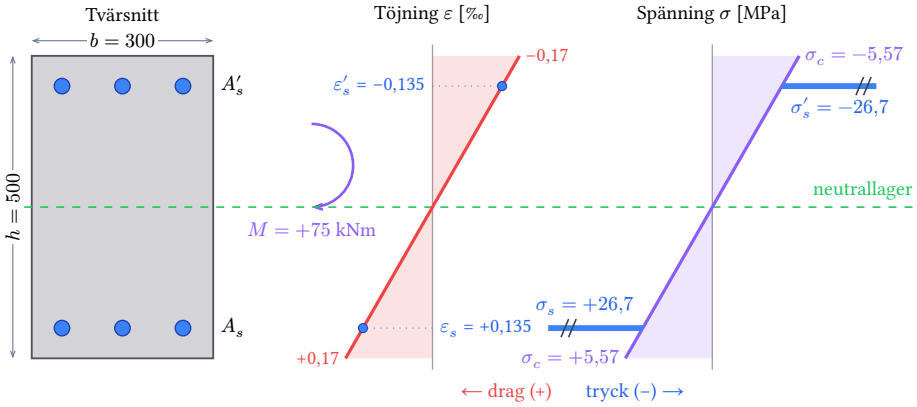
En lämplig metod att beakta såväl armeringens inverkan som böjsprickbildningen är att införa ett ekvivalent betongtvärsnitt (transformed cross-section) för vilket allmänna metoder direkt kan tillämpas. Detta diskuteras i nästa avsnitt.

2.1.3 Ekvivalent betongtvärsnitt

Enligt antagande 1), 2) och 4) införs att i ett tvärsnitt av homogent material även spänningsfördelningen är rätlinjig, och kan uttryckas som:

$$\sigma(z) = E \cdot \varepsilon(z) = E \cdot (a + b \cdot z) = a \cdot E + b \cdot E \cdot z = a' + b' \cdot z \tag{2.1}$$

Dock är det inte möjligt att direkt tillämpa denna modell på ett armerat betongtvärsnitt eftersom det består av två olika material med olika elasticitetsmoduler, vilket leder till ett språng i spänningsfördelningen vid armeringens nivå, se figur 2.3.

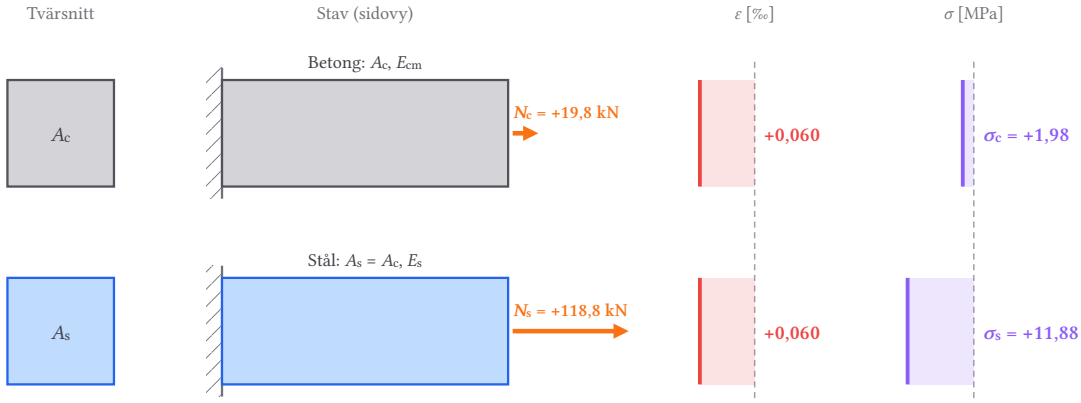


Figur 2.3 Töjning och spänning hos ett armerat betongtvärsnitt (stadium I)

För att övervinna detta problem kan en ekvivalent betongarea införas där armeringen omvandlas till en motsvarande betongarea som ger samma spänning vid samma töjning. Detta möjliggör att beräkningar kan utföras som om hela tvärsnittet var homogent, vilket förenklar analysen av spänningsfördelningen i både ospruckna och spruckna tvärsnitt, med användning av Naviers formel.

Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea

Betrakta två stavar av stål respektive betong med samma tvärsnittsarea $A = A_c$. Stavarna utsätts för dragbelastning så att de får samma töjning $\varepsilon_c = \varepsilon_s$, se figur 2.4.



Figur 2.4 Betong- och stålstav med samma area och töjning

Dragkraften i betongstaven kan beräknas som:

$$N_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot A_c = \sigma_c \cdot A_c \tag{2.2}$$

Dragkraften i stålstaven blir:

$$N_s = E_s \cdot \varepsilon_s \cdot A_c = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot \sigma_c \cdot A_c = \alpha \cdot \sigma_c \cdot A_c \tag{2.3}$$

där:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} \tag{2.4}$$

Men eftersom $\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c$, erhålls:

$$N_s = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot (\alpha \cdot A_c) \tag{2.5}$$

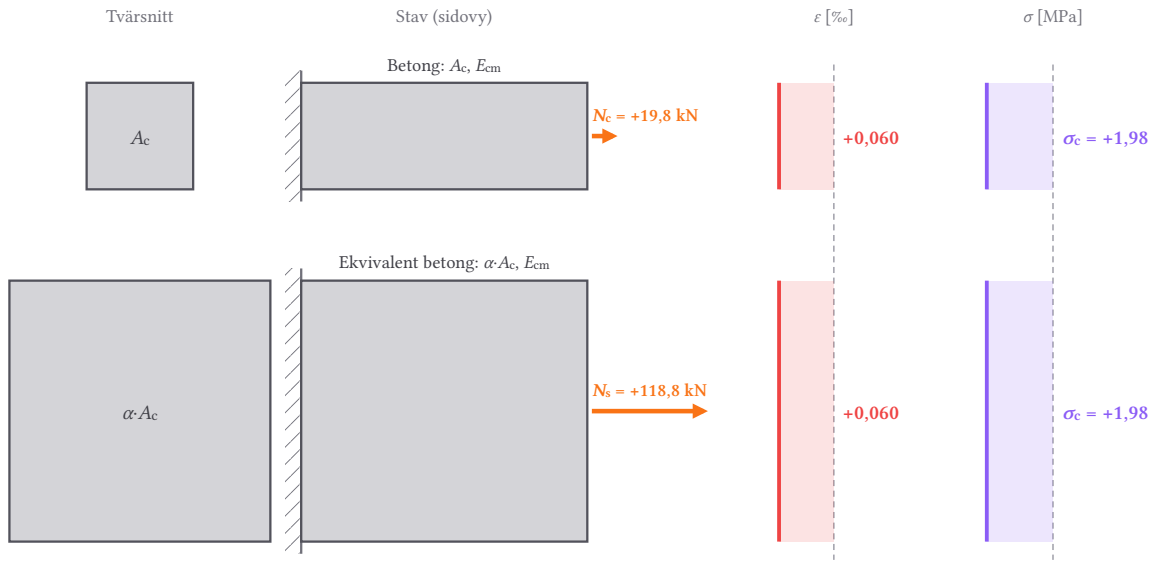
Stålspänningen fås genom:

$$\sigma_s = \frac{N_s}{A_c} = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot \alpha = \alpha \cdot \sigma_c \tag{2.6}$$

Genom att omvandla stålstavens area A_c till en ekvivalent betongarea $\alpha \cdot A_c$ uppnås att båda stavarna får samma spänning σ_c vid samma töjning ε — utan att den pålagda lasten förändras. Dock skiljer sig krafterna åt eftersom den omvandlade staven har α gånger större area:

$$N_s = \sigma_c \cdot (\alpha \cdot A_c) = \alpha \cdot N_c \tag{2.7}$$

Det omvandlade tvärsnittet får alltså samma spänning men en kraft som är α gånger större, se figur 2.5.



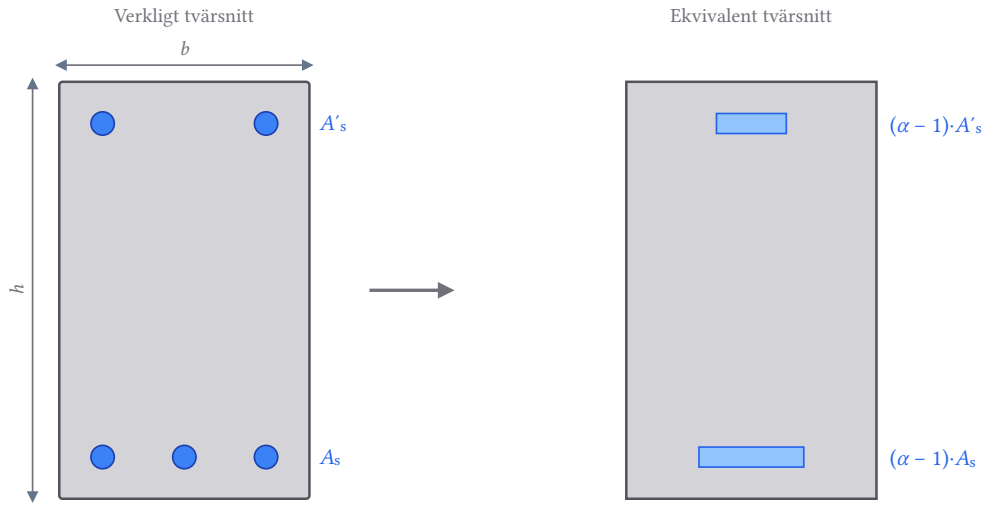
Figur 2.5 Omvandlat tvärsnitt — samma spänning, olika kraft

I konsekvens härmed kan en armeringsstång (reinforcement bar) i ett armerat betongtvärsnitt bytas ut mot en betongarea som är α gånger större varefter beräkningarna genomförs som om hela tvärsnittet består av betong. Detta är möjligt eftersom töjningarna i stål och betong är lika stora på samma nivå i tvärsnittet, enligt beräkningsantagande 2).

Stadium I (osprucket) — ekvivalent area:

$$A_I = A_c + (\alpha - 1)A'_s + (\alpha - 1)A_s \tag{2.8}$$

Figur 2.6 visar det verkliga och det omvandlade tvärsnittet i stadium I.

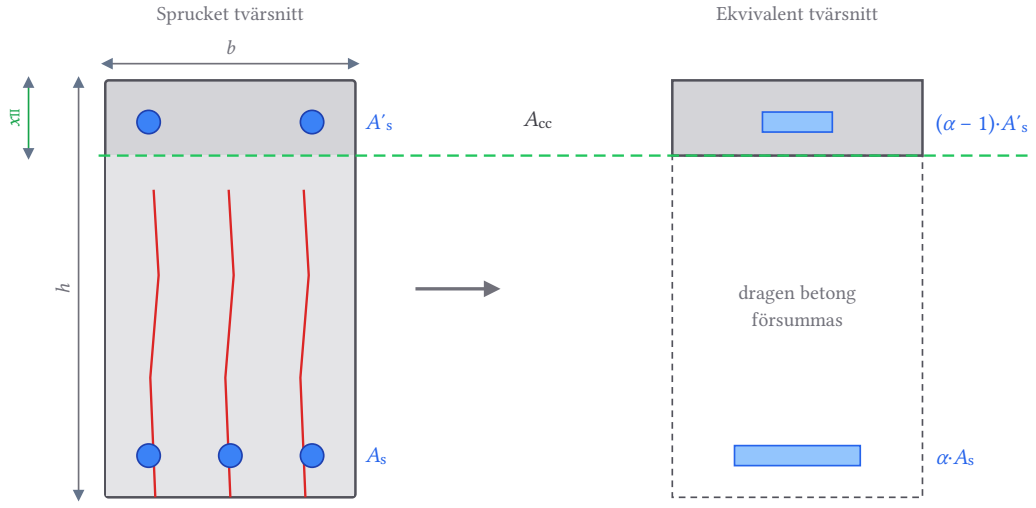


Figur 2.6 Verkligt och omvandlat tvärsnitt (stadium I)

Stadium II (böjsprucket) — ekvivalent area:

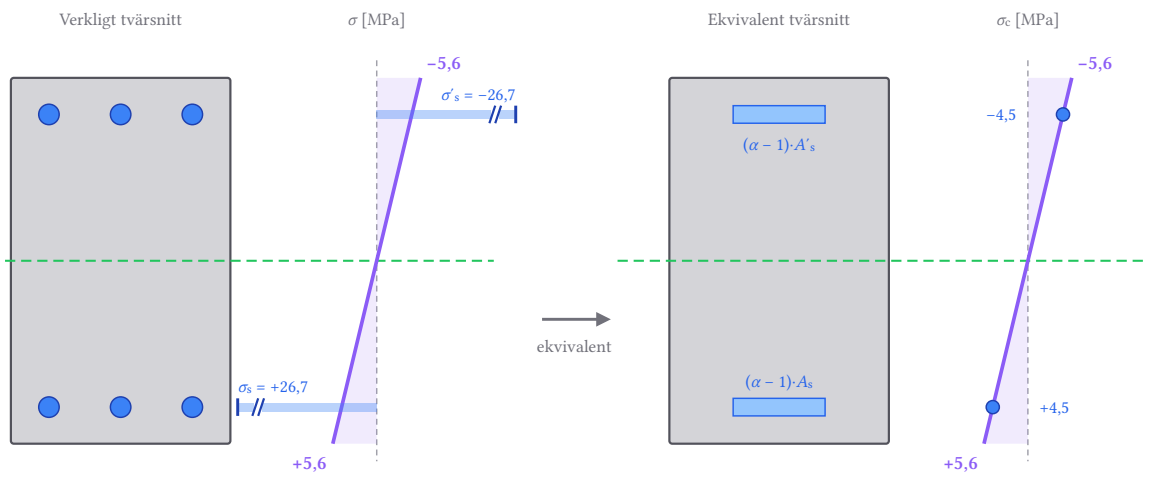
$$A_{II} = A_{cc} + (\alpha - 1)A'_s + \alpha \cdot A_s \tag{2.9}$$

där A_{cc} = tryckzonens bruttoarea. Motsvarande omvandling i stadium II visas i figur 2.7.



Figur 2.7 Sprucket och omvandlat tvärsnitt (stadium II, ren böjning)

I båda fallen, givet en rätlinjig töjningsfördelning över tvärsnittet, kommer spänningsfördelningen i det ekvivalenta betongtvärsnittet också att vara rätlinjig — d.v.s. $\sigma_c(z)$ varierar linjärt enligt $\sigma_c(z) = a + b \cdot z$. Stålspänningen erhålls genom $\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c$ vid armeringens nivå, se figur 2.8.



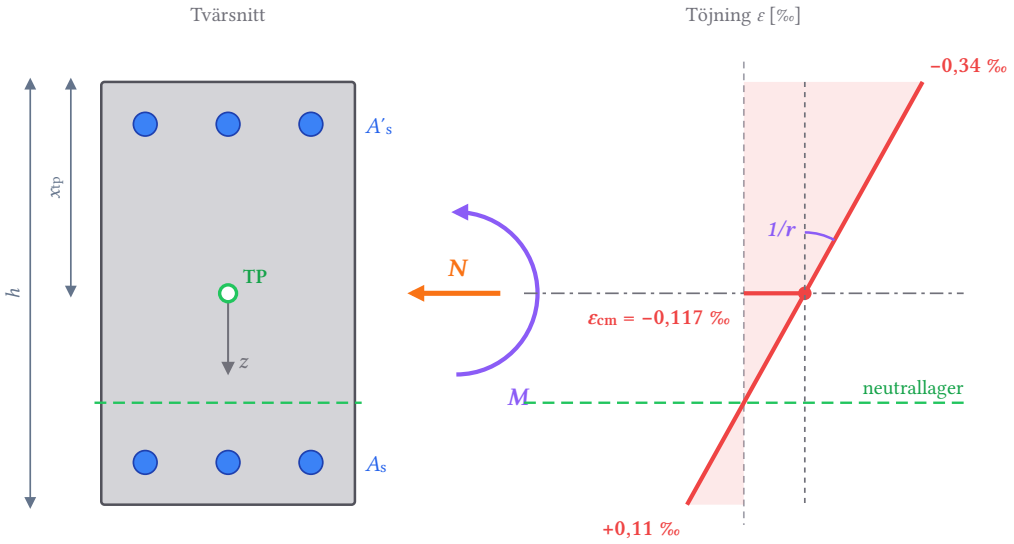
Figur 2.8 Omvandling till ekvivalent betongtvärsnitt — spänningsfördelning (ren böjning)

2.1.4 Spännings- och töjningsfördelning

Töjningsfördelningen karakteriseras av en medeltöjning ε_{cm} och en krökning, $1/r$, där ε_{cm} är töjningen i tvärsnittets tyngdpunkt (TP) och $1/r$ anger töjningsgradienten, d v s töjningskurvans lutning. Töjningen på en viss nivå z hos det ekvivalenta betongtvärsnittet kan uttryckas som:

$$\varepsilon_c(z) = \varepsilon_{cm} + \frac{1}{r} z \tag{2.10}$$

Tvärsnittets deformation och töjningsfördelningen visas i figur 2.9.



Figur 2.9 Tvärsnittets deformation och töjningsfördelning (M > 0, N < 0)

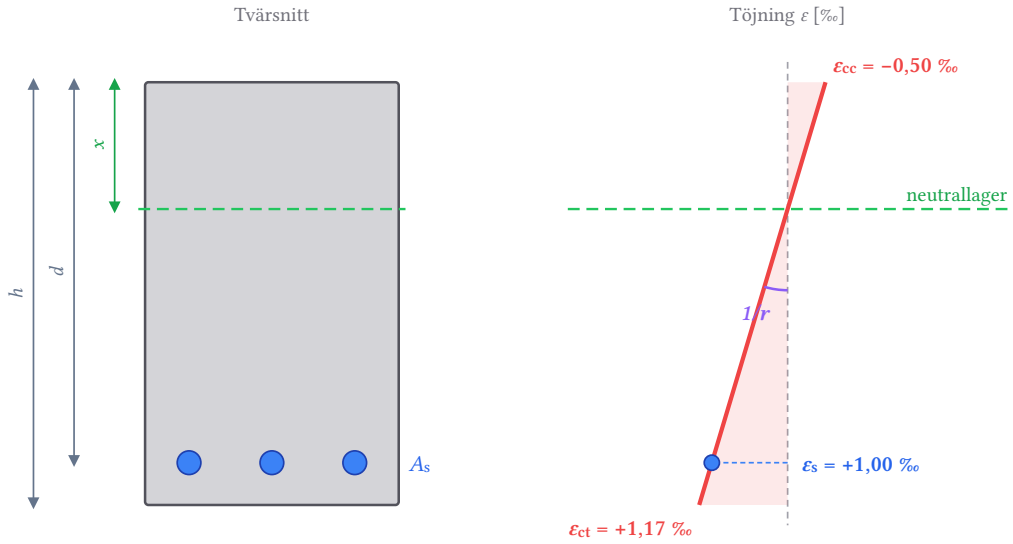
Vid tillämpning av detta uttryck är det lämpligt att ange töjningar med tecken varvid lägeskoordinaten z mäts från tvärsnittets tyngdpunkt positiv nedåt.

För ett tvärsnitt med given töjningsfördelning kan krökningen beräknas ur kända töjningsvärden och tvärsnittets geometri. I (2.11)–(2.12) avses töjningarnas belopp.

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{cc}}{x} = \frac{\varepsilon_{ct}}{h - x} = \frac{\varepsilon_{cc} + \varepsilon_{ct}}{h} \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_{cc} + \varepsilon_s}{d} \tag{2.12}$$

Sambandet mellan töjningsfördelning och krökning illustreras i figur 2.10.



Figur 2.10 Töjningsfördelning och krökning (M > 0, N = 0)

Naviers formel

Enligt antagande 1), 3) och 4), kan spänningarna i det ekvivalenta betongtvärsnittet uttryckas som:

$$\sigma_c(z) = a + b \cdot z \tag{2.13}$$

där a är den jämna delen och $b \cdot z$ är den linjärt varierande delen. Konstanterna a och b bestäms ur de två jämviktsvillkoren.

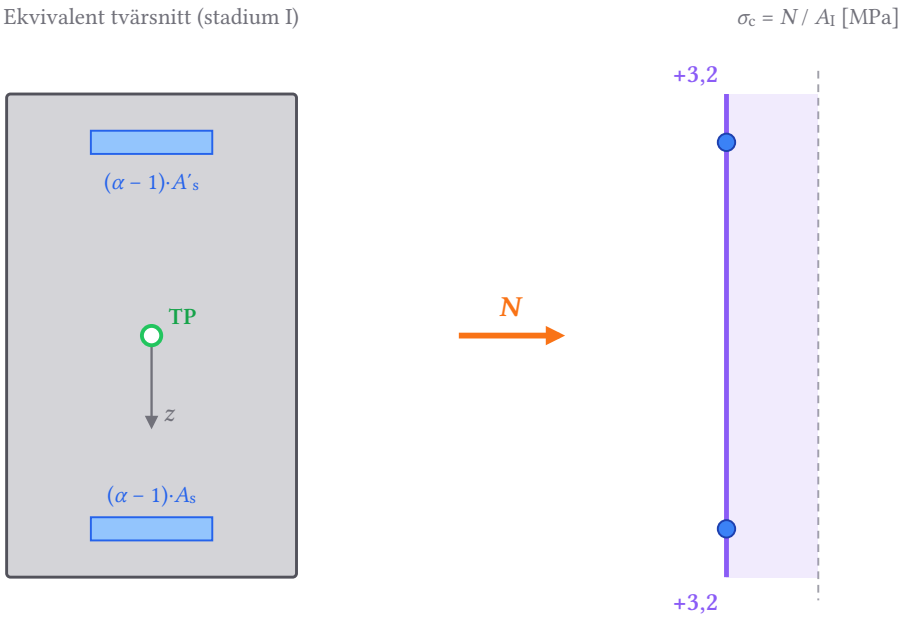
Horisontell jämvikt (summan av horisontella krafter = N):

$$\int_{A_{ekv}} \sigma_c \, dA = N \quad \Rightarrow \quad a \int_{A_{ekv}} dA + b \int_{A_{ekv}} z \, dA = N$$

Eftersom z mäts från det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt gäller $\int_{A_{ekv}} z \, dA = 0$, och därmed:

$$a \cdot A_{ekv} = N \quad \Rightarrow \quad a = \frac{N}{A_{ekv}} \tag{2.14}$$

Normalkraften ger alltså en jämnt fördelad spänning, se figur 2.11.



Figur 2.11 Jämnt fördelad normalspänning vid axiell last

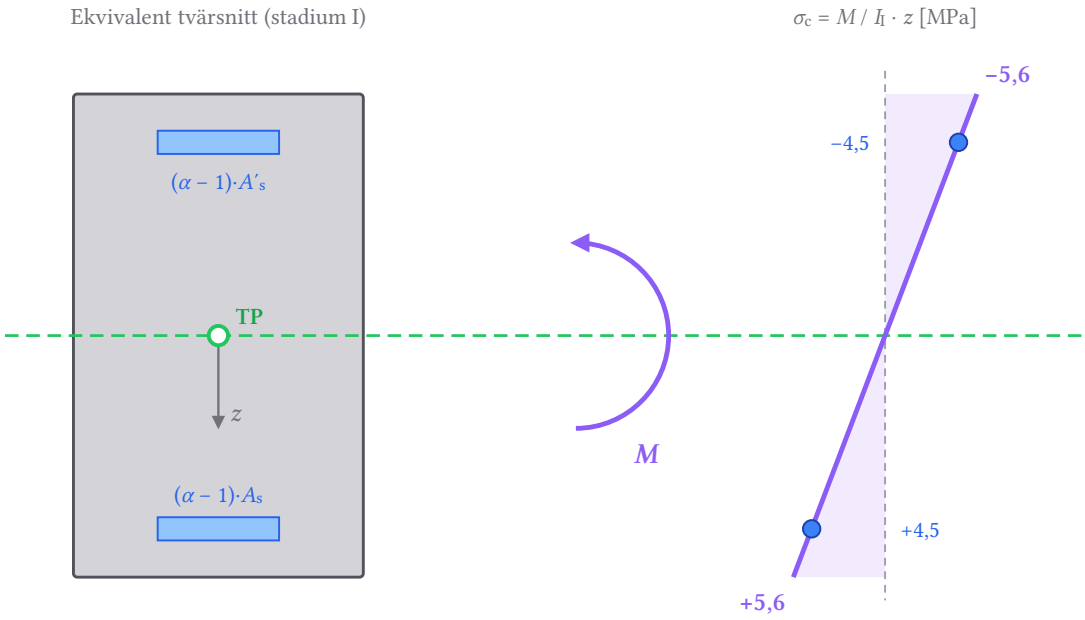
Momentjämvikt om tyngdpunkten (summan av moment = $M + N \cdot e$):

$$\int_{A_{ekv}} z \cdot \sigma_c \, dA = M + N \cdot e \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a \int_{A_{ekv}} z \, dA}_{=0} + b \int_{A_{ekv}} z^2 \, dA = M + N \cdot e$$

Uttrycket $\int_{A_{ekv}} z^2 \, dA$ utgör yttröghetsmomentet I_{ekv} för det ekvivalenta betongtvärsnittet, därför:

$$b \cdot I_{ekv} = M + N \cdot e \quad \Rightarrow \quad b = \frac{M + N \cdot e}{I_{ekv}} \tag{2.15}$$

Böjspänningsfördelningen i det ekvivalenta tvärsnittet visas i figur 2.12.



Figur 2.12 Böjspänningsfördelning i ekvivalent betongtvärsnitt (ren böjning)

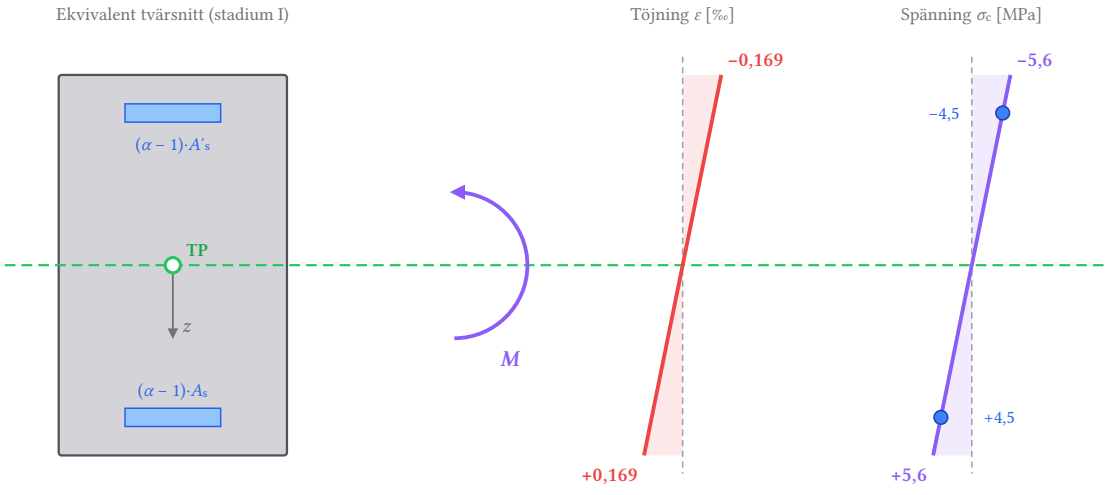
Införs (2.14) och (2.15) i (2.13) erhålls Naviers formel för kombinerad böjning och normalkraft:

$$\sigma_c(z) = \frac{N}{A_{ekv}} + \frac{N \cdot e + M}{I_{ekv}} z \tag{2.16}$$

där:

- A_{ekv}, I_{ekv} = tvärsnittskonstanter för ekvivalent betongtvärsnitt i *stadium I* eller *stadium II* (area och tröghetsmoment)
- z = avstånd från det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt positiv nedåt
- e = normalkraftens excentricitet i förhållande till det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt med tecken
- M = böjmomentet
- N = normalkraften

Figur 2.13 visar den rätlinjiga töjnings- och spänningsfördelningen i det omvandlade tvärsnittet vid kombinerad normalkraft och böjning.



Figur 2.13 Rätlinjig töjnings- och spänningsfördelning i omvandlat tvärsnitt (N + M)

Stålspänningen i godtyckligt armeringslager på avståndet z_s från det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt beräknas enligt

$$\sigma_s(z_s) = \alpha \cdot \sigma_c(z_s) \tag{2.17}$$

där $\sigma_c(z_s) = \frac{N}{A_{ekv}} + \frac{N \cdot e + M}{I_{ekv}} z_s$ beräknas enligt (2.16).

Om en spänningskontroll i tvärsnittets dragna kant visar att aktuellt sprickkriterium inte uppfylls måste tvärsnittet betraktas som böjsprucket. Endast betongtvärsnittets tryckzon kommer då att ingå i det ekvivalenta betongtvärsnittet jämte viktade armeringsareor.

Då Naviers formel tillämpas för lastfall med böjande moment och normalkraft ska bokens teckenkonvention (avsnitt 1.1.4) följas konsekvent:

> **Notera:**
> - Normalkraft N: positiv vid **drag**. I spänningsdiagram ritas drag till vänster.
> - Moment M: positivt när det ger **drag i underkant**.
> - Koordinaten z: mäts från tvärsnittets tyngdpunkt (för armerad betong det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt), positiv **nedåt**.
> - Excentriciteten e: normalkraftens avstånd från samma tyngdpunkt, positiv **nedåt**.
> - Spänningar och töjningar: positiva vid **drag**.

Krökning enligt Naviers formel

Från beräkningsantagande 1) och 4) gäller att spänningen i betongen är proportionell mot töjningen, så Naviers formel kan skrivas som:

$$\varepsilon_c(z) = \frac{N}{A_{ekv} \cdot E_{cm}} + \frac{N \cdot e + M}{I_{ekv} \cdot E_{cm}} z \tag{2.18}$$

För tyngdpunktsnivån är z = 0. Av en jämförelse med följande ekvation framgår att töjningen på tyngdpunktens nivå motsvarar medeltöjningen ε_{cm}, och att andra termen i uttrycket utgör krökningens bidrag till töjningen.

$$\varepsilon_c(z) = \varepsilon_{cm} + \frac{1}{r} z \tag{2.10}$$

Därför blir krökningen vid kombinerad böjning och normalkraft:

$$\frac{1}{r} = \frac{N \cdot e + M}{E_{cm} \cdot I_{ekv}} \tag{2.19}$$

Och krökningen vid ren böjning ($N = 0$) uttrycks som:

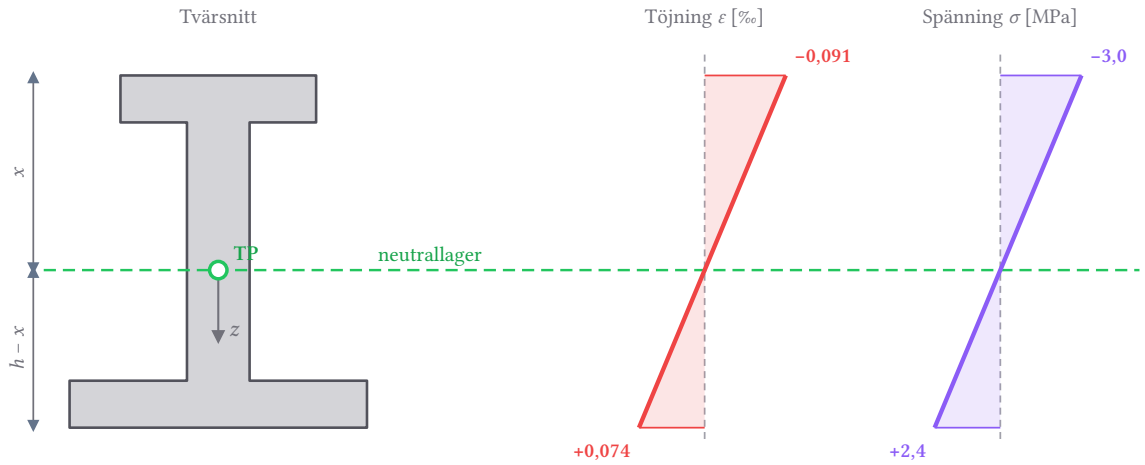
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_{ekv}} \tag{2.20}$$

Genom formuleringen med ekvivalenta betongtvärsnitt blir uttrycken av samma typ som generellt gäller vid tillämpning av elasticitetsteori. Dock, i armerade betongkonstruktioner har sprickbildning, krypning och krympning betydande inverkan på tvärsnittets spännings- och töjningsfördelning.

2.2 Korttidsrespons - ren böjning

2.2.1 Osprucket oarmerat tvärsnitt - Stadium I

Betrakta ett osprucket betongtvärsnitt som endast belastas med ett böjande moment. Enligt förutsättningarna i föregående avsnitt varierar både töjningar (*strain*) och spänningar (*stress*) rätlinjigt över tvärsnittet, se figur 2.14.

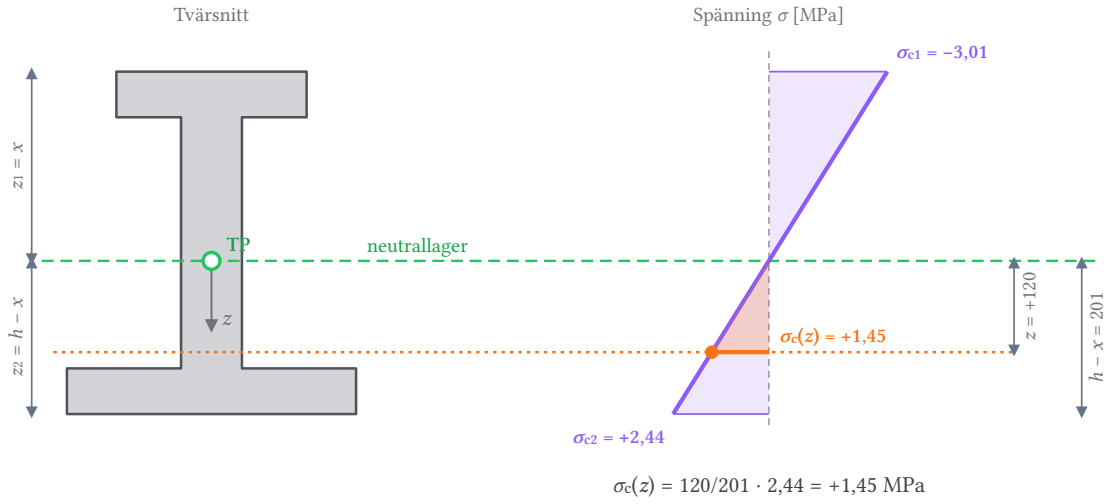


Figur 2.14 Oarmerat I-tvärsnitt — töjning och spänning vid ren böjning

Därför kan betongspänningen på en viss nivå z i tvärsnittet uttryckas som:

$$\sigma_c(z) = \frac{z}{h - x} \cdot \sigma_{c2} \tag{2.21}$$

där σ_{c2} är betongspänningen i det nedre fiberlagret. z distans som mäts från neutrala lagret positiv nedåt. Spänningsfördelningen visas i figur 2.15.

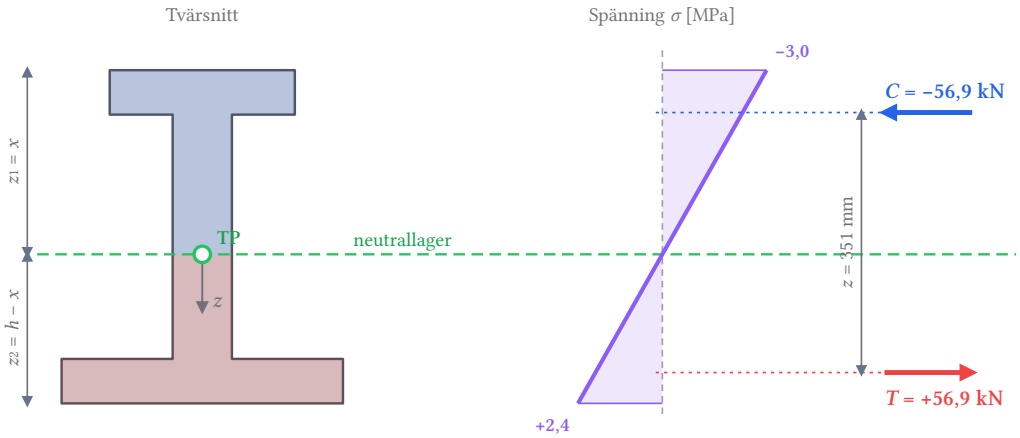


Figur 2.15 Spänningsfördelning och ekvation (2.21)

Horisontell jämvikt i tvärsnittet ger:

$$\int_{-z_1}^{0} \sigma_c(z)\, dA + \int_{0}^{z_2} \sigma_c(z)\, dA = 0 \Rightarrow \int_{-z_1}^{z_2} \sigma_c(z)\, dA = 0 \tag{2.22}$$

Tryck- och dragresultanten måste alltså vara lika stora, se figur 2.16.

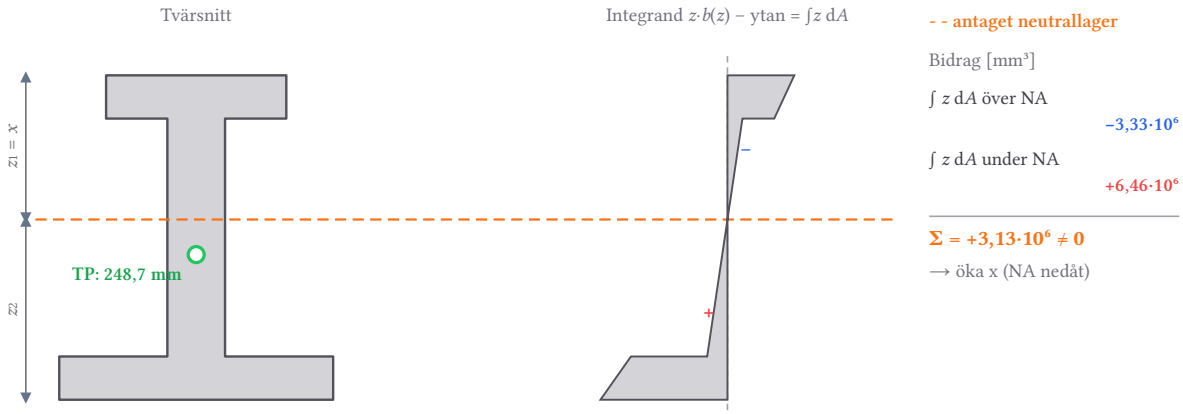


Figur 2.16 Horisontell jämvikt — tryck- och dragresultant

Införs uttrycket (2.21) för betongspänningen fås

$$\frac{\sigma_{c2}}{h-x}\int_{-z_1}^{z_2} z\,dA = 0 \Rightarrow \int_{-z_1}^{z_2} z\,dA = 0 \tag{2.23}$$

Vilket innebär att neutrala lagret sammanfaller med tvärsnittets tyngdpunkt. Neutrala lagrets läge kan således bestämmas med hjälp av en tyngdpunktsekvation för tvärsnittet, se figur 2.17.



Figur 2.17 ∫z dA = 0 — neutrala lagret sammanfaller med tyngdpunkten

Spänningar och krökning

Spänningarna i tvärsnittet kan beräknas med hjälp av Naviers formel, när N och e är lika med noll:

$$\sigma_c(z) = \frac{M}{I}z \tag{2.24}$$

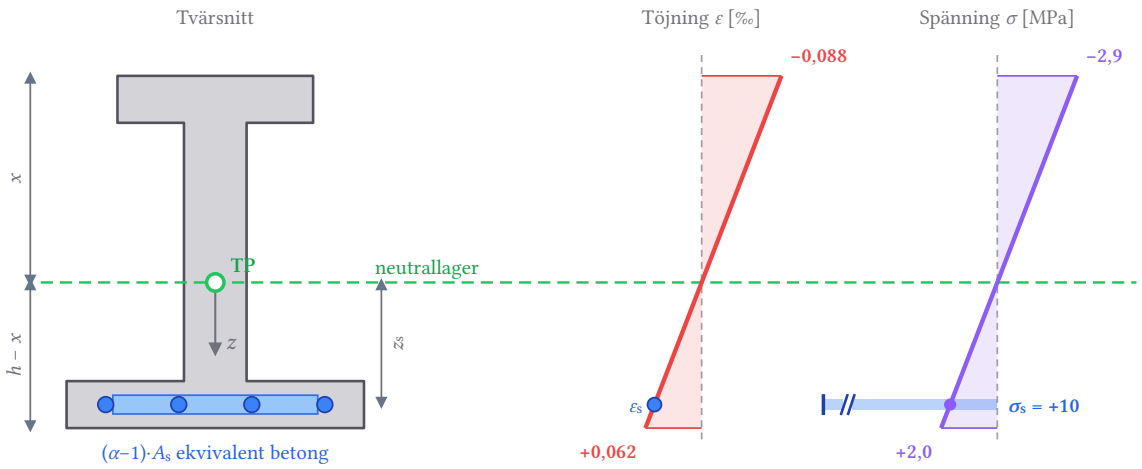
Krökningen i tvärsnittet kan beräknas som:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{cm}I} \tag{2.25}$$

där I är tvärsnittets yttröghetsmoment. E_{cm} är betongens elasticitetsmodul. $\sigma_c(z)$ är betongspänningen på grund av momentet M.

2.2.2 Osprucket armerat tvärsnitt - Stadium I

Ett enkelarmerat betongtvärsnitt belastas genom ren böjning. Tvärsnittet förutsätts osprucket (uncracked). Armeringen med en total tvärsnittsarea A_s är placerad i ett lager inom dragen zon på nivån z_s från neutrala lagret, där $z_s = d - x$. Spänningsfördelningen hos det ekvivalenta betongtvärsnittet beräknas genom att töjningsfördelningen multipliceras med elasticitetsmodulen (modulus of elasticity) för betong, se figur 2.18.



Figur 2.18 Armerat I-tvärsnitt (Stadium I) — töjning och spänning vid ren böjning

Som i tidigare avsnitt, kan betongspänningen på en viss nivå z i tvärsnittet uttryckas som:

$$\sigma_c(z) = \frac{z}{h-x} \cdot \sigma_{c2} \tag{2.26}$$

där σ_{c2} är betongspänningen i det nedre fiberlagret. z distans som mäts från neutrala lagret positiv nedåt.

På armeringens nivå, z_s, kan stålspänningen beräknas som:

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(z_s) = \alpha \cdot \frac{z_s}{h-x} \cdot \sigma_{c2} \tag{2.27}$$

där α är elasticitetsmodulsförhållandet mellan stål och betong, $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}}$

Horisontell jämvikt i tvärsnittet beskrivs som summan av de horisontella krafterna i tvärsnittet lika med noll. De horisontella krafterna i tvärsnittet består av:

- Drag i betongen: $\int_0^{z_2} \sigma_c(z)\,dA - \sigma_c(z_s) \cdot A_s$ när dras bort bidragen från de delar av tvärsnittet där armeringen är placerad
- Drag i armeringen: $\sigma_s \cdot A_s$
- Tryck i betongen: $\int_{-z_1}^{0} \sigma_c(z)\,dA$

Vilket ger:

$$\int_{-z_1}^{0} \sigma_c(z)\,dA + \int_0^{z_2} \sigma_c(z)\,dA - \sigma_c(z_s) \cdot A_s + \sigma_s \cdot A_s = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-z_1}^{z_2} \sigma_c(z)\,dA - \sigma_c(z_s) \cdot A_s + \sigma_s \cdot A_s = 0 \tag{2.28}$$

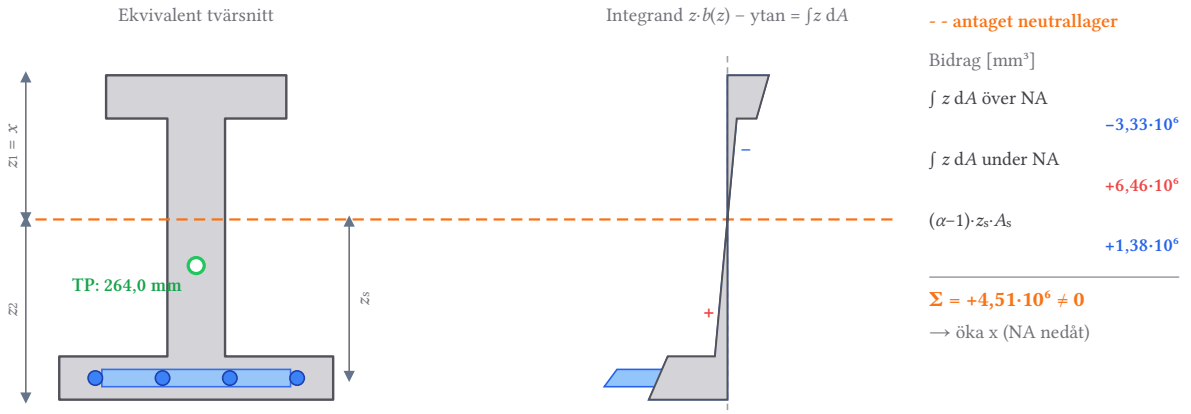
där $z_1 = x$ och $z_2 = h - x$ är avstånden från neutrala lagret till tvärsnittets över- respektive underkant.

Införs uttrycket (2.26) för betongspänningen och (2.27) för stålspänningen fås

$$\frac{\sigma_{c2}}{h-x} \int_{-z_1}^{z_2} z\,dA - \frac{\sigma_{c2} \cdot z_s}{h-x} \cdot A_s + \alpha \cdot \frac{\sigma_{c2} \cdot z_s}{h-x} \cdot A_s = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_{c2}}{h-x} \cdot \left[\int_{-z_1}^{z_2} z\,dA + (\alpha - 1) \cdot z_s \cdot A_s \right] = 0 \Rightarrow \int_{-z_1}^{z_2} z\,dA + (\alpha - 1) \cdot z_s \cdot A_s = 0 \tag{2.29}$$

Detta uttryck kan tolkas som en tyngdpunktsekvation för ett ekvivalent betongtvärsnitt. För ett ekvivalent betongtvärsnitt som definieras på detta sätt kommer, enligt (2.29), neutrala lagret att sammanfalla med det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt. Neutrala lagrets läge kan således bestämmas med hjälp av en tyngdpunktsekvation för det ekvivalenta tvärsnittet, se figur 2.19.



Figur 2.19 ∫z dA + (α−1)·zs·As = 0 — neutrala lagret för ekvivalent tvärsnitt

Det ekvivalenta tvärsnittets area beräknas enligt:

$$A_{ek} = A_c + (\alpha - 1) \cdot A_s \tag{2.30}$$

där A_c är betongtvärsnittets area och A_s är armeringens area.

Spänningar och krökning

Spänningarna i tvärsnittet kan beräknas på samma sätt som i tidigare avsnitt med hjälp av Naviers formel:

$$\sigma_c(z) = \frac{M}{I_I} z \tag{2.31}$$

där I_I är yttröghetsmomentet för det ekvivalenta betongtvärsnittet i stadium I.

Stålspänningen på grund av moment beräknas genom att betongspänningen på armeringens nivå multipliceras med faktorn α:

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(z_s) \tag{2.32}$$

där $\sigma_c(z_s)$ är betongspänningen på armeringens nivå enligt (2.31).

Krökningen i tvärsnittet kan beräknas som:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{cm} I_I} \tag{2.33}$$

där E_{cm} är betongens elasticitetsmodul.

Armeringen har som regel liten inverkan på tvärsnittskonstanterna i stadium I. Approximativt kan tvärsnittskonstanterna beräknas för bruttotvärsnitt utan hänsyn till armeringen.

Tvärsnittskonstanter för ekvivalenta betongtvärsnitt

Exempelvis för ett **rektangulärt** tvärsnitt med tryck- och dragarmering erhålls:

- Tyngdpunktsekvation:

$$x = x_{tp} \Rightarrow \frac{b \cdot h^2}{2} + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot d' + (\alpha - 1) \cdot A_s \cdot d = A_I \cdot x \Rightarrow x$$

$$x \approx x_{betong}$$

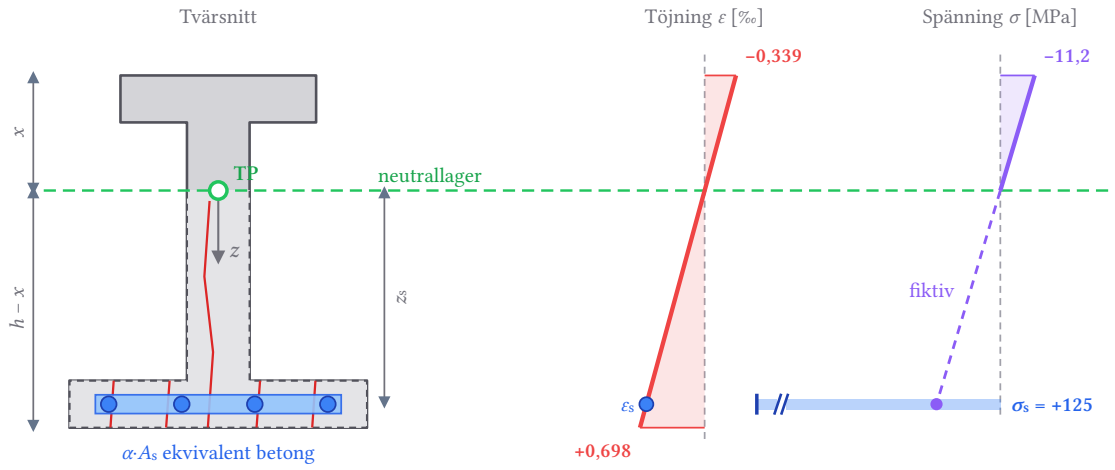
- Area och tröghetsmoment för ekvivalent betongtvärsnitt:

$$A_I = b \cdot h + (\alpha - 1) \cdot A_s + (\alpha - 1) \cdot A'_s \approx A_c$$

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + (\alpha - 1) \cdot A_s \cdot (d - x)^2 + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot (x - d')^2 \approx I_c$$

2.2.3 Sprucket armerat tvärsnitt - Stadium II

Ett enkelarmerat betongtvärsnitt belastas genom ren böjning. Tvärsnittet förutsätts böjsprucket varvid, enligt beräkningsantagande 3), inverkan av dragen betong skall försummas. Armeringen med en total tvärsnittsarea A_s är placerad i ett lager inom dragen zon på nivån z_s från neutrala lagret, där $z_s = d - x$. Spänningsfördelningen hos det ekvivalenta betongtvärsnittet beräknas genom att töjningsfördelningen multipliceras med elasticitetsmodulen (modulus of elasticity) för betong. Under neutrala lagret beräknas "fiktiva" betongspänningar, se figur 2.20.



Figur 2.20 Armerat I-tvärsnitt (Stadium II) — töjning och spänning vid ren böjning

Betongspänningen på en viss nivå z kan liksom tidigare uttryckas som:

$$\sigma_c(z) = \frac{z}{h - x} \cdot \sigma_{c2} \tag{2.34}$$

där σ_{c2} är betongspänningen i det nedre fiberlagret. z distans som mäts från neutrala lagret positiv nedåt.

På armeringens nivå, z_s, kan stålspänningen beräknas som:

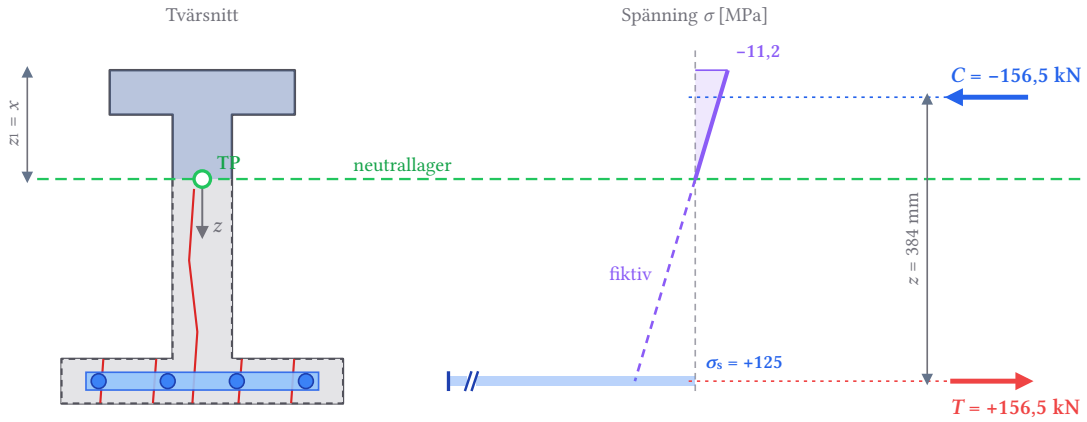
$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(z_s) = \alpha \cdot \frac{z_s}{h - x} \cdot \sigma_{c2} \tag{2.35}$$

där α är elasticitetsmodulsförhållandet mellan stål och betong, $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}}$

Jämviktsvillkoret att tryckresultanten skall vara lika stor som dragresultanten kan nu uttryckas som:

$$\int_{-z_1}^{0} \sigma_c(z)\, dA + \alpha \cdot \sigma_c(z_s) \cdot A_s = 0 \tag{2.36}$$

där z_1 är avstånd från neutrallager till tryckt kant. Tryckresultanten i betongen och dragresultanten i armeringen visas i figur 2.21.



Figur 2.21 Horisontell jämvikt (Stadium II) — tryckresultant C och dragresultant T i armering

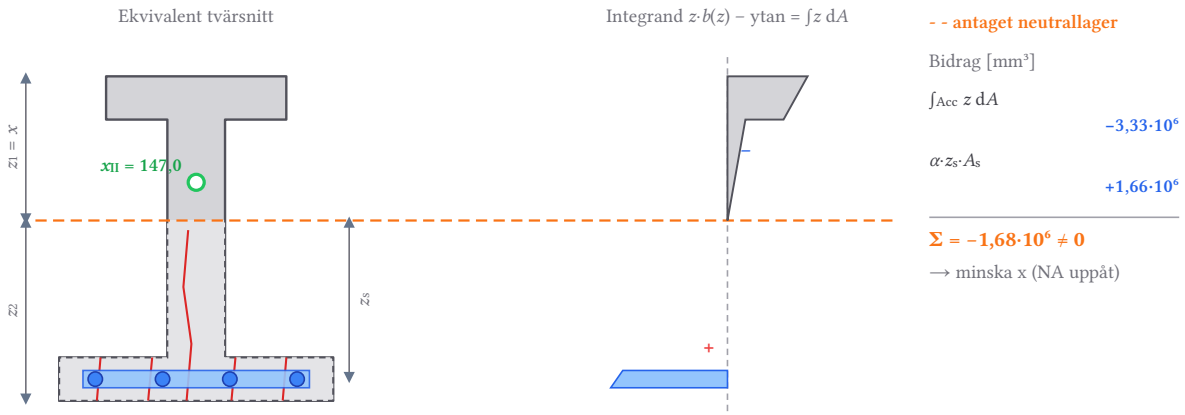
Införs uttrycket (2.34) för betongspänningen och (2.35) för stålspänningen fås:

$$\frac{\sigma_{c2}}{h-x}\int_{A_{cc}} z\,dA + \alpha\cdot\frac{z_s}{h-x}\cdot\sigma_{c2}\cdot A_s = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{c2}}{h-x}\left[\int_{A_{cc}} z\,dA + \alpha\cdot z_s\cdot A_s\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{A_{cc}} z\,dA + \alpha\cdot z_s\cdot A_s = 0 \tag{2.37}$$

där A_{cc} är betongens tryckzon.

Detta uttryck kan tolkas som en tyngdpunktsekvation för ett ekvivalent betongtvärsnitt bestående av tvärsnittets tryckzon samt armeringsarean viktad med faktorn α. För ett ekvivalent betongtvärsnitt som definieras på detta sätt kommer, enligt (2.37), neutrala lagret att sammanfalla med det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt. Neutrala lagrets läge kan således bestämmas med hjälp av en tyngdpunktsekvation för det ekvivalenta betongtvärsnittet, se figur 2.22.



Figur 2.22 ∫z dA + α·zs·As = 0 — neutrala lagret för ekvivalent tvärsnitt (Stadium II)

Spänningar och krökning

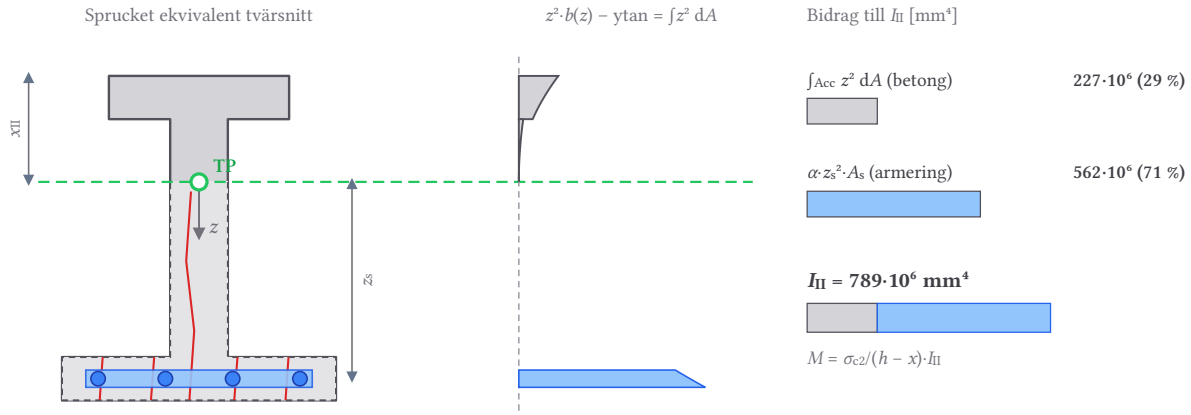
Även om tvärsnittet är sprucket tillämpas Naviers formel och kan utledas från momentjämviktsvillkoret från neutrala lagret läget:

$$M = \int_{A_{cc}} z\cdot\sigma_c(z)\,dA + \alpha\cdot z_s\cdot A_s\cdot\sigma_c(z_s) \tag{2.38}$$

Införs uttrycket (2.34) för betongspänningen och (2.35) för stålspänningen fås:

$$M = \frac{\sigma_{c2}}{h-x}\left[\int_{A_{cc}} z^2\, dA + \alpha \cdot z_s^2 \cdot A_s\right] \tag{2.39}$$

Uttrycket inom hakparentesen är det ekvivalenta tvärsnittets yttröghetsmoment i stadium II, se figur 2.23.



Figur 2.23 $I_{II} = \int z^2\, dA + \alpha \cdot z_s^2 \cdot A_s$ – yttröghetsmomentet för det ekvivalenta tvärsnittet (stadium II)

Uttrycket inom hakparentesen utgör yttröghetsmomentet (moment of inertia) för det ekvivalenta betongtvärsnittet i stadium II från tvärsnittets tyngdpunkt. Momentet kan således uttryckas som:

$$M = \frac{\sigma_{c2}}{h-x} \cdot I_{II} \tag{2.40}$$

där I_{II} är yttröghetsmomentet för det ekvivalenta betongtvärsnittet i stadium II.

Detta är dock liktydigt med Naviers formel för samband mellan moment och kantspänning. Införs uttrycket (2.34) i (2.40) fås att betongspänningar och krökning på grund av moment kan beräknas med hjälp av Naviers formel för det ekvivalenta betongtvärsnittet hos en böjsprucken sektion:

$$\sigma_c(z) = \frac{M}{I_{II}} z \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_{cm} I_{II}} \tag{2.42}$$

där I_{II} är yttröghetsmomentet för det ekvivalenta betongtvärsnittet i stadium II.

Stålspänningen på grund av moment beräknas genom att betongspänningen på armeringens nivå multipliceras med faktorn α:

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(z_s) \tag{2.43}$$

där $\sigma_c(z_s)$ är betongspänningen på armeringens nivå enligt (2.41).

Tvärsnittskonstanter för ekvivalenta betongtvärsnitt

Exempelvis för ett **rektangulärt** tvärsnitt med tryck- och dragarmering erhålls:

- Tyngdpunktsekvation:

$$x = x_{tp} \Rightarrow \frac{b \cdot x^2}{2} + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot (x - d') = \alpha \cdot A_s \cdot (d - x) \Rightarrow x$$

- Area och tröghetsmoment för ekvivalent betongtvärsnitt:

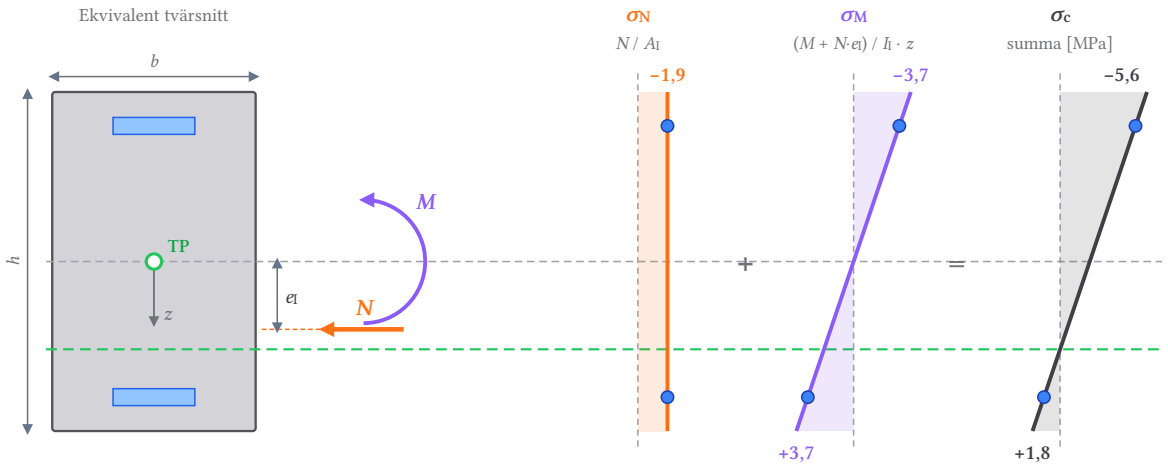
$$A_{II} = b \cdot x + \alpha \cdot A_s + (\alpha - 1) \cdot A'_s$$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \alpha \cdot A_s \cdot (x-d)^2 + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot (x-d')^2$$

2.3 Korttidsrespons - Inverkan av normalkraft

2.3.1 Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt

För ett osprucket tvärsnitt som belastas med både böjning och normalkraft, där normalkraften angriper eller inte i det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt, kan spänningsfördelningen beräknas genom att lösningarna för respektive lastandel superponeras, se figur 2.24:



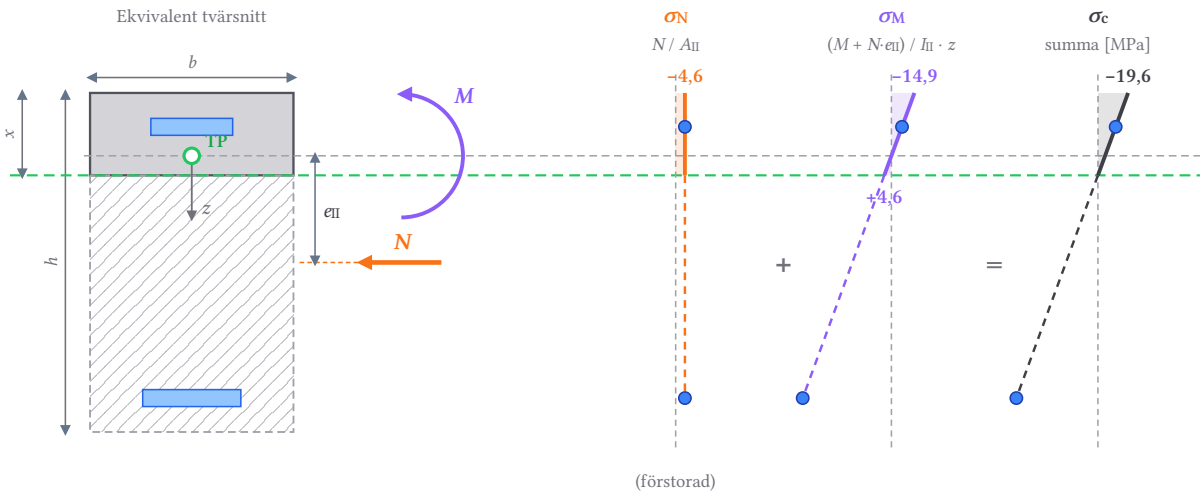
Figur 2.24 Spänningssuperposition – normalkraft och böjmoment

Enligt tidigare avsnitt kommer normalkraften att ge en jämnt fördelad spänning över tvärsnittet, medan böjmomentet ger en linjärt varierande spänning med $\sigma_c(x_{tp}) = 0$ i det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt. Det bör observeras att vid böjning med normalkraft kommer neutrallagret, d v s den linje där spänningarna är noll, ej att gå genom det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt. Detta gäller däremot för den del av spänningarna σ_{cm} som beror på det böjande momentet. Tryckzonshöjden kan således i detta fall inte bestämmas med hjälp av en tyngdpunktsekvation.

2.3.2 Böjning med normalkraft - böjspruckna tvärsnitt

För ett böjsprucket tvärsnitt som belastas med både böjning och normalkraft, kommer också erhållas att neutrallagrets läge och tyngdpunkt för det ekvivalenta betongtvärsnittet inte sammanfaller. Detta gäller både för den del av spänningarna som beror på det böjande momentet och den del som beror på normalkraften. Faktiskt, pga att för böjspruckna tvärsnitt skall dragen betong under neutrala lagret försummas, beror neutrallagrets läge på den aktuella spänningsfördelningen vilken är obekant i analysen. Detta innebär att det ekvivalenta betongtvärsnittets storlek inte är känd då analysen skall påbörjas. Det är dock möjligt att lösa problemet genom ett iterativt förfarande med hjälp av Naviers formel. Superpositionen för ett böjsprucket tvärsnitt visas i figur 2.25.

Armeringen räknas in i det ekvivalenta tvärsnittet med olika vikt beroende på var den ligger, se ekv. (2.9). Ligger den i tryckzonen sitter den i betong som redan räknas med, och därför läggs bara $(\alpha - 1)A'_s$ till. Ligger den i den spruckna zonen räknas betongen runt den inte, och hela αA_s läggs till. Därför ritas armeringslagren olika breda i figur 2.25, och ett lager som hamnar på andra sidan neutrallagret när lasten ändras byter vikt.



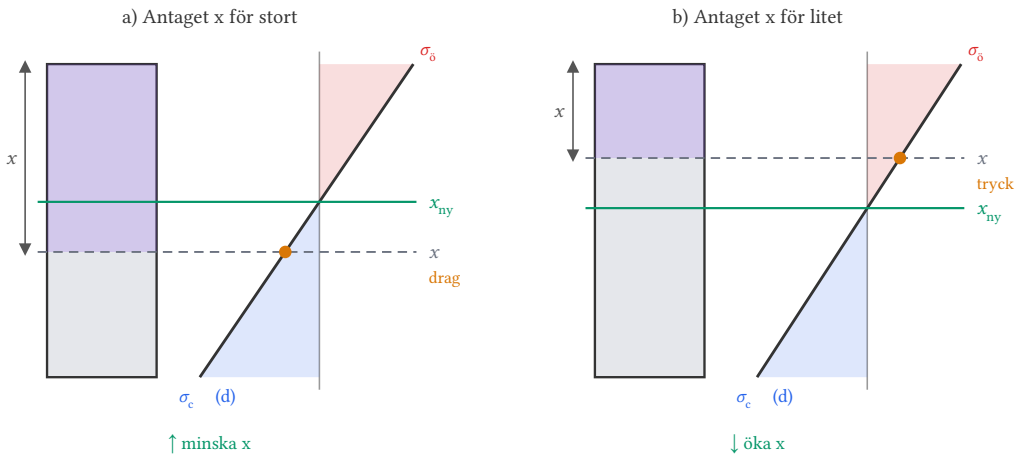
Figur 2.25 Spänningssuperposition – böjsprucket tvärsnitt (stadium II)

2.3.3 Iterativ analys med hjälp av Naviers formel

Eftersom det ekvivalenta tvärsnittet inte är känt då analysen påbörjas måste spänningarna beräknas genom iteration.

1. **Gissa** tryckzonens höjd x.
2. **Beräkna tvärsnittskonstanterna** för det ekvivalenta betongtvärsnittet med tryckzonen x: A_{II} enligt ekv. (2.9), där A_{cc} är tryckzonens bruttoarea, tyngdpunktens läge x_{tp}, normalkraftens excentricitet e i förhållande till x_{tp} och yttröghetsmomentet I_{II} kring tyngdpunkten.
3. **Beräkna betongspänningen** med Naviers formel ekv. (2.16) i det antagna neutrallagret, det vill säga för $z = x - x_{tp}$.
4. **Jämför.** Är $\sigma_c(x - x_{tp}) = 0$ var antagandet rätt. Annars uppskattas ett nytt x enligt nedan, och beräkningen upprepas från steg 2.
5. **När rätt x har hittats** beräknas spänningarna med ekv. (2.16) och, för armeringen, ekv. (2.17).

Figur 2.26 visar de två fall som kan uppstå. Om spänningen i det antagna neutrallagret är **drag** var x för stort, och tryckzonen ska bli mindre. Om den är **tryck** var x för litet. Den beräknade spänningsfördelningen är linjär, och där den skär noll ligger en bättre uppskattning x_{ny}.



Figur 2.26 Uppdatering av tryckzonens höjd i iterationen. a) Antaget x för stort: dragspänning i det antagna neutrallagret. b) Antaget x för litet: tryckspänning. Den nya uppskattningen x_{ny} ligger där den beräknade spänningen är noll.

Nollpunkten kan bestämmas på två sätt, som ger samma resultat eftersom spänningen är linjär:

- **Likformiga trianglar.** Med betongspänningen i överkant, $\sigma_{ö}$, och den fiktiva betongspänningen i armeringens nivå, $\sigma_c(d)$, ger likformiga trianglar

$$x_{ny} = d \cdot \frac{|\,\sigma_{ö}|}{|\,\sigma_{ö}| + \sigma_c(d)} \tag{2.44}$$

- **Naviers formel lika med noll.** Sätts ekv. (2.16) lika med noll fås avståndet z_0 från tyngdpunkten till nollpunkten direkt:

$$z_0 = -\frac{N/A_{II}}{(M + Ne)/I_{II}}, \qquad x_{ny} = x_{tp} + z_0 \tag{2.45}$$

Eftersom tvärsnittskonstanterna ändras med x blir x_{ny} inte exakt rätt efter första steget, men iterationen konvergerar snabbt. Två eller tre steg räcker oftast, se exempel 2.1.

Exempel 2.1 Iteration av tryckzonens höjd

Tvärsnittet 300×500 mm har 3 $\phi 16$ i över- och underkant ($A'_s = A_s = 603$ mm²), med tyngdpunkterna 50 mm från kanterna ($d' = 50$ mm, $d = 450$ mm). Det belastas med normalkraften $N = -200$ kN (tryck) i halva höjden och momentet $M = 120$ kNm. Med $\alpha = 6$ ska tryckzonens höjd x och spänningarna bestämmas. Det är tvärsnittet i figur 2.25.

Första gissning. Anta $x = 150$ mm.

Tvärsnittskonstanter. Tryckarmeringen ligger i tryckzonen och dragarmeringen i den spruckna zonen:

$$A_{II} = 300 \cdot 150 + 5 \cdot 603 + 6 \cdot 603 = 51\,635 \text{mm}^2$$

Tyngdpunkten hamnar på $x_{tp} = 99{,}8$ mm under överkant och $I_{II} = 563{,}4 \cdot 10^6$ mm⁴. Normalkraften angriper i halva höjden, så $e = 250 - 99{,}8 = 150{,}2$ mm.

Spänningen i det antagna neutrallagret. ekv. (2.16) ger

$$\sigma_c(z) = \frac{-200 \cdot 10^3}{51\,635} + \frac{120 \cdot 10^6 - 200 \cdot 10^3 \cdot 150{,}2}{563{,}4 \cdot 10^6}\, z = -3{,}87 + 0{,}160\, z \text{ MPa}$$

och för $z = 150 - 99{,}8 = 50{,}2$ mm blir $\sigma_c = +4{,}14$ MPa. Det är drag, så x var för stort, som i figur 2.26a.

Ny uppskattning med likformiga trianglar. I överkant ($z = -99{,}8$ mm) är $\sigma_{ö} = -19{,}8$ MPa, och i armeringens nivå ($z = 350{,}2$ mm) är $\sigma_c(d) = 52{,}0$ MPa. Ekv. (2.44) ger

$$x_{ny} = 450 \cdot \frac{19{,}8}{19{,}8 + 52{,}0} = 124{,}1 \text{ mm}$$

Samma sak med Naviers formel. ekv. (2.45) ger

$$z_0 = \frac{3{,}87}{0{,}160} = 24{,}3 \text{ mm}, \qquad x_{ny} = 99{,}8 + 24{,}3 = 124{,}1 \text{ mm}$$

Andra och tredje steget. Med $x = 124{,}1$ mm blir $A_{II} = 43\,860$ mm², $x_{tp} = 93{,}2$ mm och $I_{II} = 550{,}3 \cdot 10^6$ mm⁴. Spänningen i det antagna neutrallagret är nu bara $+0{,}41$ MPa, och den nya uppskattningen blir $x = 121{,}5$ mm. Ett tredje steg ger samma värde, så

$$x = 121{,}5 \text{ mm}$$

Spänningar. Med $x_{tp} = 92{,}7$ mm, $e = 157{,}3$ mm och $I_{II} = 549{,}6 \cdot 10^6$ mm⁴ blir betongspänningen i överkant $\sigma_{ö} = -19{,}6$ MPa. Dragarmeringens spänning är enligt ekv. (2.17)

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(d) = 6 \cdot 52{,}9 = 318 \text{ MPa}$$

Iterationen gick från 150 mm via 124,1 mm till 121,5 mm. Redan efter första steget var felet bara 2 %. Hade gissningen i stället varit för liten, till exempel $x = 100$ mm, hade spänningen i det antagna neutrallagret blivit tryck ($-3{,}8$ MPa) och den nya uppskattningen 123,5 mm, alltså en ökning, som i figur 2.26b.

2.3.4 Inverkan på böjstyvhet av belastningsnivån

Det bör noteras att för ett tvärsnitt som belastas genom ren böjning påverkas neutrallagrets läge inte av belastningsnivån utan endast av tvärsnittets tyngdpunktsekvation. Detta innebär att böjstyvheten (flexural rigidity) är konstant och oberoende av belastningsnivå. För ett tvärsnitt som utsätts för böjande moment och normalkraft påverkas neutrallagrets läge av belastningsnivån. I detta fall varierar böjstyvheten när belastningen varierar. Exempelvis varierar böjstyvheten utefter en balk om det böjande momentet varierar utefter längden och normalkraften är konstant.

Betong – sprickbildning

2.4 Sprickbildningsprocessen

Hur sprickor uppstår och hur tätt de hamnar förstås enklast i en armerad betongstav som dras rakt isär. Det är också den modell som forskningen om sprickbildning till stor del bygger på: en betongprisma med en armeringsstång i centrum, där stången sticker ut i ändarna så att den kan belastas.

2.4.1 Kraftöverföring mellan stål och betong

Låt stången dras med en kraft N_1 som är för liten för att betongen ska spricka. I ändarna, där stången går in i betongen, bär stålet hela kraften och betongen är ännu obelastad:

$$\sigma_s = \frac{N_1}{A_s} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \tag{2.46}$$

$$\sigma_c = 0 \Rightarrow \varepsilon_c = 0 \tag{2.47}$$

Stålet vill alltså töja sig mer än betongen. Vidhäftningen (*bond*) mellan stångens kammar och betongen hindrar stången från att glida, och den för successivt över kraft till betongen. Längs den sträcka där överföringen sker, **överföringssträckan** l_t (*transmission length*), verkar vidhäftningsspänningar τ_b mellan stål och betong. Där överföringen är klar har stål och betong samma töjning, och ingen mer kraft förs över.

I stavens mittparti gäller därför de vanliga antagandena för ett armerat tvärsnitt i stadium I, och spänningarna blir

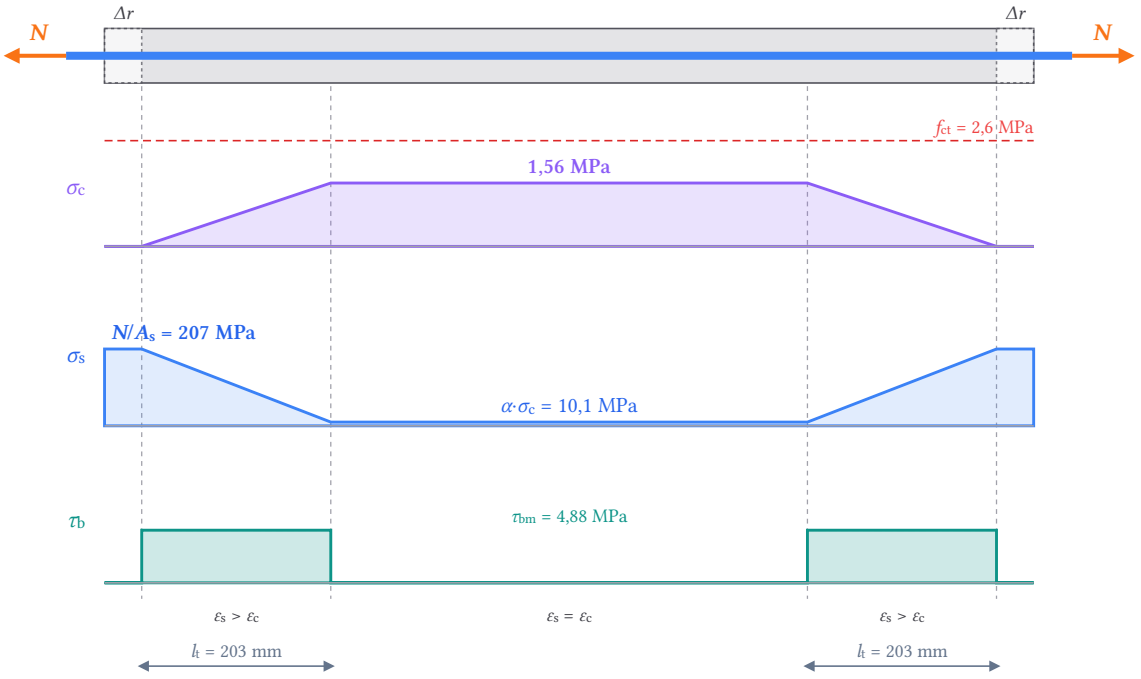
$$\sigma_c = \frac{N_1}{A_I} \tag{2.48}$$

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c \tag{2.49}$$

med det ekvivalenta tvärsnittets area $A_I = A_c + (\alpha - 1)A_s$ och $\alpha = E_s/E_{cm}$ (avsnitt 2.1.3).

Allra närmast stavens ändar fungerar vidhäftningen inte: betongen kring stången bryts loss lokalt ut mot den fria ytan. På en kort sträcka Δr vid varje ände förs därför ingen kraft över.

Ju större kraften är, desto längre blir överföringssträckan, och desto större blir spänningarna i mittpartiet. Figur 2.27 visar hur stål-, betong- och vidhäftningsspänningarna fördelar sig längs staven när kraften ökar fram till spricklasten.



Figur 2.27 Stål-, betong- och vidhäftningsspänningar längs en dragen stav, och överföringssträckan, vid ökande last.

2.4.2 Sprickbildningsskede

Den första sprickan uppstår när betongspänningen i mittpartiet når draghållfastheten. Eftersom spänningen är densamma längs hela mittpartiet kan sprickan uppstå var som helst där. Med ekv. (2.48) blir spricklasten

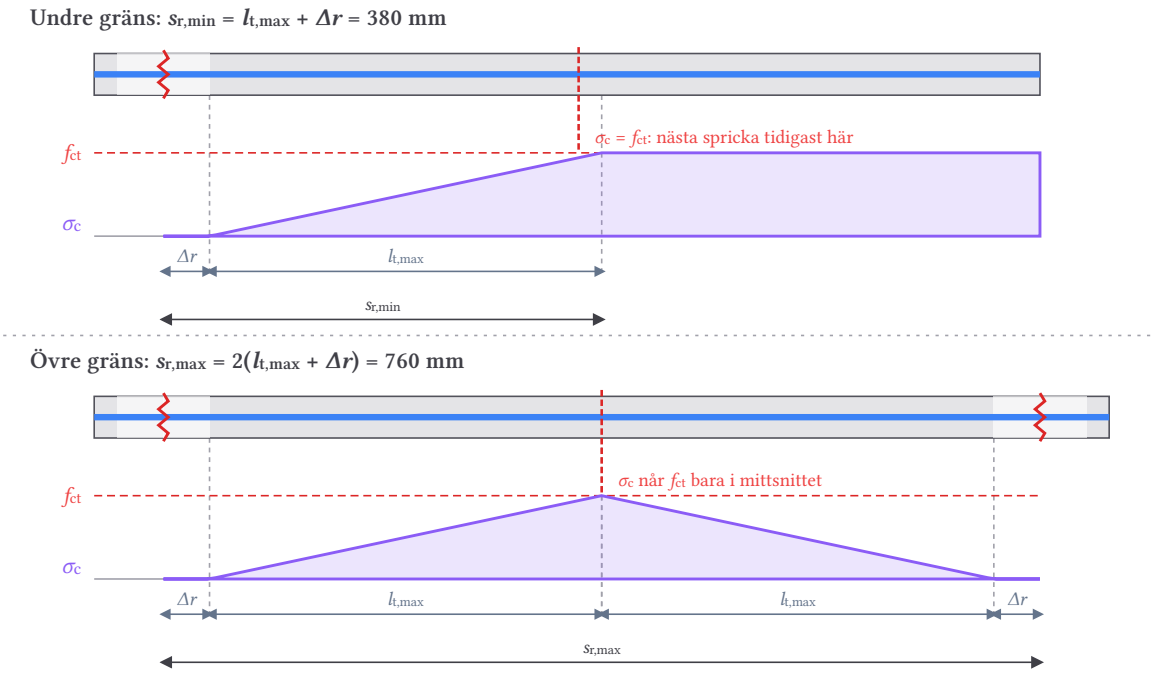
$$N_{cr} = f_{ct} \cdot A_I \tag{2.50}$$

Överföringssträckan vid spricklasten är den längsta som kan uppstå, $l_{t,max}$: en längre sträcka skulle kräva en större kraft, men då har staven redan spruckit.

När spricklasten är nådd börjar ett **sprickbildningsskede**. Nya sprickor bildas utan att lasten behöver öka nämnvärt, på varierande avstånd s_r (*sprickavstånd*, *crack spacing*). Vid varje ny spricka släpper vidhäftningen lokalt, precis som vid stavens ändar. När inga fler sprickor får plats är sprickbildningen **stabiliserad** (*stabilised cracking*). Ökar lasten därefter blir de befintliga sprickorna bredare, men nya bildas i princip inte.

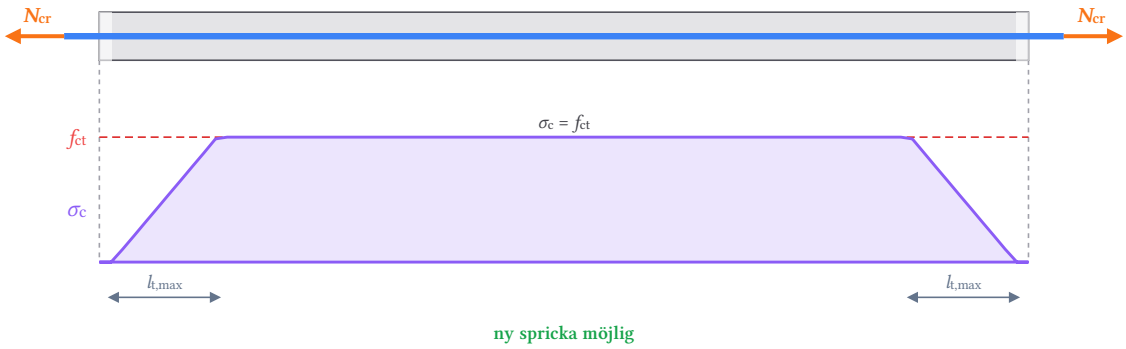
Det finns gränser för hur tätt sprickorna kan ligga. För att betongen ska nå draghållfastheten krävs hela överföringssträckan $l_{t,max}$ räknat från en spricka eller en fri ände, plus den störda zonen Δr. Två sprickor kan alltså inte ligga närmare än $l_{t,max} + \Delta r$. Är avståndet mellan två sprickor mindre än $2l_{t,max} + 2\Delta r$ hinner spänningen inte byggas upp till draghållfastheten mellan dem, så ingen ny spricka kan bildas där. Figur 2.28 visar de två gränsfallen, och sprickavstånden måste därför ligga inom

$$l_{t,max} + \Delta r \leq s_r \leq 2\,l_{t,max} + 2\,\Delta r \tag{2.51}$$



Figur 2.28 Det minsta och det största möjliga sprickavståndet.

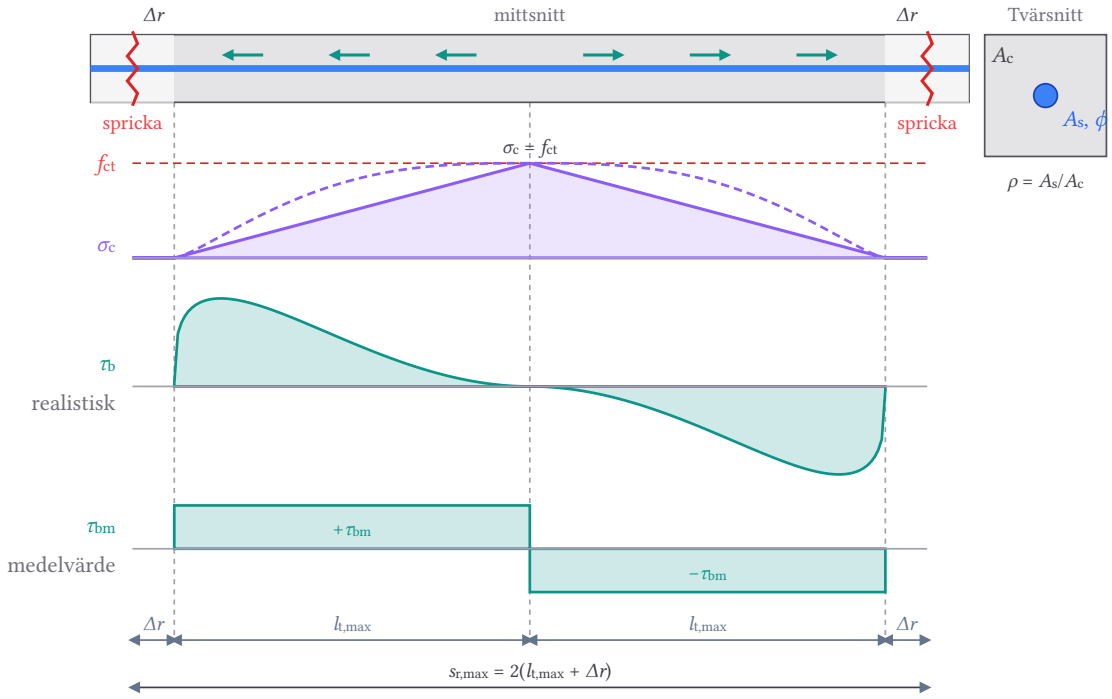
Var sprickorna hamnar inom dessa gränser är slumpmässigt. Figur 2.29 visar ett exempel: sprickorna uppstår en efter en vid spricklasten, och mellan två sprickor som ligger närmare än $2l_{t,max} + 2\Delta r$ stannar betongspänningen under draghållfastheten.



Figur 2.29 Exempel på hur sprickorna bildas i en dragen armerad betongstav vid spricklasten.

2.4.3 Beräkning av sprickavstånd

Det största sprickavståndet kan beräknas ur jämvikten mellan två sprickor som ligger på det största möjliga avståndet $s_{r,max} = 2l_{t,max} + 2\Delta r$, se figur 2.30. I spricksnitten är betongspänningen noll, och mitt emellan dem har den precis nått draghållfastheten, $\sigma_c \approx f_{ct}$.

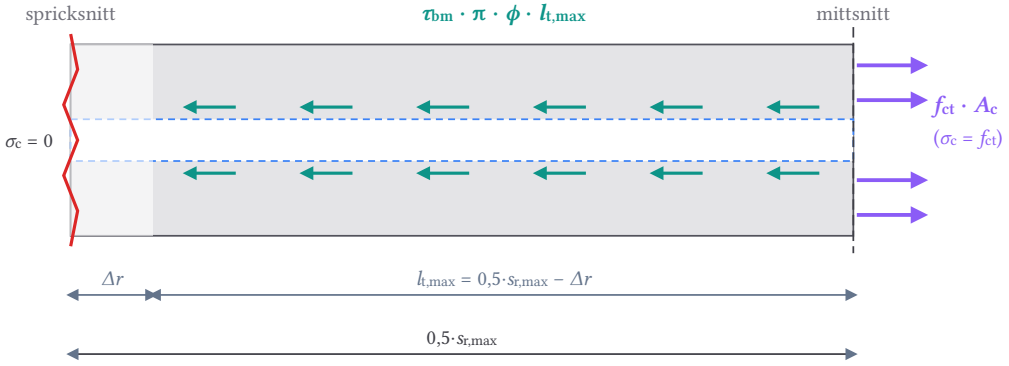


Figur 2.30 Spänningar mellan två sprickor på det största sprickavståndet.

Vidhäftningsspänningen varierar längs överföringssträckan. Med dess medelvärde

$$\tau_{bm} = \frac{1}{l_{t,max}} \int_0^{l_{t,max}} \tau_b(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.52}$$

ger jämvikt i längsled för betongen mellan spricksnittet och mittsnittet, se figur 2.31, att den kraft som vidhäftningen för över längs stångens omkrets är lika med betongens dragkraft i mittsnittet:



Figur 2.31 Jämvikt för betongen mellan spricksnittet och mittsnittet.

$$\tau_{bm} \cdot \pi\phi \cdot l_{t,max} = f_{ct} \cdot A_c \tag{2.53}$$

där $l_{t,max} = 0{,}5\, s_{r,max} - \Delta r$. Med armeringsinnehållet $\rho = A_s/A_c$ och stångarean $A_s = \pi\phi^2/4$ kan betongarean skrivas

$$A_c = \frac{A_s}{\rho} = \frac{\pi\phi^2}{4\rho} \tag{2.54}$$

Insatt i ekv. (2.53) ger det det största sprickavståndet:

$$s_{r,max} = 2\,\Delta r + \frac{1}{2}\cdot\frac{f_{ct}}{\tau_{bm}}\cdot\frac{\phi}{\rho} \tag{2.55}$$

Det minsta sprickavståndet, med halva överföringssträckan, blir på samma sätt

$$s_{r,min} = \Delta r + \frac{1}{4}\cdot\frac{f_{ct}}{\tau_{bm}}\cdot\frac{\phi}{\rho} \tag{2.56}$$

och som medelsprickavstånd (*average crack spacing*) kan medelvärdet av de två användas:

$$s_{rm} = 1{,}5\,\Delta r + \frac{3}{8}\cdot\frac{f_{ct}}{\tau_{bm}}\cdot\frac{\phi}{\rho} \tag{2.57}$$

Formeln visar de två viktigaste parametrarna: sprickavståndet växer med stångdiametern ϕ och minskar med armeringsinnehållet ρ. Många klena stänger ger alltså tätare, men smalare, sprickor än få grova.

Från modell till dimensioneringsformel

Hur väl vidhäftningen överför kraft beror på stångens yta och på betongens hållfasthet. Försök visar att medelvärdet ungefär är proportionellt mot draghållfastheten,

$$\tau_{bm} = \frac{3}{2k_1}\cdot f_{ct} \tag{2.58}$$

där k_1 beskriver stångens yta: $k_1 = 0{,}8$ för kamstänger och $k_1 = 1{,}6$ för släta stänger (till exempel spännstål). Med $\Delta r \approx 2\phi$ och ekv. (2.58) i ekv. (2.57) blir medelsprickavståndet vid ren dragning

$$s_{rm} = 3\phi + 0{,}25\cdot k_1\,\frac{\phi}{\rho} \quad [\text{mm}] \tag{2.59}$$

med ϕ i mm. Uppmätta sprickavstånd varierar mycket, så för dimensionering används ett övre, karakteristiskt värde:

$$s_{r,max} = 1{,}7\,s_{rm} \tag{2.60}$$

Tillsammans med ekv. (2.59) ger det

$$s_{r,max} = 5{,}1\phi + 0{,}425\cdot k_1\,\frac{\phi}{\rho} \tag{2.61}$$

Uttrycket har samma uppbyggnad som formlerna i EC2: en term som beror på stångdiametern (eller täckskiktet) och en term som är proportionell mot ϕ/ρ.

2.4.4 Beräkning av sprickavstånd enligt EC2:2023

EC2:2023, avsnitt 9.2.3, beräknar ett **medelsprickavstånd** när alla sprickor har bildats. Formeln har samma två delar som ekv. (2.61), men täckskiktet c har ersatt den störda zonen, och armeringsinnehållet räknas i en **effektiv dragarea** kring armeringen i stället för i hela tvärsnittet:

$$s_{r,m,cal} = 1{,}5\,c + \frac{k_{fl}\,k_b}{7{,}2}\cdot\frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \le \frac{1{,}3}{k_w}(h-x) \tag{2.62}$$

(EC2 formel (9.15)). Här är

- c det fria täckskiktet till stången; för hörnstänger används det största;
- ϕ stångdiametern. Vid olika diametrar används en ekvivalent diameter $\phi_{eq} = \sum n_i\phi_i^2 / \sum n_i\phi_i$ (EC2 (9.19));
- k_b en faktor för vidhäftningen: 0,9 vid goda och 1,2 vid dåliga vidhäftningsförhållanden (EC2 (9.18));
- k_{fl} en faktor för hur töjningen varierar över den effektiva dragarean. Vid ren dragning är $k_{fl} = 1$ (EC2 (9.20)). För ett rektangulärt tvärsnitt i ren böjning är $k_{fl} = (h - h_{c,eff})/h$ (EC2 (9.16)), och allmänt används EC2 (9.17) med neutrallagrets läge x_g i osprucket tillstånd;

- $k_w = 1{,}7$ omräkningen från medelsprickbredd till beräknad sprickbredd (avsnitt 2.5). Den används här bara i övre gränsen, som säger att sprickavståndet inte behöver räknas större än ungefär den dragna delen av tvärsnittet.

Det effektiva armeringsinnehållet är

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1 A_p}{A_{c,eff}} \tag{2.63}$$

(EC2 (9.12)), där A_p är eventuell spännarmering och ξ_1 tar hänsyn till dess sämre vidhäftning. Den effektiva dragarean $A_{c,eff}$ är betongen närmast armeringen, med höjden $h_{c,eff}$, se figur 2.32. För ett lager stänger i ett böjt tvärsnitt är $h_{c,eff}$ det minsta av $a_y + 5\phi$, 10ϕ, $3{,}5a_y$, $h - x$ och $h/2$, där a_y är avståndet från den dragna ytan till stängernas centrum.

Interaktiv figur: se webbversionen.

Figur 2.32 Effektiv dragarea $A_{c,eff}$ kring den dragna armeringen för olika fall. Omritad efter EC2:2023 figur 9.3.

Exempel 2.2 Sprickavstånd i en balk enligt EC2:2023

Balken i exempel 1.4 har tvärsnittet 300×500 mm och 4 $\phi 16$ ($A_s = 804$ mm²) med centrum 50 mm från underkanten, det vill säga $d = 450$ mm. Betongen är C30/37 och vidhäftningsförhållandena är goda. Bestäm medelsprickavståndet i böjning.

Täckskikt. Det fria täckskiktet är $c = a_y - \phi/2 = 50 - 8 = 42$ mm.

Tryckzonens höjd. I stadium II med $\alpha = E_s/E_{cm} = 6{,}26$ blir $x = 107$ mm (avsnitt 2.2).

Effektiv dragarea. Det minsta av kandidaterna avgör:

$$\begin{aligned} h_{c,eff} &= \min\{50 + 5\cdot 16;\ 10\cdot 16;\ 3{,}5\cdot 50;\ 500 - 107;\ 500/2\} \\ &= \min\{130;\ 160;\ 175;\ 393;\ 250\} = 130 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$A_{c,eff} = 300 \cdot 130 = 39\,000 \text{mm}^2, \qquad \rho_{p,eff} = \frac{804}{39\,000} = 0{,}0206$$

Faktorer. Rektangulärt tvärsnitt i ren böjning och goda vidhäftningsförhållanden:

$$k_{fl} = \frac{500 - 130}{500} = 0{,}74, \qquad k_b = 0{,}9$$

Medelsprickavstånd. ekv. (2.62) ger

$$s_{r,m,cal} = 1{,}5 \cdot 42 + \frac{0{,}74 \cdot 0{,}9}{7{,}2} \cdot \frac{16}{0{,}0206} = 63 + 72 = 135 \text{ mm}$$

Övre gräns.

$$\frac{1{,}3}{1{,}7} \cdot (500 - 107) = 300 \text{ mm} > 135 \text{ mm}$$

så gränsen avgör inte. Sprickorna förväntas alltså ligga ungefär 135 mm isär. Täckskiktet och stångtermen bidrar ungefär lika mycket. Med fler, klenare stänger med samma area skulle stångtermen och därmed sprickavståndet minska.

2.5 Beräkning av sprickbredd

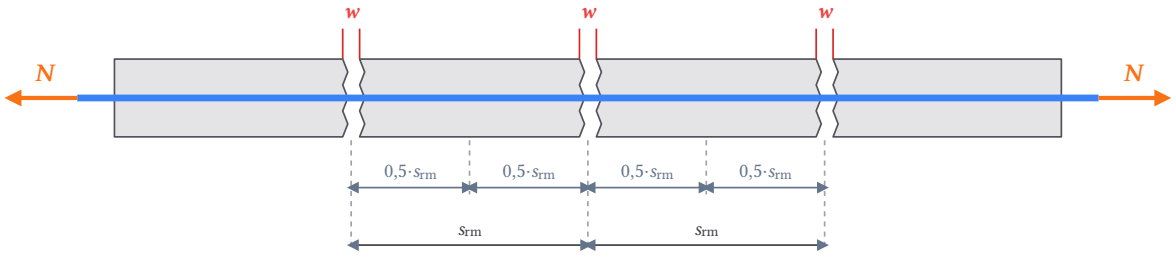
Ta åter den dragna betongstaven från avsnitt 2.4, nu med sprickor på samma inbördes avstånd, medelsprickavståndet s_{rm}. Dragkraften N är större än spricklasten, så i varje spricka bär armeringen hela kraften och har töjningen

$$\varepsilon_s = \frac{N}{A_s \cdot E_s} \tag{2.64}$$

Mellan sprickorna tar betongen fortfarande en del av kraften via vidhäftningen, och där töjs stålet mindre. Bortser man från det, som om stången vore helt fri mellan sprickorna, blir sprickbredden stålets förlängning över ett sprickavstånd:

$$w_m = \varepsilon_s \cdot s_{rm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot s_{rm} \tag{2.65}$$

Figur 2.33 illustrerar sambandet.



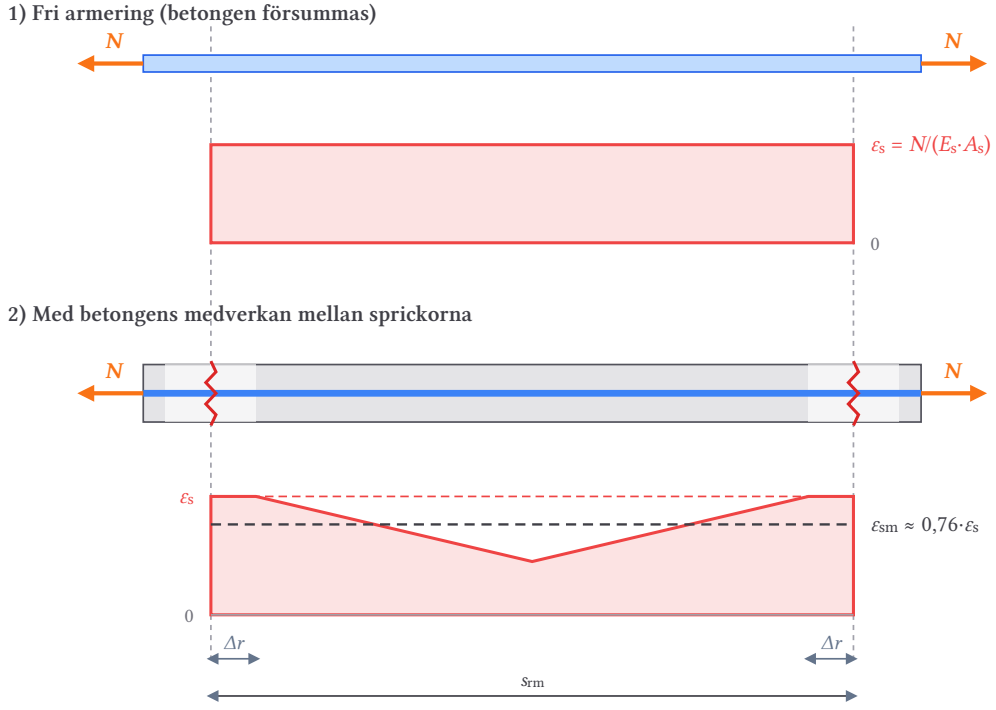
Figur 2.33 Sprickbredden som stålets förlängning mellan två sprickor.

Eftersom betongens medverkan har försummats är (2.65) en övre gräns för sprickbredden vid korttidslast.

Räknas betongens medverkan med blir sprickbredden i stället skillnaden mellan stålets och betongens förlängning. Den fås genom att integrera töjningsskillnaden längs överföringssträckorna på båda sidor om sprickan och lägga till stålets fria förlängning i de korta zonerna Δr där vidhäftningen har släppt:

$$w = 2 \int_0^{l_t} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x))\mathrm{d}x + 2 \cdot \varepsilon_s \cdot \Delta r \tag{2.66}$$

Integralen är arean mellan stålets och betongens töjningskurvor i figur 2.34.



Figur 2.34

2.5.1 Beräkning av sprickbredd enligt EC2:2023

EC2:2023 (avsnitt 9.2.3) bygger på samma tanke som ekv. (2.66): sprickbredden är sprickavståndet gånger skillnaden mellan stålets och betongens medeltöjning. Resultatet är ett **beräknat** värde vid elementets yta, avsett att jämföras med gränsvärdet $w_{lim,cal}$. Det är inte en förutsägelse av vad som mäts upp på en verklig konstruktion.

Den beräknade sprickbredden är (EC2 (9.8))

$$w_{k,cal} = k_w \cdot k_{1/r} \cdot s_{r,m,cal} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \tag{2.67}$$

där

- $s_{r,m,cal}$ är medelsprickavståndet enligt ekv. (2.62)
- $k_w = 1{,}7$ räknar om medelvärdet till ett karakteristiskt värde, som faktorn 1,7 i ekv. (2.60)
- $k_{1/r}$ tar hänsyn till att sprickan blir bredare vid ytan än vid armeringen när tvärsnittet böjs, eftersom ytan ligger längre från neutrallagret.

För den mest dragna ytan i ett böjt tvärsnitt är (EC2 (9.9))

$$k_{1/r} = \frac{h - x}{h - a_y - x} \tag{2.68}$$

alltså förhållandet mellan avstånden från neutrallagret till ytan och till armeringen. Är båda sidor dragna, som i figur 2.35, ligger neutrallagret utanför tvärsnittet; för den minst dragna sidan är krökningen då gynnsam, och EC2 (9.10) ger ett $k_{1/r}$ mindre än ett.

Interaktiv figur: se webbversionen.

Figur 2.35 Beteckningar för $k_{1/r}$ när båda sidor av tvärsnittet är dragna. Omritad efter EC2:2023 figur 9.1.

Töjningsskillnaden beräknas med stålspänningen σ_s i ett sprucket tvärsnitt (stadium II), minskad med betongens medverkan mellan sprickorna (EC2 (9.11)):

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \dfrac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}}\left(1 + \alpha_e \, \rho_{p,eff}\right)}{E_s} \geq (1 - k_t)\,\frac{\sigma_s}{E_s} \tag{2.69}$$

där

- σ_s är spänningen i den dragna armeringen närmast ytan, i sprucket tvärsnitt;
- $f_{ct,eff}$ är betongens draghållfasthet när sprickorna bildas; vid beräkning av sprickbredd sätts den lika med f_{ctm}
- $\rho_{p,eff}$ är det effektiva armeringsinnehållet enligt ekv. (2.63), och $\alpha_e = E_s / E_{cm}$
- k_t beskriver hur mycket betongen hinner medverka: $k_t = 0{,}6$ för korttidslast, och för långtidslast eller upprepad last medan sprickorna fortfarande bildas; $k_t = 0{,}4$ för långtidslast eller upprepad last när sprickbildningen är stabiliserad.

Den nedre gränsen i ekv. (2.69) innebär att betongens medverkan aldrig får räknas större än en andel k_t av stålets töjning.

Exempel 2.3 Sprickbredd i en balk enligt EC2:2023

Balken i exempel 2.2 (300 × 500 mm, 4 ϕ16, $d = 450$ mm, C30/37) har medelsprickavståndet $s_{r,m,cal} = 135$ mm. Den kvasipermanenta lasten ger momentet $M = 67{,}5$ kNm i mitten. Bestäm den beräknade sprickbredden.

Stålspänning. I stadium II är $x = 107$ mm och $I_{II} = 715 \cdot 10^6$ mm⁴ med $\alpha_e = 6{,}26$. Armeringens spänning blir

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \frac{M}{I_{II}}\,(d - x) = 6{,}26 \cdot \frac{67{,}5 \cdot 10^6}{715 \cdot 10^6} \cdot (450 - 107) = 203 \text{ MPa}$$

Töjningsskillnad. Långtidslast med stabiliserad sprickbildning ger $k_t = 0{,}4$. Med $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2{,}9$ MPa och $\rho_{p,eff} = 0{,}0206$ ger ekv. (2.69)

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{203 - 0{,}4 \cdot \dfrac{2{,}9}{0{,}0206} \cdot (1 + 6{,}26 \cdot 0{,}0206)}{200\,000} = 0{,}70 \cdot 10^{-3}$$

Den nedre gränsen är $0{,}6 \cdot 203/200\,000 = 0{,}61 \cdot 10^{-3}$, så det beräknade värdet gäller.

Krökningsfaktor. Med $a_y = 50$ mm ger ekv. (2.68)

$$k_{1/r} = \frac{500 - 107}{500 - 50 - 107} = 1{,}15$$

Sprickbredd. ekv. (2.67) ger

$$w_{k,cal} = 1{,}7 \cdot 1{,}15 \cdot 135 \cdot 0{,}70 \cdot 10^{-3} = 0{,}18 \text{ mm}$$

Värdet jämförs med gränsvärdet för konstruktionens exponeringsklass. Betongens medverkan mellan sprickorna minskar sprickbredden med ungefär en tredjedel jämfört med om stålets töjning σ_s/E_s hade använts direkt.

2.5.2 Övningar

En rektangulär betongbalk med tvärsnitt $b \times h$ armeras i underkant. Betongen är C30/37 och armeringen B500B. Prova att ändra indata i figur 2.36 för att se hur den karakteristiska sprickbredden $w_{k,cal}$ påverkas i realtid enligt Eurokod 2 (2023).

Interaktiv figur: se webbversionen.

Figur 2.36

Betong – långtidseffekter

2.6 Inverkan av tidsberoende effekter

2.6.1 Inverkan av krympning

Betongens krympning (shrinkage) beskrivs av krympmåttet ε_{cs}, som utgör betongens fria krympning. Om betongen kan deformeras helt obehindrat resulterar krympningen enbart i en deformation utan att spänningar uppkommer.

I praktiken är betongkonstruktioner alltid förhindrade pga ingjuten armering, som inte krymper. I en obelastad armerad betongstav (area A_c, symmetrisk armering A_s) uppkommer därför efter lång tid ett deformationsbehov ε_{cs} i betongen. Eftersom armeringen inte har samma deformationsbehov motverkar den krymprörelsen, vilket leder till att:

- **Tryckspänningar** uppkommer i armeringen (armeringen stukas med ε_s), och
- **Dragspänningar** uppkommer i betongen (betongen hålls tillbaka med spänningsrelaterad töjning ε_c).

Spänningarna i den armerade staven beräknas med hjälp av grundläggande beräkningsantaganden (kompatibilitet + jämvikt):

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_c - \varepsilon_s \qquad (1)(\text{kompatibilitet, enligt antagande 2})$$

$$\sigma_c \cdot (A_c - A_s) + \sigma_s \cdot A_s = 0 \qquad (2)(\text{jämvikt})$$

Materialen har linjärelastisk respons vilket innebär att:

$$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \tag{2.70}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \tag{2.71}$$

Med hjälp av (1) kan ε_s uttryckas som $\varepsilon_s = \varepsilon_c - \varepsilon_{cs}$ och därmed (2.71) skrivas som:

$$\sigma_s = E_s \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{cs}) = E_s \cdot \varepsilon_c - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \tag{2.72}$$

Genom att införa (2.70) i (2.72) erhålls:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_c - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = E_s \cdot \frac{\sigma_c}{E_{cm}} - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = \alpha \cdot \sigma_c - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \tag{2.73}$$

där $\alpha = E_s / E_{cm}$ är det modulära förhållandet Nu kan (2.73) införas i (2) för att lösa ut betongspänningen σ_c:

$$\sigma_c \cdot (A_c - A_s) + (\alpha \cdot \sigma_c - E_s \cdot \varepsilon_{cs}) \cdot A_s = 0 \Rightarrow \sigma_c \cdot (A_c - A_s) + \alpha \cdot \sigma_c \cdot A_s - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A_s = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_c \cdot (A_c - A_s + \alpha \cdot A_s) = E_s \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A_s \Rightarrow$$

$$\sigma_c = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A_s}{A_c + (\alpha - 1) \cdot A_s} \tag{2.74}$$

Uttrycket i nämnaren utgör arean för det ekvivalenta betongtvärsnittet i stadium I, A_I, och uttrycket i täljaren kan uppfattas som en dragande normalkraft. Därför kan krympkraften uttryckas som:

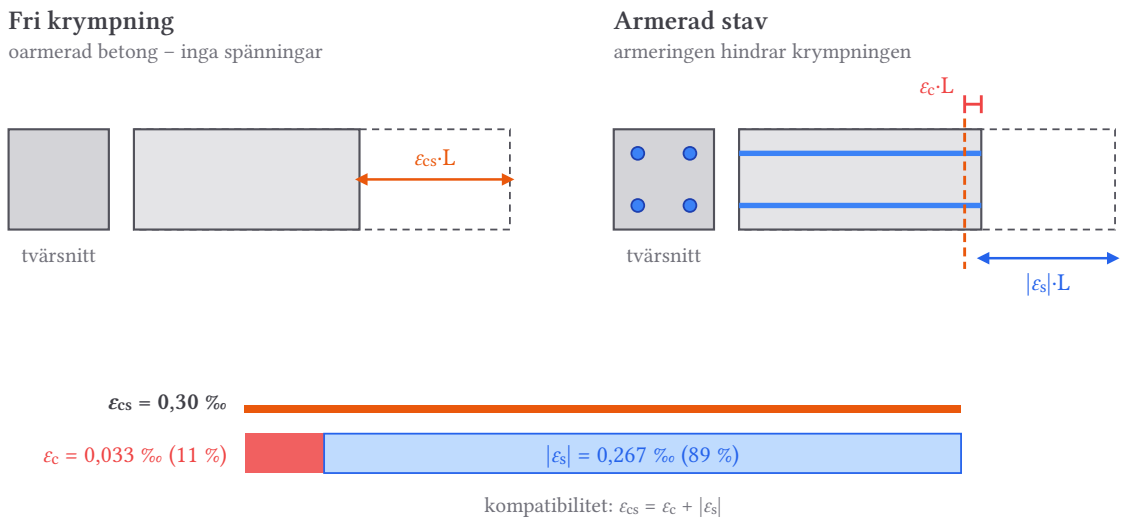
$$F_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A_s \tag{2.75}$$

Spänningarna i det armerade tvärsnittet kan då skrivas som:

$$\sigma_c = \frac{F_{cs}}{A_I} \tag{2.76}$$

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = \alpha \cdot \frac{F_{cs}}{A_I} - \frac{F_{cs}}{A_s} \tag{2.77}$$

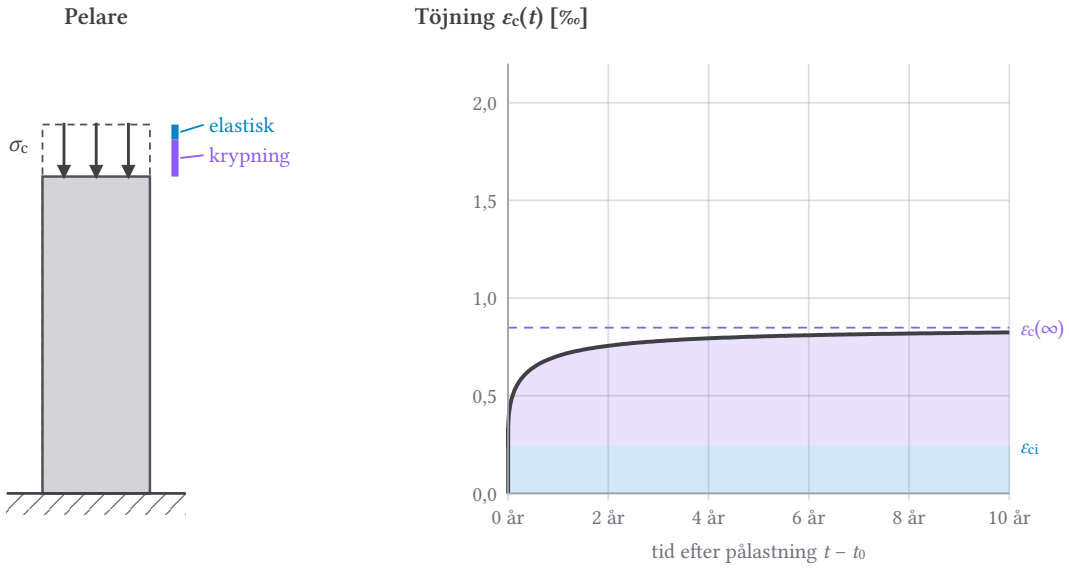
Vilket innebär att krympningen i en armerad betongstav ger upphov till tryckspänningar i armeringen och dragspänningar i betongen, se figur 2.37.



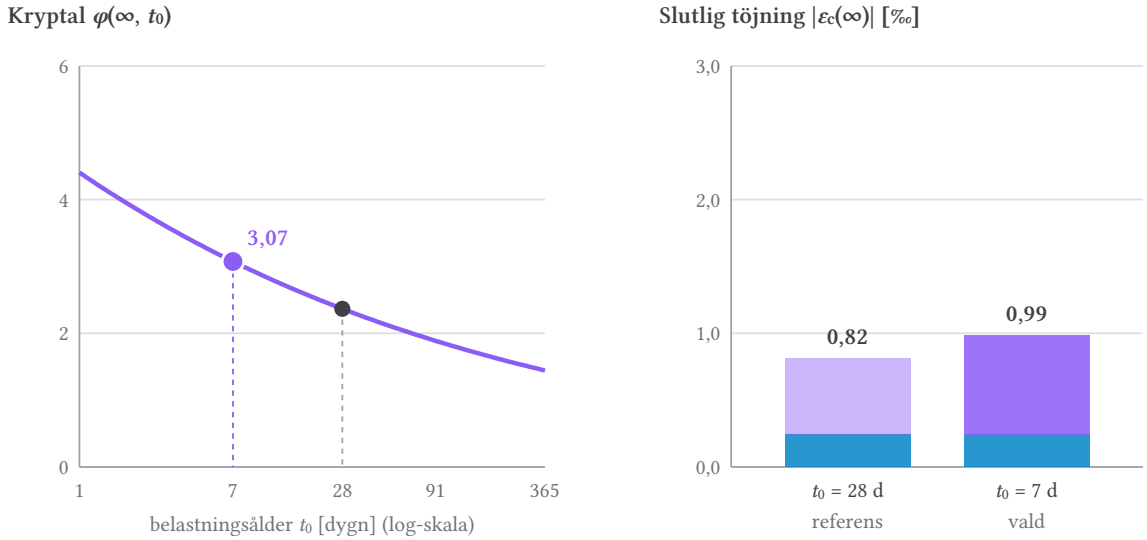
Figur 2.37 Krympning i armerad betongstav

2.6.2 Inverkan av krypning

Krypning är en spänningsberoende deformation och innebär att betongen deformeras under tid vid konstant spänning. Efter lång tid avtar krypningen och deformationen når då ett slutligt värde, se figur 2.38. Hur det slutliga kryptalet beror på belastningsåldern t_0 visas i figur 2.39.



Figur 2.38 Krypning i betong



Figur 2.39 Inverkan av belastningsålder t_0 på slutligt kryptal

Den totala töjningen vid tidpunkten t:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci} + \varphi(t, t_0) \cdot \varepsilon_{ci}$$

där ε_{ci} är den elastiska töjningen vid tidpunkten t_0, beräknad som:

$$\varepsilon_{ci} = \frac{\sigma_c}{E_{c,28}}$$

och $\varphi(t, t_0)$ är kryptalet som beror på:

- Relativ fuktighet (RH)
- Fiktiv tvärsnittsdimension $h_0 = 2A_c/u$
- Betonghållfasthetsklass
- Belastningsålder t_0
- Cementtyp

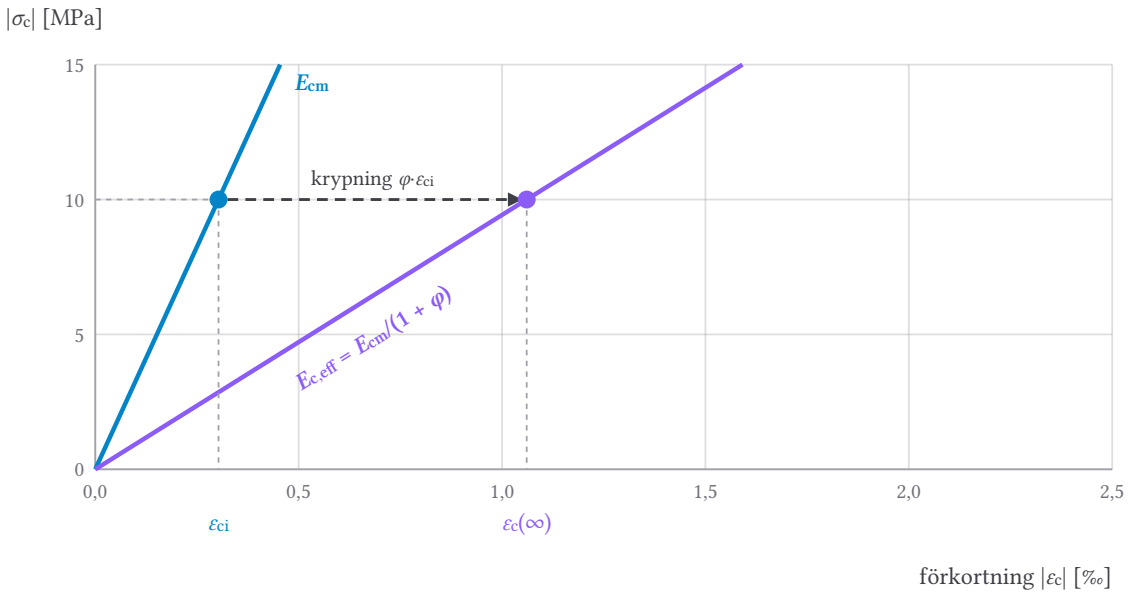
Typiska värden: $\varphi(\infty, t_0) \approx 1{,}5 - 4{,}0$

Effektiv elasticitetsmodul

Vid beräkning med hänsyn till krypning ersätts E_{cm} med en effektiv elasticitetsmodul. Det bör dock noteras att detta endast är ett beräkningsknep eftersom betongens elasticitetsmodul inte ändrar sig med tiden.

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05 \cdot E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Figur 2.40 visar hur den effektiva elasticitetsmodulen minskar med kryptalet.



Figur 2.40 Effektiv elasticitetsmodul

Det effektiva modulförhållandet blir:

$$\alpha_{eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \alpha \cdot (1 + \varphi)/1{,}05$$

De tvärsnittskonstanter som bestämts på detta sätt och som således används vid beräkning av tvärsnittens långtidsrespons betecknas i det följande:

- $A_{I,eff}, I_{I,eff}$ – tvärsnittskonstanter i stadium I
- $A_{II,eff}, I_{II,eff}$ – tvärsnittskonstanter i stadium II
- $x_{tp,eff}$ – tyngdpunktsavstånd i stadium I/II

Krympning och krypning enligt EC2:2023

Kryptal och krympning enligt EC2:2023 kan beräknas i figur 2.41.

Interaktiv figur: se webbversionen.

Figur 2.41 Krypning och krympning enligt EC2:2023

2.7 Tvärsnittsanalys vid långtidsrespons

Krypning och krympning beskrivs i beräkningarna med kryptalet $\varphi(t, t_0)$ och krympmåttet $\varepsilon_{cs}(t)$ (avsnitt 2.6). Båda växer med tiden, så de ska tas för den tidpunkt t som deformationerna avser. Eftersom båda till slut avstannar används ofta deras slutvärden, $\varphi(\infty, t_0)$ och $\varepsilon_{cs}(\infty)$, när tillståndet efter lång tid söks.

Analysen görs med samma ekvivalenta tvärsnitt och samma Naviers formel som för korttidslast, med två ändringar:

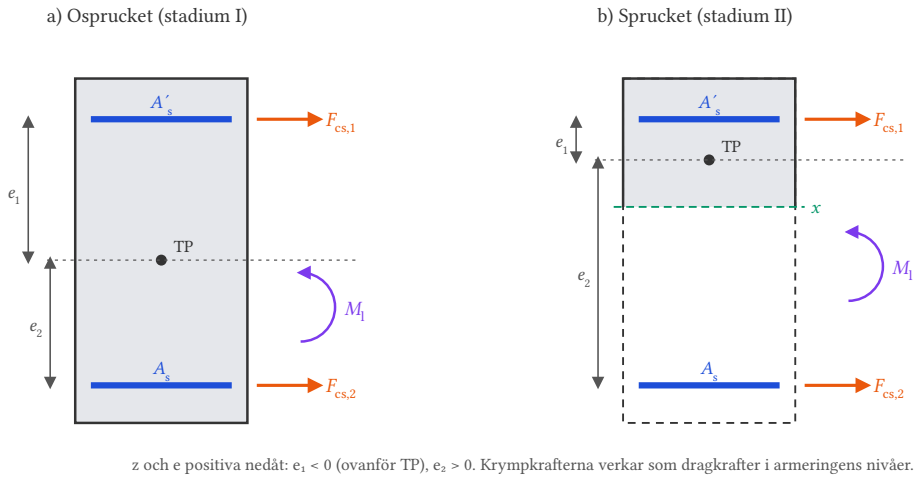
- **Krypning** beaktas med den effektiva elasticitetsmodulen $E_{c,eff} = E_{cm}/(1+\varphi)$, vilket ger det effektiva modulförhållandet

$$\alpha_{eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \alpha \cdot (1+\varphi) \tag{2.78}$$

  Armeringen väger alltså tyngre i det ekvivalenta tvärsnittet när betongen kryper.
- **Krympning** beaktas med en fiktiv tvångskraft i varje armeringslager i. Betongen vill krympa men armeringen håller emot. Det motsvarar att lagret drar i tvärsnittet med kraften

$$F_{cs,i} = E_s \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A_{s,i} \tag{2.79}$$

  som verkar i lagrets nivå, på avståndet e_i från det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt (positivt nedåt), se figur 2.42.



Figur 2.42 Effektivt ekvivalent tvärsnitt för långtidslast med tryckarmering A'_s och dragarmering A_s. Krympningens tvångskrafter $F_{cs,i}$ verkar i armeringens nivåer med excentriciteterna e_i från tyngdpunkten. a) Osprucket tvärsnitt. b) Sprucket tvärsnitt med tryckzonen x.

Hur uttrycken ser ut beror alltså på vilken armering som finns: varje lager ger ett eget bidrag till normalkraften och till momentet kring tyngdpunkten. Med enbart dragarmering finns ett bidrag, med tryckarmering två. Tryckarmeringen ligger ovanför tyngdpunkten ($e_1 < 0$), så den minskar krympningens moment.

2.7.1 Ospruckna tvärsnitt - inverkan av krypning och jämn krympning

Ett osprucket tvärsnitt (stadium I) har kända tvärsnittskonstanter A_I och I_I, beräknade med α_{eff}. Krympkrafterna och det långvariga momentet M_l sätts in i Naviers formel:

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{\sum F_{cs,i}}{A_I} + \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{I_I}\, z \tag{2.80}$$

Krökningen blir

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{E_{c,eff} \cdot I_I} \tag{2.81}$$

Armeringens spänning är den ekvivalenta betongspänningen i lagrets nivå gånger α_{eff}, minskad med krympningens tvång, som trycker ihop stålet:

$$\sigma_{s,i} = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_i) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \tag{2.82}$$

där $\sigma_{c,\infty}(z_i)$ är den (fiktiva) betongspänningen i armeringslagrets nivå.

2.7.2 Böjsprucket tvärsnitt - beräkning med hänsyn till krypning och jämn krympning

I ett sprucket tvärsnitt (stadium II) verkar krympkrafterna som en normalkraft. Neutrallagret sammanfaller då inte längre med tyngdpunkten, $x \neq x_{tp}$, och tryckzonens höjd måste bestämmas genom iteration på samma sätt som för ett tvärsnitt med normalkraft (avsnitt 2.3.3). Naviers formel blir

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{\sum F_{cs,i}}{A_{II,eff}} + \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{I_{II,eff}}\, z \tag{2.83}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{E_{c,eff} \cdot I_{II,eff}} \tag{2.84}$$

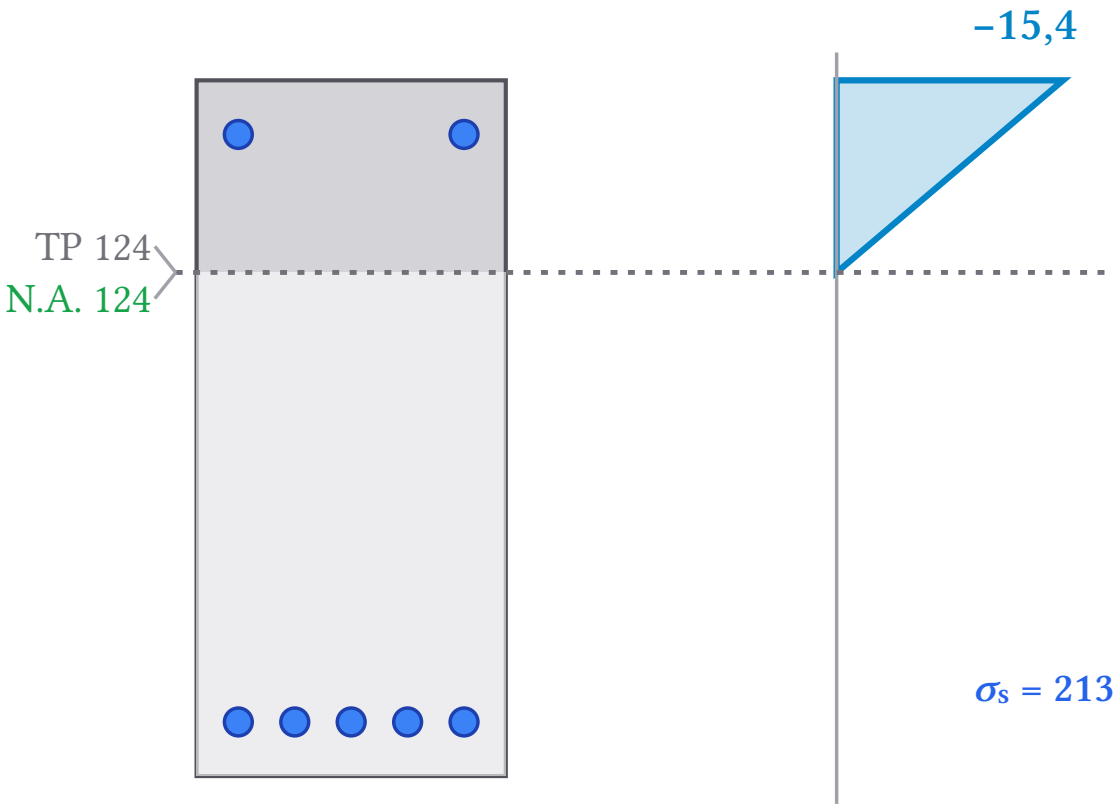
där $A_{II,eff}$ och $I_{II,eff}$ är tvärsnittskonstanterna i stadium II för det x som iterationen ger. Armeringens spänning beräknas som tidigare:

$$\sigma_{s,i} = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_i) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \tag{2.85}$$

Verkar även en yttre långvarig normalkraft N_l, med excentriciteten e_N från tyngdpunkten, läggs den till krympkrafterna:

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{\sum F_{cs,i} + N_l}{A_{II,eff}} + \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + N_l\, e_N + M_l}{I_{II,eff}}\, z \tag{2.86}$$

Figur 2.43 jämför spänningarna för olika kombinationer av krypning och krympning.



Figur 2.43 Spänningar i ett sprucket tvärsnitt för olika kombinationer av krypning och krympning.

Approximativ beräkning med hänsyn till krypning och jämn krympning

Iterationen kan ofta undvikas. Tryckzonens höjd beräknas då som vid ren böjning, med en tyngdpunktsekvation och α_{eff}, och krympkrafterna sätts in i Naviers formel med de tvärsnittskonstanter som det ger:

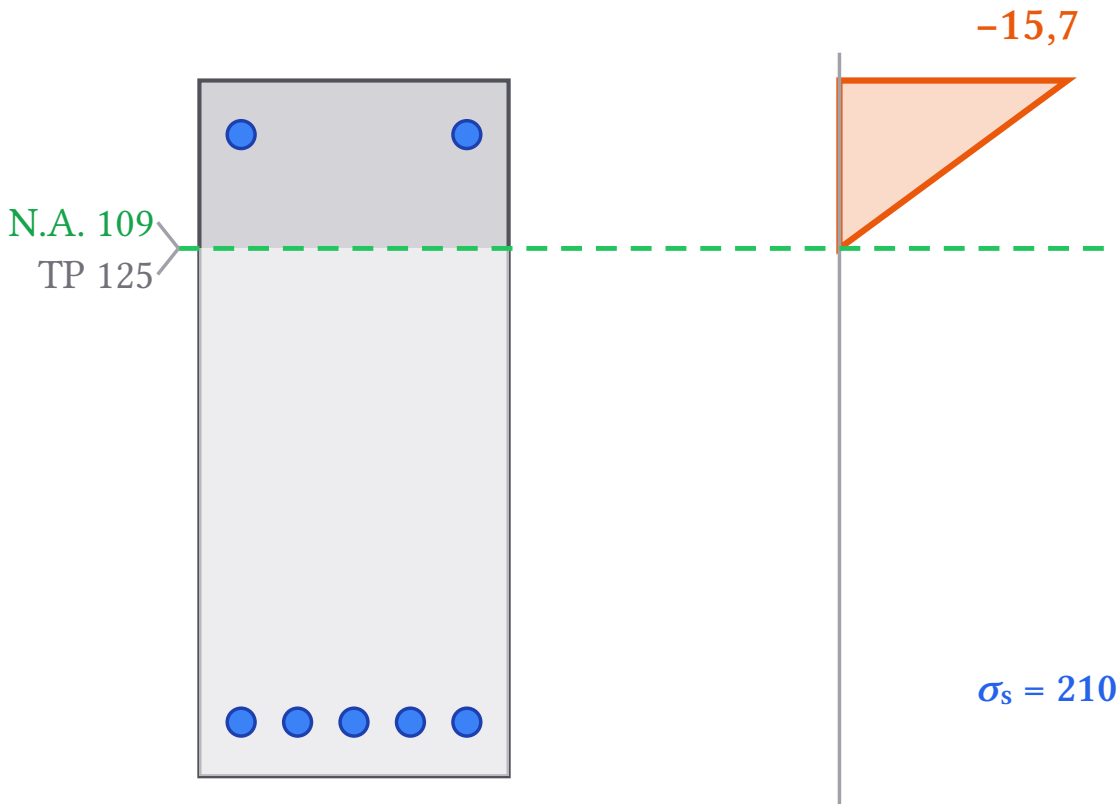
$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{\sum F_{cs,i}}{A_{II,eff}} + \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{I_{II,eff}}\, z \tag{2.87}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sum F_{cs,i}\, e_i + M_l}{E_{c,eff} \cdot I_{II,eff}} \tag{2.88}$$

$$\sigma_{s,i} = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_i) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} \tag{2.89}$$

Formlerna är desamma som ekv. (2.83)–(2.85). Skillnaden är bara vilket x, och därmed vilka $A_{II,eff}$, $I_{II,eff}$ och e_i, som används.

Att förenklingen fungerar kan verka förvånande, eftersom neutrallagret flyttas betydligt av krympkraften. I figur 2.44 kan tryckzonens höjd skilja flera centimeter mellan de två beräkningarna. Men spänningarna i kanterna, stålspänningen och krökningen bestäms av hela den linjära spänningsfördelningen, och den ändras nästan inte när den del av betongen som ligger nära neutrallagret räknas med eller inte. Där är spänningen ju nästan noll. Skillnaden i kantspänningar och krökning blir därför ofta bara någon procent. Förenklingen är sämst när krympkraften är stor i förhållande till momentet, och bäst i de mest påkända snitten, till exempel i fält hos balkar och plattor, där nedböjningen ändå bestäms.



Figur 2.44 Exakt och förenklad beräkning med krympning. Neutrallagrets läge skiljer sig, men spänningarna i kanterna och krökningen blir nästan desamma. Minska momentet för att se när skillnaden växer.

Nedböjning

2.8 Nedböjning: gemensam grund

En balk som böjs får en **krökning**, och krökningen längs balken bestämmer hur mycket den böjer ned. Det gäller för alla material. Materialet avgör bara *hur stor* krökningen blir i varje snitt: i stål och trä beror den på momentet och böjstyvheten, i armerad betong dessutom på sprickbildning, krypning och krympning. Det här avsnittet bygger upp den gemensamma grunden; de följande avsnitten behandlar betong, stål och trä.

2.8.1 Varför nedböjningen begränsas

Nedböjningen kontrolleras i bruksgränstillståndet (SLS). En för stor nedböjning gör sällan att konstruktionen går sönder, men den kan

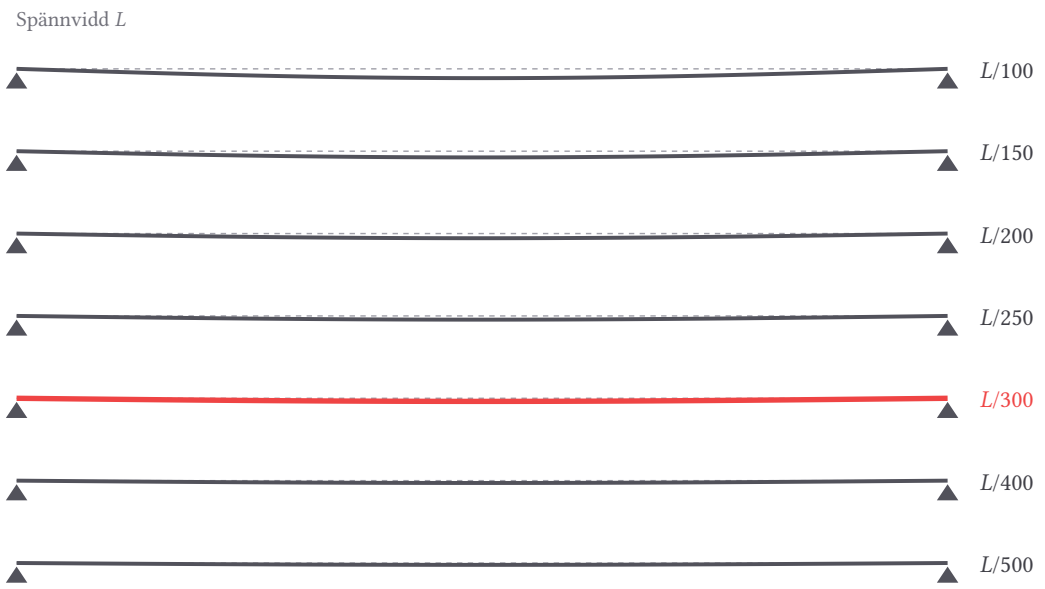
- skada anslutande byggnadsdelar, till exempel mellanväggar, fönster och fasader,
- ge problem med funktionen, till exempel vattensamlingar på platta tak, dörrar som kärvar eller lutande golv,
- se obehaglig ut och skapa otrygghet, och
- ge besvärande svängningar.

Kraven uttrycks oftast som en största tillåten nedböjning i förhållande till spännvidden, $w_{max} \leq L/n$. Vanliga gränsvärden i svensk praxis finns i tabell 2.2.

Tabell 2.2 Vanliga gränsvärden för nedböjning i svensk praxis

Byggnadsdel	**Gränsvärde**
Takbalkar, bostäder	$L/300$
Takbalkar, offentliga lokaler	$L/200$
Takbalkar, industri	$L/150$
Golvbjälkar, normalt	$L/300$
Golvbjälkar, förråd	$L/150$
Konsoler	$L/200$ (med konsolens längd som L)
Takåsar utan undertak	$L/200$
Takåsar med undertak	$L/100$

Det är små nedböjningar. En balk med spännvidden 6 m får böja ned 20 mm vid kravet $L/300$, och figur 2.45 visar hur det ser ut i verklig skala.



Figur 2.45 Nedböjningen L/n för vanliga gränsvärden, i verklig skala.

Vilken last nedböjningen ska beräknas för beror på vad kravet skyddar. Skador på anslutande delar beräknas med den karakteristiska lastkombinationen, utseende och långsiktig funktion med den kvasipermanenta. Eftersom betong och trä kryper beror nedböjningen dessutom på hur länge lasten verkar (se avsnitt 2.8.6).

2.8.2 Från krökning till nedböjning

Betrakta en kort del $\mathrm{d}x$ av en balk. Plana tvärsnitt förblir plana, så de två ändsnitten roterar i förhållande till varandra med vinkeln $\mathrm{d}\theta$, och balkdelen böjs till en cirkelbåge med krökningsradien r (figur 2.47a). **Krökningen** är vinkeländringen per längdenhet, eller inversen av krökningsradien:

$$\kappa = \frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{2.90}$$

Minustecknet följer av bokens tecken: w är positiv nedåt och $\theta = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ är balkaxelns lutning, medan krökningen är positiv när balken böjs med drag i underkant (som av ett positivt moment). En sådan balk böjs nedåt i mitten, och lutningen *minskar* längs balken.

Sambandet $\theta = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ bygger på **Euler–Bernoullis balkteori**. I den antas tvärsnitten inte bara förbli plana utan också vinkelräta mot den deformerade balkaxeln. Tvärsnittets rotation (vinkeländring) är då lika med axelns lutning, eftersom skjuvdeformationen $\gamma = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x - \theta$ försummas. Med ekv. (2.90) blir sambandet mellan krökning och nedböjning

$$\kappa = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \tag{2.91}$$

Det är ett rent geometriskt samband och gäller för alla material. Antagandet $\gamma = 0$ är bra för slanka balkar. För korta, höga balkar och för trä, som har låg skjuvmodul, läggs skjuvdeformationen till separat (avsnitt 2.11).

Omvänt får man nedböjningen genom att **integrera krökningen två gånger**:

$$\theta(x) = \theta_0 - \int_0^x \kappa \,\mathrm{d}x, \qquad w(x) = w_0 + \int_0^x \theta \,\mathrm{d}x \tag{2.92}$$

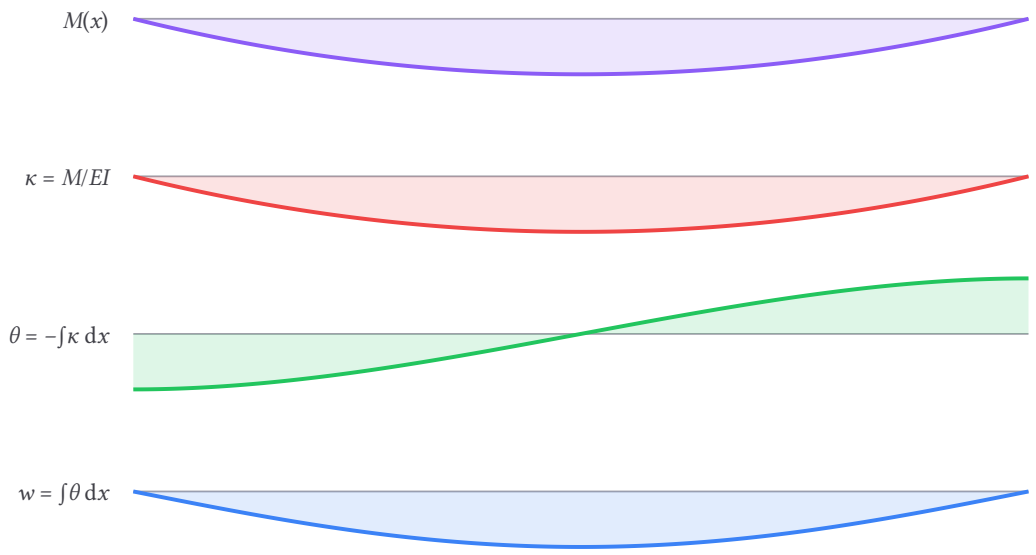
De två integrationskonstanterna, vinkeln θ_0 och nedböjningen w_0 vid $x = 0$, bestäms av hur balken är upplagd:

- **Fritt upplagd balk:** $w = 0$ vid båda stöden.

- **Konsol, inspänd vid $x = 0$:** $w = 0$ och $\theta = 0$ vid inspänningen.
- **Kontinuerlig balk eller inspänning:** vinkeln är densamma på båda sidor om stödet, respektive noll vid inspänningen.

Figur 2.46 visar hela kedjan, från moment via krökning och vinkeländring till nedböjning, för fyra standardfall.

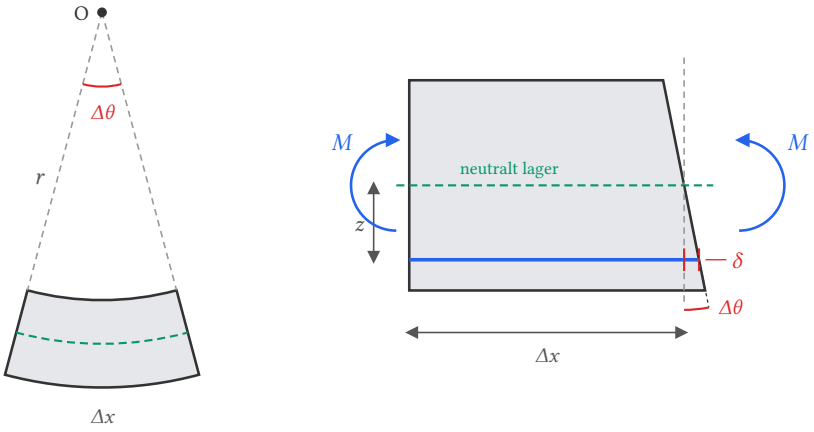
> **Notera:** Det som bestämmer nedböjningen är **krökningsfördelningen** längs balken. Är krökningen känd i varje snitt, så är nedböjningen bestämd, vad krökningen än beror på. Därför kan samma metoder användas för stål, trä och betong, vare sig betongen är sprucken eller inte.



Figur 2.46 Moment, krökning, vinkeländring och nedböjning för några standardfall. Gör den mest påkända delen av balken vekare och se hur krökningen och nedböjningen ändras.

2.8.3 Krökning i ett elastiskt tvärsnitt

Hur stor krökningen blir avgörs av materialet. Figur 2.47b visar balkdelen Δx när ändsnittet har roterat vinkeln $\Delta\theta = \Delta x / r$ kring neutrallagret. En fiber på avståndet z under neutrallagret förlängs då med $\delta = z \cdot \Delta\theta$, och töjningen blir $\varepsilon = \delta / \Delta x = z / r = \kappa\, z$.



a) Krökt balkelement

b) Töjning i en fiber

Figur 2.47 a) Ett balkelement som böjts till en cirkelbåge med radien r. b) Ändsnittets rotation $\Delta\theta$ ger förlängningen δ i en fiber på avståndet z från neutrallagret.

Med en eventuell töjning ε_0 i tyngdpunkten (av en normalkraft) varierar töjningen alltså linjärt över höjden, med krökningen som lutning:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \kappa \cdot z \tag{2.93}$$

där z räknas positiv nedåt från tvärsnittets tyngdpunkt. Krökningen kan därför också uttryckas med töjningarna i två nivåer, till exempel underkant och överkant:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{\ddot{o}}}{h} \tag{2.94}$$

Det sambandet används för armerad betong, där töjningarna beräknas med det ekvivalenta tvärsnittet (stadium I eller II), och för krympning.

För ett linjärt elastiskt material är $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Momentet är summan av spänningarnas moment kring tyngdpunkten, och vid ren böjning ($\varepsilon_0 = 0$) blir det

$$M = \int_A \sigma \cdot z \, \mathrm{d}A = E\kappa \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = EI\kappa \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{M}{EI} \tag{2.95}$$

Produkten EI kallas **böjstyvhet**. Ett elastiskt tvärsnitt med konstant EI har därför samma form på krökningsfördelningen som på momentfördelningen.

2.8.4 Elastiska linjen

Med ekv. (2.91) och ekv. (2.95) fås den elastiska linjens differentialekvation:

$$EI \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -M(x) \tag{2.96}$$

Den löses genom att integrera två gånger och bestämma de två konstanterna med randvillkoren, som i exempel 2.4.

Exempel 2.4 Elastiska linjen för en fritt upplagd balk

En fritt upplagd balk med spännvidden L och konstant böjstyvhet EI bär en jämnt utbredd last q. Bestäm nedböjningslinjen $w(x)$ och den största nedböjningen.

Moment. Stödreaktionerna är $qL/2$, och momentet på avståndet x från vänster stöd är

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(L-x)}{2}$$

Första integrationen. ekv. (2.96) integreras en gång och ger lutningen:

$$EI \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -q\left(\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1$$

Andra integrationen.

$$EI \cdot w(x) = -q\left(\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24}\right) + C_1 x + C_2$$

Randvillkor. $w(0) = 0$ ger $C_2 = 0$, och $w(L) = 0$ ger

$$-q\left(\frac{L^4}{12} - \frac{L^4}{24}\right) + C_1 L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

Nedböjningslinjen.

$$w(x) = \frac{q}{24EI}(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)$$

Största nedböjning. Av symmetriskäl ligger den i mitten, $x = L/2$:

$$w_{max} = \frac{q}{24EI}\left(\frac{L^4}{2} - \frac{L^4}{4} + \frac{L^4}{16}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Det är det första elementarfallet i tabell 2.3. Lutningen vid stödet, $\theta_0 = C_1/EI = qL^3/(24EI)$, är vinkeländringen i samma fall.

Samma räkning för de vanligaste fallen ger **elementarfallen** i tabell 2.3.

Tabell 2.3 Största nedböjning för de vanligaste elementarfallen

Fall	Största nedböjning
Fritt upplagd, jämnt utbredd last q	$\frac{5qL^4}{384EI}$ i mitten
Fritt upplagd, punktlast P i mitten	$\frac{PL^3}{48EI}$ i mitten
Konsol, jämnt utbredd last q	$\frac{qL^4}{8EI}$ i fria änden
Konsol, punktlast P i fria änden	$\frac{PL^3}{3EI}$ i fria änden

Fler fall, med stödreaktioner, inspänningsmoment och vinkeländringar för fyra olika upplagsförhållanden, finns i tabellerna över elementarfall i avsnitt 5.3.

Eftersom differentialekvationen är linjär får nedböjningar från olika laster **adderas** (superposition), så länge materialet är linjärt elastiskt och EI inte beror på lasten. Den förutsättningen gäller för stål och trä men inte för sprucken betong, där böjstyvheten minskar när momentet ökar. Där används i stället krökningsfördelningen direkt (avsnitt 2.9).

2.8.5 Grafisk metod

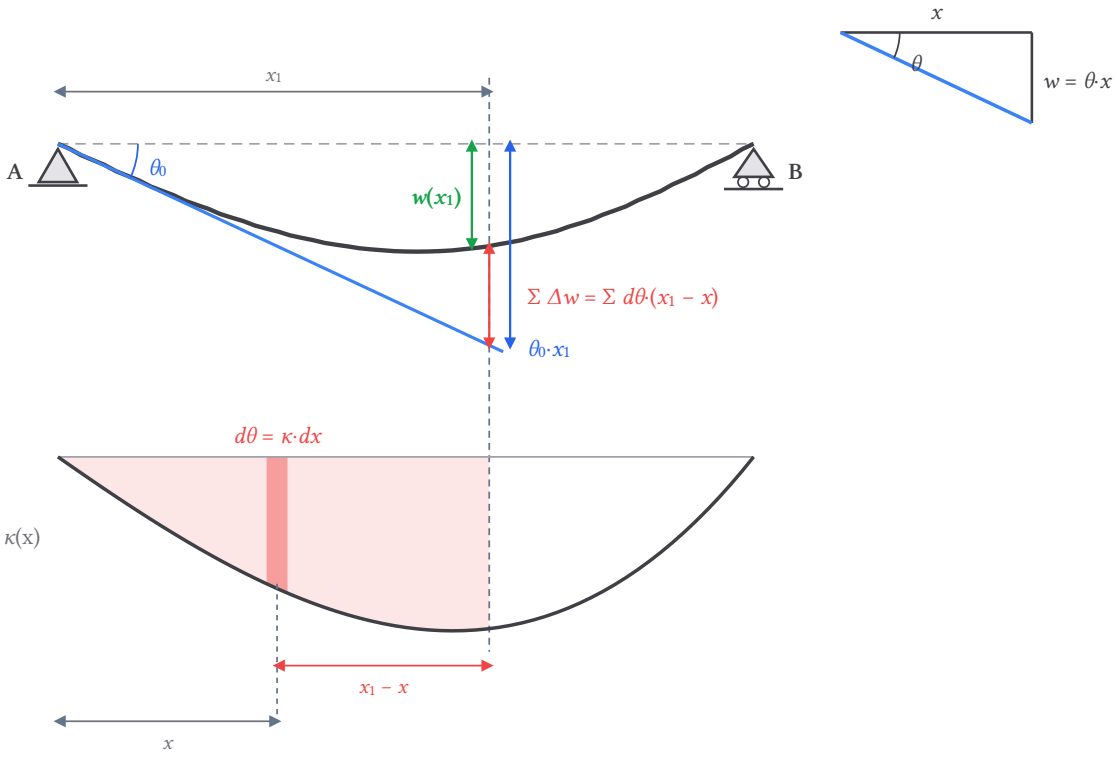
När krökningen inte följer momentet, till exempel i en sprucken betongbalk, är det ofta enklare att integrera krökningsfördelningen grafiskt än att lösa differentialekvationen. Metoden bygger direkt på ekv. (2.92).

Nedböjning som summa av vinkeländringar

Med $w_0 = 0$ vid stödet ger ekv. (2.92), efter en partiell integration, nedböjningen i ett snitt x_1:

$$w(x_1) = \theta_0 \cdot x_1 - \int_0^{x_1} \kappa(x)\,(x_1 - x)\,\mathrm{d}x \tag{2.97}$$

De två termerna kan tolkas geometriskt, se figur 2.48. En förskjutning är en vinkel gånger ett avstånd. Den första termen är stödvinkeln θ_0 gånger avståndet x_1, alltså nedböjningen om balken vore rak och bara vreds vid stödet. I den andra termen ger varje kort del $\mathrm{d}x$ vinkeländringen $\mathrm{d}\theta = \kappa\,\mathrm{d}x$, och den lyfter snittet x_1 med $\mathrm{d}\theta \cdot (x_1 - x)$. Integralen summerar alla dessa bidrag.



Figur 2.48 Nedböjningen i snittet x_1 som stödvinkeln gånger x_1 minus summan av bidragen från vinkeländringarna längs balken.

Integralen i ekv. (2.97) är det statiska momentet av krökningsdiagrammet mellan snitten 0 och x_1, räknat kring snittet x_1. Den kan därför ersättas av delarean gånger avståndet från dess tyngdpunkt till snittet x_1 (jämför avsnitt 5.1):

$$w(x_1) = \theta_0 \cdot x_1 - A_x\,(x_1 - x_C) \tag{2.98}$$

där

- A_x är arean av krökningsdiagrammet mellan snittet 0 och snittet x_1, där nedböjningen söks;
- x_C är avståndet från snittet 0 till tyngdpunkten av arean A_x
- θ_0 är stödvinkeln. För en symmetrisk fritt upplagd balk är lutningen noll i mitten, så ekv. (2.92) ger att θ_0 är lika med krökningsarean mellan stödet och mitten.

Bidrag från flera krökningsfördelningar, till exempel från olika laster eller från krympning, kan beräknas var för sig och adderas.

Fritt upplagd balk med symmetrisk krökningsfördelning

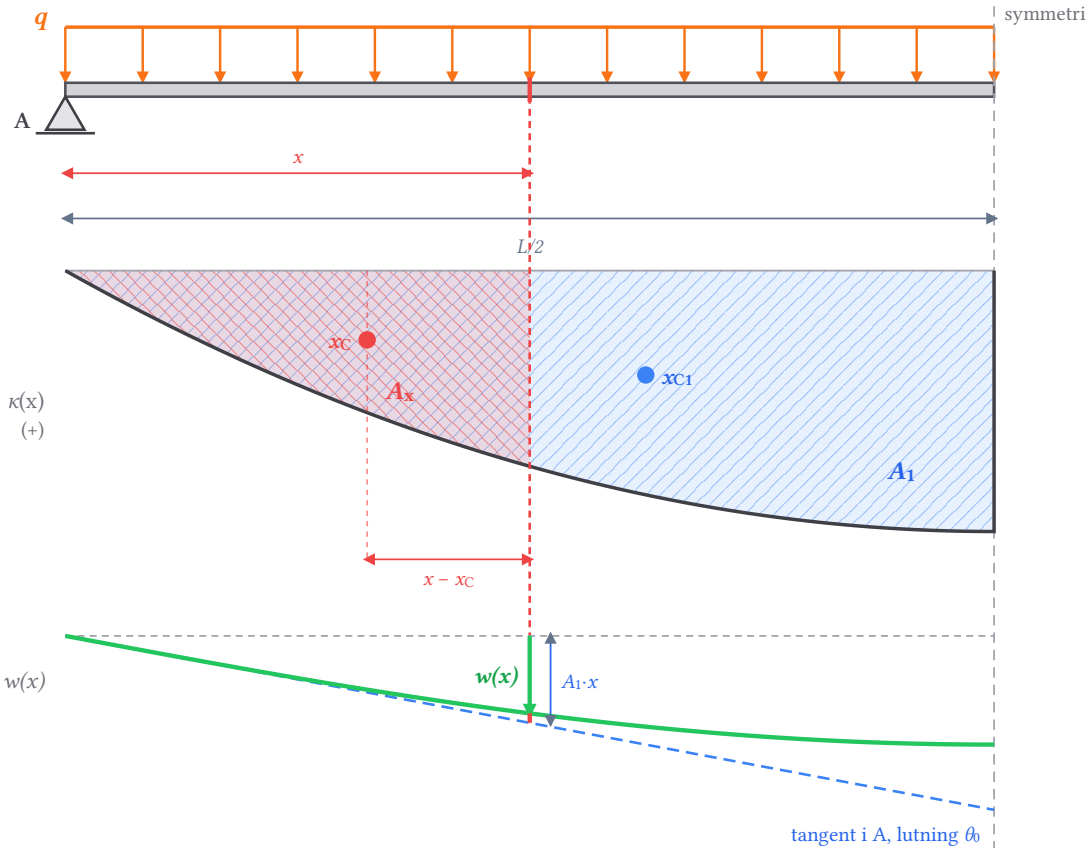
Den största nedböjningen ligger i mitten, $x_1 = L/2$. Med $\theta_0 = A/2$, där A är krökningsdiagrammets area över hela spännvidden, ger ekv. (2.98)

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{A}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{A}{2}\left(\frac{L}{2} - x_C\right) = \frac{A}{2} \cdot x_C \tag{2.99}$$

där x_C är avståndet från stödet till tyngdpunkten av den halva arean $A/2$. Med flera krökningsfördelningar i blir

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \sum_i \frac{A_i}{2} \cdot x_{C,i}$$

Figur 2.49 visar metoden för en jämnt utbredd last.



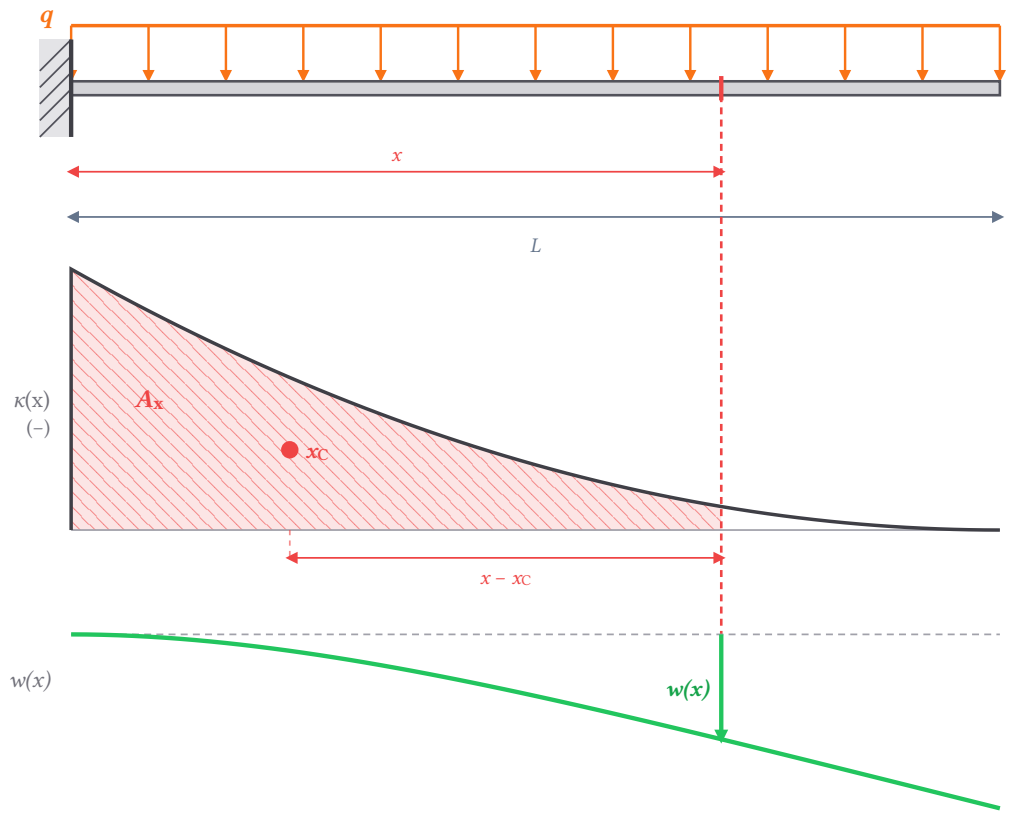
Figur 2.49 Grafisk metod för en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last: krökningsareor och nedböjning i ett valfritt snitt.

Fast inspänd konsol

För en konsol som är inspänd vid $x = 0$ är $\theta_0 = 0$, och den största nedböjningen ligger i fria änden, $x_1 = L$. Ekv. (2.98) ger

$$w(L) = -A\,(L - x_C) = |\ A\ |\,(L - x_C) \tag{2.100}$$

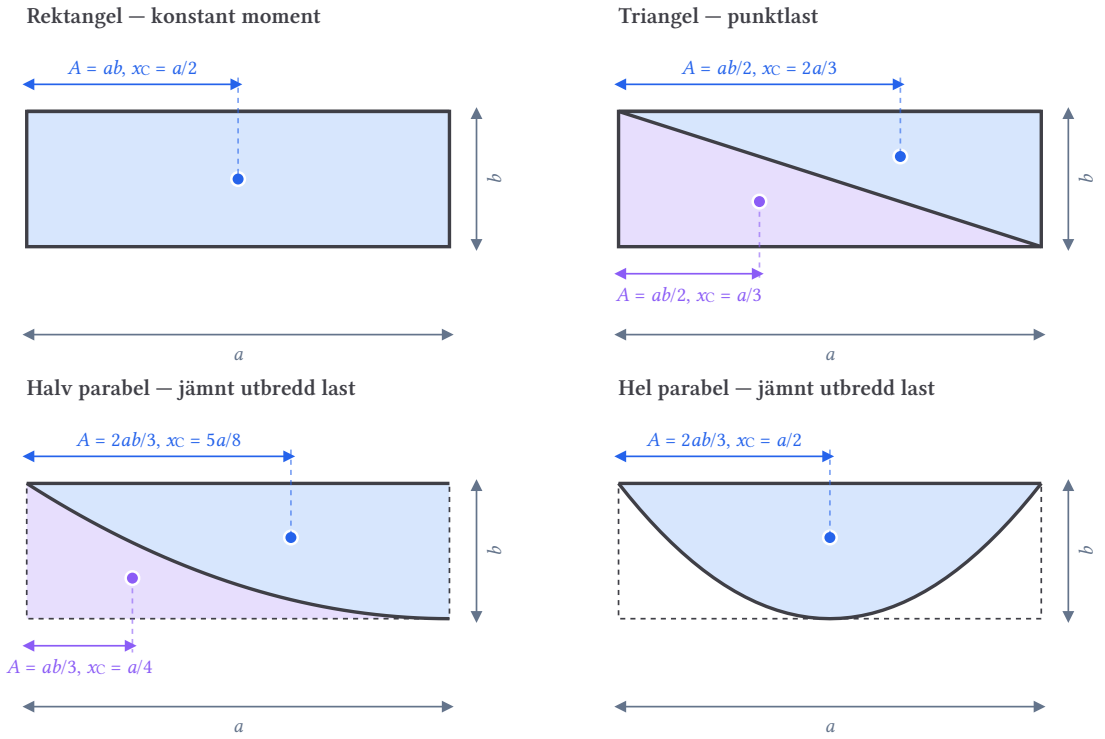
där A är krökningsdiagrammets area längs hela konsolen och x_C avståndet från inspänningen till dess tyngdpunkt. Krökningen i en konsol är negativ (drag i överkant), så A är negativ och nedböjningen blir positiv, det vill säga nedåt. Med flera krökningsfördelningar blir $w(L) = \sum_i |\ A_i|\,(L - x_{C,i})$. Figur 2.50 visar metoden för en jämnt utbredd last.



Figur 2.50 Grafisk metod för en konsol med jämnt utbredd last.

Areor och tyngdpunkter

Areor och tyngdpunkter för de krökningsfördelningar som oftast förekommer finns i figur 2.51.



Figur 2.51 Area och tyngdpunktens läge för vanliga krökningsfördelningar.

2.8.6 Tid och lastkombinationer

En del av nedböjningen kommer genast när lasten läggs på, en del växer fram med tiden. Med samma beteckningar som i avsnitt 1.3 delas den totala nedböjningen upp i

$$w_{tot} = w_1 + w_2 + w_3 \tag{2.101}$$

där w_1 är den momentana nedböjningen av permanent last och av den kvasipermanenta delen av den variabla lasten, w_2 tillskottet från krypning (och krympning) och w_3 den momentana nedböjningen av resten av den variabla lasten. Hur de olika delarna beräknas skiljer sig mellan materialen:

Tabell 2.4 Hur nedböjningens delar beräknas för olika material

Material	Momentan nedböjning	Långtidstillskott
Stål	$\kappa = M/(EI)$	inget, stål kryper inte vid normala temperaturer
Trä	$\kappa = M/(E_{0,mean} I)$	krypning: $w_2 = k_{def} \cdot w_1$
Betong	krökning i stadium I eller II	krypning ($E_{c,eff}$) och krympning

En eventuell överhöjning w_0 dras av: $w_{max} = w_{tot} - w_0$. Detaljerna för respektive material finns i de följande avsnitten.

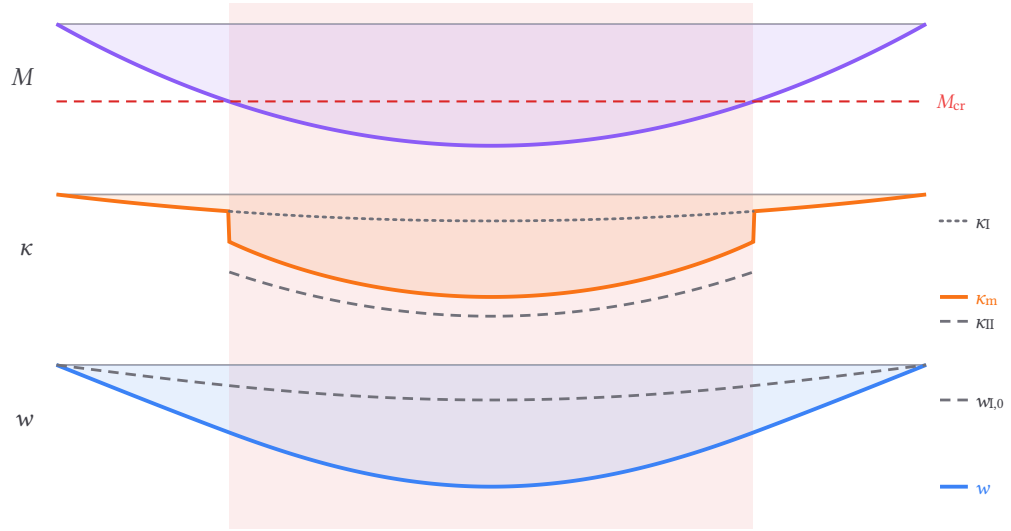
2.9 Nedböjning av armerade betongbalkar

För en stål- eller träbalk är krökningen $M/(EI)$ med en konstant böjstyvhet, och nedböjningen följer direkt av elementarfallen. En armerad betongbalk är svårare: böjstyvheten varierar längs balken och ändras med tiden. Med tankegången från avsnitt 2.8 blir uppgiften ändå enkel att formulera: **bestäm krökningen i varje snitt och integrera.** Fyra saker påverkar krökningsfördelningen:

1. **Sprickbildning:** där momentet överstiger sprickmomentet spricker betongen och krökningen ökar kraftigt.

2. **Armeringens avkortning:** mindre armering ger mindre böjstyvhet i sprucket tillstånd.
3. **Krypning:** betongen fortsätter att deformeras under långtidslast.
4. **Krympning:** betongen krymper medan armeringen håller emot, vilket ger en krökning även utan last.

Figur 2.52 visar hur de fyra effekterna ändrar krökningsfördelningen och nedböjningen för en balk.



Figur 2.52 Moment, krökning och nedböjning för en armerad betongbalk. Slå på sprickbildning, avkortning, krypning och krympning en i taget och se hur krökningsfördelningen och nedböjningen ändras.

Nedböjningen beräknas för den kvasipermanenta lastkombinationen när den gäller långtidsverkan och utseende. Tvärsnittens egenskaper i stadium I och II beräknas som i avsnitt 2.1, avsnitt 2.2 och avsnitt 2.3.

2.9.1 Sprickbildning

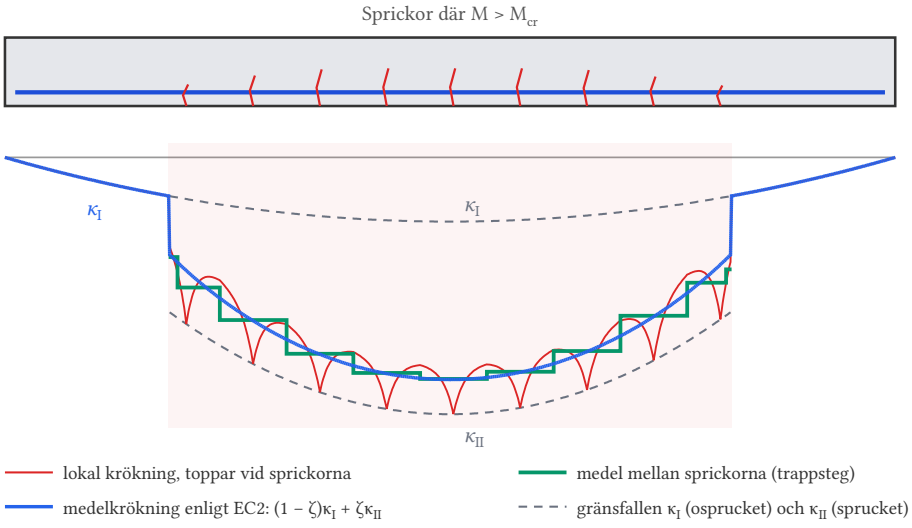
Så länge momentet är mindre än sprickmomentet M_{cr} är tvärsnittet osprucket (stadium I):

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm,fl} \cdot I_I}{h - x_I}, \qquad \kappa_I = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_I} \tag{2.102}$$

där I_I och x_I är det ekvivalenta tvärsnittets tröghetsmoment och tyngdpunktsläge i stadium I och $f_{ctm,fl}$ ges av ekv. (1.13). Där $M > M_{cr}$ spricker balken. I ett snitt genom en spricka bär bara tryckzonen och armeringen (stadium II), med krökningen

$$\kappa_{II} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_{II}} \tag{2.103}$$

Krökningen är alltså inte densamma längs den spruckna delen, se figur 2.53. Vid varje spricka bär armeringen hela dragkraften och krökningen når nästan κ_{II}. Mellan sprickorna för vidhäftningen över en del av dragkraften till betongen, som då medverkar, och krökningen sjunker mot κ_I. För nedböjningen spelar bara **medelkrökningen** över en sträcka med flera sprickor roll, och den ligger mellan de två gränsfallen.



Figur 2.53 Krökningen längs en sprucken balk. Lokalt (rött) har den toppar vid sprickorna, där bara armeringen bär dragkraften, och lägre värden mellan dem. Medelvärdet över varje del mellan två sprickor (grönt) ger en trappstegsformad fördelning. EC2:s interpolation mellan κ_I och κ_{II} (blått) är en jämn, teoretisk version av samma medelvärde.

EC2 9.3.4, formel (9.28)–(9.29), interpolerar medelkrökningen mellan gränsfallen:

$$\kappa = (1-\zeta)\,\kappa_I + \zeta\,\kappa_{II}, \qquad \zeta = 1 - \beta_t \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \tag{2.104}$$

med $\zeta = 0$ för osprucket tvärsnitt och $\beta_t = 1{,}0$ för en enstaka korttidslast eller 0,5 för långtidslast och upprepad last. Faktorn ζ beskriver hur stor del av tvärsnittet som "räknas som sprucket"; den kallas också **tension stiffening**, betongens medverkan mellan sprickorna.

Exempel 2.5 Krökning i ett sprucket mittsnitt

Balken i figur 2.52 är fritt upplagd med spännvidden $L = 6$ m och har tvärsnittet 300×500 mm. Den är armerad med 4 ϕ16 ($A_s = 804$ mm²) på djupet $d = 450$ mm och gjuten i C30/37. Den kvasipermanenta lasten är $q = 15$ kN/m. Bestäm krökningen i mittsnittet för långtidslast, utan krypning.

Material. $E_{cm} = 31{,}9$ GPa, $E_s = 200$ GPa och $\alpha = E_s/E_{cm} = 6{,}26$. Med $h = 500$ mm ger ekv. (1.13) $f_{ctm,fl} = 1{,}1 \cdot 2{,}9 = 3{,}19$ MPa.

Tvärsnittskonstanter. Med det ekvivalenta tvärsnittet (avsnitt 2.2) blir

$$I_I = 3\,290 \cdot 10^6 \text{mm}^4, \quad x_I = 256 \text{ mm}, \qquad I_{II} = 715 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Sprickmoment. ekv. (2.102) ger

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm,fl} \cdot I_I}{h - x_I} = \frac{3{,}19 \cdot 3\,290 \cdot 10^6}{500 - 256} = 42{,}9 \text{ kNm}$$

Moment i mitten.

$$M = \frac{qL^2}{8} = \frac{15 \cdot 6^2}{8} = 67{,}5 \text{ kNm} > M_{cr}$$

så mittsnittet är sprucket.

Krökningar i gränsfallen. ekv. (2.102) och ekv. (2.103) ger

$$\kappa_I = \frac{67{,}5 \cdot 10^6}{31\,900 \cdot 3\,290 \cdot 10^6} = 0{,}64 \cdot 10^{-6} \text{mm}^{-1}$$

$$\kappa_{II} = \frac{67{,}5 \cdot 10^{6}}{31\,900 \cdot 715 \cdot 10^{6}} = 2{,}96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{mm}^{-1}$$

Fördelningsfaktor. Långtidslast ger $\beta_t = 0{,}5$, och ekv. (2.104) ger

$$\zeta = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{42{,}9}{67{,}5}\right)^{2} = 0{,}80$$

Medelkrökning.

$$\kappa = 0{,}20 \cdot 0{,}64 \cdot 10^{-6} + 0{,}80 \cdot 2{,}96 \cdot 10^{-6} = 2{,}49 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{mm}^{-1}$$

Krökningen är nästan fyra gånger så stor som i osprucket tillstånd. Sprickbildningen dominerar alltså nedböjningen, och betongen mellan sprickorna minskar krökningen bara med ungefär 15 % jämfört med κ_{II}.

2.9.2 Armeringens avkortning

Armeringen dimensioneras för det största momentet och avkortas ofta där momentet är mindre. I spruckna zoner styrs krökningen av armeringen, och det finns två sätt att skriva krökningen i ett sprucket snitt. Med böjstyvheten är den

$$\kappa_{II} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_{II}} \tag{2.105}$$

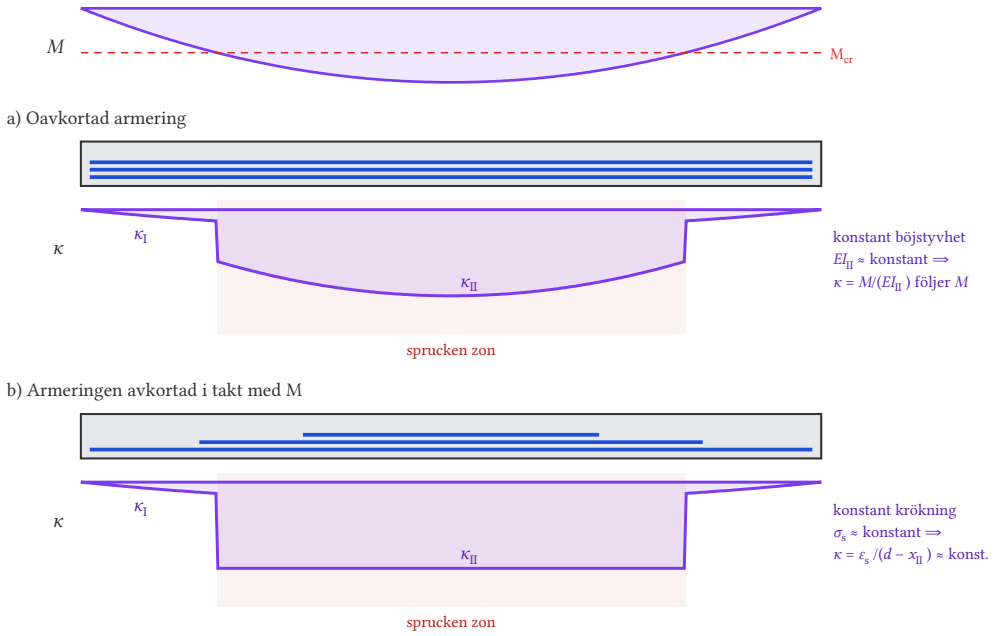
och med töjningarna, eftersom tvärsnittet roterar kring neutrallagret,

$$\kappa_{II} = \frac{\varepsilon_s}{d - x_{II}} = \frac{\sigma_s}{E_s \cdot (d - x_{II})}, \qquad \sigma_s \approx \frac{M}{A_s \cdot z} \tag{2.106}$$

Vilket uttryck som är enklast att tolka beror på armeringen, se figur 2.54:

- **Oavkortad armering, konstant böjstyvhet.** A_s och därmed x_{II} och I_{II} är desamma längs hela den spruckna delen. Enligt ekv. (2.105) är krökningen då proportionell mot momentet och följer momentkurvan.
- **Armering avkortad i takt med momentet, konstant krökning.** Om A_s minskar i samma takt som M blir stålspänningen $\sigma_s \approx M/(A_s z)$ ungefär densamma i alla spruckna snitt. Enligt ekv. (2.106) blir då även krökningen nästan konstant, trots att momentet minskar. Böjstyvheten $E_{cm} I_{II}$ är i stället inte längre konstant, utan minskar i takt med momentet.

Krökningsfördelningen blir alltså flatare med avkortad armering, och nedböjningen större än för en balk med oavkortad armering.



Figur 2.54 Momentet (överst) och krökningen längs en fritt upplagd balk. a) Oavkortad armering: i den spruckna zonen är böjstyvheten ungefär konstant, så krökningen följer momentet. b) Armering som avkortas i takt med momentet: böjstyvheten minskar där momentet minskar, och krökningen blir nästan konstant i den spruckna zonen.

Samma effekt kan ses i figur 2.52 genom att slå på avkortningen.

2.9.3 Krypning

Under långtidslast kryper betongen i tryckzonen. Det beaktas genom att räkna med den effektiva elasticitetsmodulen ekv. (1.23) i stället för E_{cm}, både i κ_I och κ_{II}, och med motsvarande effektiva modulförhållande $\alpha_{ef} = E_s/E_{c,eff}$ när tvärsnittets egenskaper beräknas. Krökningen ökar, och neutrallagret flyttas nedåt eftersom armeringen får större vikt. Med kryptalet 2 blir krökningen i balken ovan drygt 30 % större i det spruckna mittsnittet men ungefär 2,5 gånger så stor i ett osprucket snitt: i sprucket tillstånd styrs böjstyvheten till stor del av armeringen, som inte kryper.

2.9.4 Krympning

Betongen krymper, men armeringen hindrar krympningen. Armeringen trycks då ihop och betongen kring den dras, vilket ger en krökning **även utan last**: en enkelarmerad balk böjer ned. Enligt EC2 9.3.4 och formel (9.24) är krympkrökningen

$$\kappa_{cs} = \varepsilon_{cs} \cdot \frac{E_s}{E_{c,eff}} \cdot \frac{S}{I} \tag{2.107}$$

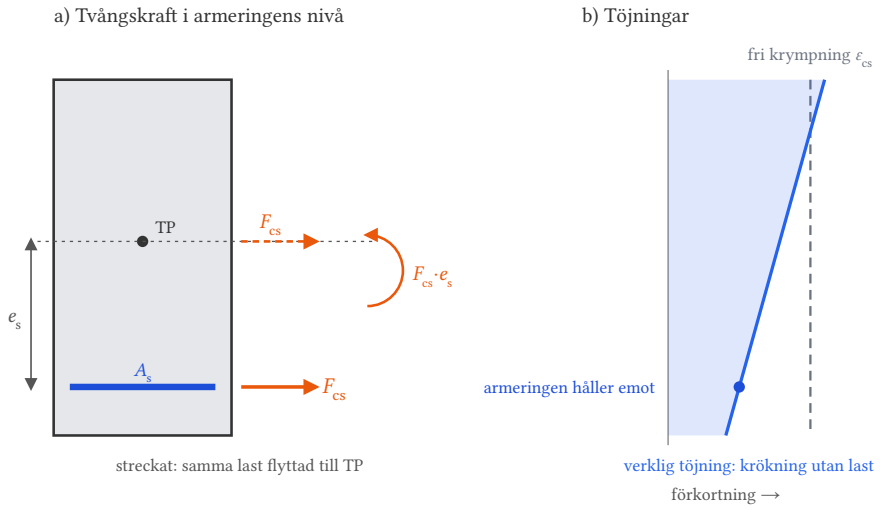
där ε_{cs} är krympningen (avsnitt 1.6), S armeringens statiska moment kring det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt och I dess tröghetsmoment. Krympkrökningen beräknas för både osprucket och sprucket tillstånd och viktas med samma ζ som lastkrökningen. Den adderas till lastkrökningen.

Formeln kan också förstås som en last på tvärsnittet, se figur 2.55. Armeringen hindrar betongen kring den från att krympa fritt. Det motsvarar en fiktiv kraft som drar i tvärsnittet i armeringens nivå (själva armeringen blir tryckt),

$$F_{cs} = E_s \, \varepsilon_{cs} \, A_s$$

som verkar med excentriciteten e_s under det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt. Flyttad till tyngdpunkten blir den en normalkraft F_{cs} och momentet $F_{cs}\, e_s$ och krökningen $F_{cs}\, e_s/(E_{c,eff} I)$. Eftersom $A_s e_s = S$ är

det samma sak som ekv. (2.107). Med flera armeringslager summeras bidragen, och tryckarmering minskar krympkrökningen. På samma sätt kan krympningens inverkan på spänningarna beräknas med Naviers formel (Naviers formel).



Figur 2.55 Krympning i ett enkelarmerat tvärsnitt. a) Armeringens tvång ersätts av kraften $F_{cs} = E_s\,\varepsilon_{cs}\,A_s$ i armeringens nivå, det vill säga en normalkraft i tyngdpunkten och momentet $F_{cs}\,e_s$. b) Den fria krympningen är lika stor över hela höjden (streckat). Den verkliga töjningen hålls tillbaka mest vid armeringen, så tvärsnittet får en krökning utan yttre last.

Hur krympkrafterna ser ut med flera armeringslager, och hur spänningarna beräknas, visas i avsnitt 2.7.

2.9.5 Beräkningsgång

1. Bestäm momentfördelningen $M(x)$ för den aktuella lastkombinationen.
2. Beräkna M_{cr} och avgör var balken är sprucken ($M > M_{cr}$).
3. Beräkna krökningen i ett antal snitt med ekv. (2.104), med $E_{c,eff}$ om lasten är långvarig, och lägg till krympkrökningen ekv. (2.107).
4. Integrera krökningsfördelningen, till exempel med den grafiska metoden i avsnitt 2.8.5.

Som ett snabbare överslag tillåter EC2 9.3.4(7) att interpolationen görs direkt på nedböjningen: beräkna nedböjningen som om balken vore helt osprucken (w_I) respektive helt sprucken (w_{II}) längs hela spännvidden med elementarfall och vikta med ζ i det mest påkända snittet:

$$w \approx (1-\zeta)\,w_I + \zeta\,w_{II} \tag{2.108}$$

Exempel 2.6 Överslag på nedböjningen

Uppskatta nedböjningen för balken i exempel 2.5 med överslaget ekv. (2.108), och jämför med integration av krökningsfördelningen.

Helt osprucken balk. Elementarfallet i tabell 2.3 ger

$$w_I = \frac{5qL^4}{384E_{cm}I_I} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 6\,000^4}{384 \cdot 31\,900 \cdot 3\,290 \cdot 10^6} = 2{,}4 \text{ mm}$$

Helt sprucken balk. Nedböjningen är omvänt proportionell mot tröghetsmomentet:

$$w_{II} = w_I \cdot \frac{I_I}{I_{II}} = 2{,}4 \cdot \frac{3\,290}{715} = 11{,}1 \text{ mm}$$

Interpolation. Med $\zeta = 0{,}80$ i det mest påkända snittet:

$$w \approx 0{,}20 \cdot 2{,}4 + 0{,}80 \cdot 11{,}1 = 9{,}3 \text{ mm}$$

Jämförelse. Integration av krökningsfördelningen (figur 2.52) ger 8,4 mm. Överslaget ligger på säkra sidan, eftersom det behandlar hela balken som om den vore lika sprucken som mittsnittet, fast balken nära stöden är osprucken. Båda värdena ligger under $L/300 = 20$ mm.

2.10 Nedböjning av stålbalkar

Stål är linjärt elastiskt i bruksgränstillståndet och kryper inte vid normala temperaturer. Böjstyvheten EI är därför konstant längs balken och oberoende av lasten, krökningen är $M/(EI)$ och nedböjningen kan beräknas direkt med elementarfallen i avsnitt 2.8.4. Med $E = 210\,000$ MPa (avsnitt 1.4) och tröghetsmomentet I ur profiltabeller är det i regel en kort räkning.

2.10.1 Laster och lastkombinationer

Eftersom materialet är linjärt får nedböjningen från varje last beräknas för sig och adderas. Det är praktiskt att räkna med en nedböjning per lastslag, till exempel w_G från permanent last och w_Q från variabel last, och sedan kombinera dem efter vad kravet gäller:

- **Karakteristisk kombination**, för krav som skyddar mot bestående skador på anslutande delar: $w = w_G + w_Q$.
- **Frekvent kombination**, för krav på funktion och komfort som är reversibla: $w = w_G + \psi_1 w_Q$.
- **Kvasipermanent kombination**, för utseende och långsiktig funktion: $w = w_G + \psi_2 w_Q$.

Faktorerna ψ beror på lasttypen; för nyttig last i bostäder är till exempel $\psi_1 = 0{,}5$ och $\psi_2 = 0{,}3$.

Ofta är det bara den **variabla** delen av nedböjningen som verkligen besvärar, eftersom den permanenta delen kan kompenseras med en **överhöjning** w_0: balken tillverkas med en uppåtböjning som motsvarar egentyngdens nedböjning. Kravet gäller då $w_{max} = w_{tot} - w_0$. Om bärverksdelen bär upp ömtåliga delar, till exempel glas eller tunna mellanväggar, är det i stället nedböjningen **efter** att de monterats som ska begränsas.

Exempel 2.7 Nedböjning av en stålbalk

En fritt upplagd IPE 300 i S355 har spännvidden $L = 6{,}0$ m. Den bär den karakteristiska permanenta lasten $g_k = 5{,}0$ kN/m, inklusive egentyngden, och den variabla lasten $q_k = 8{,}0$ kN/m. Kontrollera nedböjningen mot kravet $L/300$ i den karakteristiska lastkombinationen.

Indata. Profiltabellen ger $I_y = 83{,}56 \cdot 10^6$ mm⁴, och $E = 210\,000$ MPa.

Nedböjning av den permanenta lasten. Elementarfallet för jämnt utbredd last (tabell 2.3) ger

$$w_G = \frac{5 g_k L^4}{384 E I_y} = \frac{5 \cdot 5{,}0 \cdot 6\,000^4}{384 \cdot 210\,000 \cdot 83{,}56 \cdot 10^6} = 4{,}8 \text{ mm}$$

Nedböjning av den variabla lasten. Nedböjningen är proportionell mot lasten:

$$w_Q = w_G \cdot \frac{q_k}{g_k} = 4{,}8 \cdot \frac{8{,}0}{5{,}0} = 7{,}7 \text{ mm}$$

Karakteristisk kombination. Stål kryper inte, så nedböjningarna adderas direkt:

$$w = w_G + w_Q = 4{,}8 + 7{,}7 = 12{,}5 \text{ mm} < \frac{L}{300} = 20 \text{ mm}$$

Kravet är uppfyllt med god marginal. Om balken tillverkas med en överhöjning på 5 mm, som tar ut ungefär den permanenta lastens nedböjning, blir den synliga nedböjningen bara 7,5 mm.

> **Notera:** Nedböjningen är omvänt proportionell mot I men växer med spännvidden upphöjd till fyra. En 20 % längre balk böjer ned dubbelt så mycket. Därför är det ofta nedböjningen och inte bärförmågan som bestämmer profilen för långa, lätt belastade balkar.

2.11 Nedböjning av träbalkar

En träbalk är, liksom en stålbalk, linjärt elastisk i bruksgränstillståndet, och den momentana nedböjningen beräknas med elementarfallen och medelvärdet av elasticitetsmodulen $E_{0,mean}$ (avsnitt 1.2). Två saker skiljer trä från stål: träet **kryper**, och det är relativt **vekt i skjuvning**.

2.11.1 Krypning

Krypningen beskrivs med deformationsfaktorn k_{def} (avsnitt 1.3), som beror på klimatklass och material. Bara den del av lasten som verkar länge ger krypning: hela den permanenta lasten och den kvasipermanenta delen ψ_2 av den variabla. Med beteckningarna i ekv. (2.101) och EC5 9.2 blir, för en permanent last och en variabel last,

$$w_1 = w_G + \psi_2\, w_Q, \qquad w_2 = k_{def}\cdot w_1, \qquad w_3 = (1-\psi_2)\, w_Q \tag{2.109}$$

där w_G och w_Q är de momentana nedböjningarna av respektive last. Summan $w_{tot} = w_1 + w_2 + w_3$ kan också skrivas

$$w_{tot} = w_G(1 + k_{def}) + w_Q(1 + \psi_2 k_{def}) \tag{2.110}$$

vilket är EC5:s karakteristiska kombination, formel (9.3). Den används för krav som skyddar anslutande delar. För utseende och långsiktig funktion används den kvasipermanenta kombinationen, $w = (w_G + \psi_2 w_Q)(1+k_{def})$.

I klimatklass 1 är $k_{def} = 0{,}6$, så den permanenta lastens nedböjning ökar med 60 % med tiden. I klimatklass 3 är $k_{def} = 2{,}0$ och nedböjningen tredubblas.

2.11.2 Skjuvdeformation

Elementarfallen tar bara med böjdeformationen. Trä har en låg skjuvmodul i förhållande till elasticitetsmodulen ($G_{mean}/E_{0,mean} \approx 1/16$ mot $1/2{,}6$ för stål), så för korta och höga balkar ger skjuvningen ett märkbart tillskott. För en fritt upplagd balk med rektangulärt tvärsnitt och jämnt utbredd last är skjuvnedböjningen

$$w_v = \frac{1{,}2\cdot M_{max}}{G_{mean}\cdot A} \tag{2.111}$$

där faktorn 1,2 tar hänsyn till att skjuvspänningen inte är jämnt fördelad över tvärsnittet. För en balk med $L/h \approx 18$ ger den några procent; för $L/h \approx 8$, till exempel en kort limträbalk, kan den vara ungefär 25 % av böjnedböjningen.

Exempel 2.8 Nedböjning av bjälklagsreglar

Bjälklagsreglar av konstruktionsvirke C24 med tvärsnittet 45 × 220 mm och centrumavståndet 600 mm spänner $L = 4{,}0$ m i ett bostadshus. Lasterna per regel är $g_k = 0{,}3$ kN/m och $q_k = 1{,}2$ kN/m. Kontrollera den slutliga nedböjningen mot kravet $L/300$.

Indata. Klimatklass 1 ger $k_{def} = 0{,}6$ (tabell 1.7) och bostäder $\psi_2 = 0{,}3$. C24 har $E_{0,mean} = 11\,000$ MPa och $G_{mean} = 690$ MPa (tabell 1.2). Tvärsnittet har

$$A = 45\cdot 220 = 9\,900\,\text{mm}^2, \qquad I = \frac{45\cdot 220^3}{12} = 39{,}9\cdot 10^6\,\text{mm}^4$$

Böjnedböjning. Elementarfallet för jämnt utbredd last ger för den permanenta lasten

$$w_{b,G} = \frac{5 g_k L^4}{384 E_{0,mean} I} = \frac{5\cdot 0{,}3\cdot 4\,000^4}{384\cdot 11\,000\cdot 39{,}9\cdot 10^6} = 2{,}28\ \text{mm}$$

och för den variabla, som är fyra gånger större, $w_{b,Q} = 9{,}11$ mm.

Skjuvnedböjning. Med $M_{max} = g_k L^2/8 = 0{,}6$ kNm ger ekv. (2.111)

$$w_{v,G} = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^6}{690 \cdot 9\,900} = 0{,}11 \text{ mm}$$

och $w_{v,Q} = 0{,}42$ mm. Skjuvningen ger här bara ungefär 5 %, eftersom regeln är slank ($L/h = 18$). Summan av böj- och skjuvdelen blir $w_G = 2{,}38$ mm och $w_Q = 9{,}53$ mm.

Uppdelning enligt EC5. ekv. (2.109) ger

$$w_1 = 2{,}38 + 0{,}3 \cdot 9{,}53 = 5{,}24 \text{ mm}, \qquad w_2 = 0{,}6 \cdot 5{,}24 = 3{,}14 \text{ mm}$$

$$w_3 = (1 - 0{,}3) \cdot 9{,}53 = 6{,}67 \text{ mm}$$

Slutlig nedböjning.

$$w_{tot} = 5{,}24 + 3{,}14 + 6{,}67 = 15{,}1 \text{ mm} > \frac{L}{300} = 13{,}3 \text{ mm}$$

Kravet är **inte** uppfyllt, trots att den momentana nedböjningen $w_G + w_Q = 11{,}9$ mm hade klarat det. Det är krypningen som gör skillnaden. Med reglar 45×245 mm blir $w_{tot} = 11{,}0$ mm, och kravet uppfylls.

Kapitel 3

3 Förband och förankring

Inledning

3.1 Förband och förankring – allmänt

En bärande konstruktion byggs nästan alltid av delar: balkar, pelare, stänger och plattor som tillverkas, transporteras och monteras var för sig. Där delarna möts måste krafterna föras vidare från den ena delen till den andra. Det sker i **förband**. I armerad betong behöver armeringen på motsvarande sätt föra över sin kraft till betongen och till annan armering, vilket kallas **förankring**.

Kapitlet är uppdelat efter material:

- **Stål** (avsnitt 3.2 till avsnitt 3.6): skruvförband och svetsförband, deras brottyper och bärförmåga, och hur en last fördelas mellan skruvarna i ett förband eller längs en svets.
- **Trä** (avsnitt 3.7 till avsnitt 3.9): olika typer av träförband och framför allt förband med stavformiga förbindare, som spik, skruv och dymlingar, vars bärförmåga beräknas med Johansens ekvationer.
- **Betong** (avsnitt 3.10 till avsnitt 3.12): hur stor dragkraft armeringen måste bära längs en balk, hur den kraften förs över till betongen genom vidhäftning, och hur armeringen därför får avkortas och skarvas.

3.1.1 Varför förbanden är viktiga

Förbanden är ofta den del av en konstruktion som kräver mest arbete, både vid dimensioneringen och i verkstaden. I en stålstomme kan de stå för en stor del av kostnaden, ibland uppemot 40 % av hela stommens kostnad. Ett förband som är enkelt att tillverka och montera, till exempel ett skruvat förband utan avstyvningar, kan därför vara mer ekonomiskt än ett styvare och tyngre förband, även om bärverket då kräver något mer material.

Förbanden är också ofta den svaga länken. Många skador och haverier börjar i ett förband: en svets som spricker, en skruvgrupp som får större last än avsett eller armering som inte är tillräckligt förankrad vid ett upplag.

3.1.2 Krav på ett förband

Ett förband ska

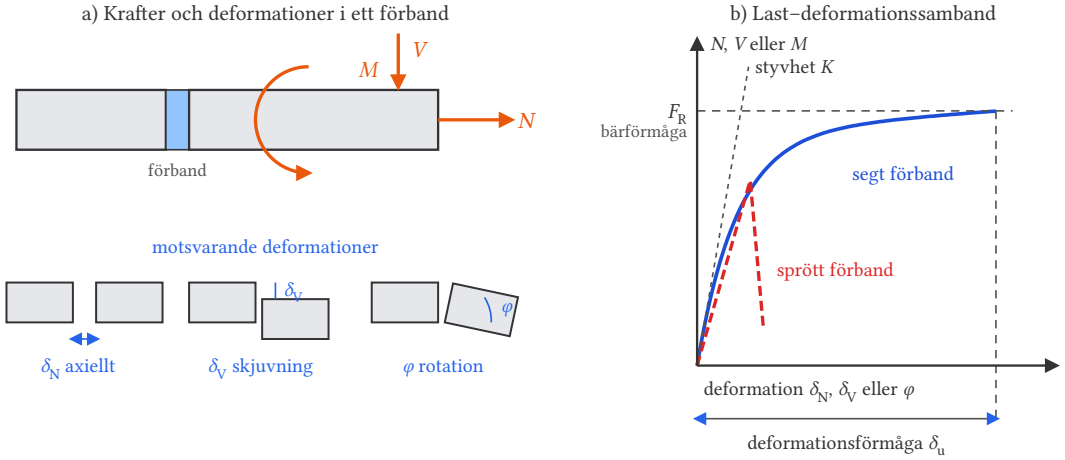
- **ha tillräcklig bärförmåga** för de krafter och moment som ska föras över, med en brottyp som helst är seg, så att förbandet varnar genom stora deformationer innan det går till brott;
- **bete sig som beräkningsmodellen förutsätter**, det vill säga föra över de krafter som modellen förutsätter, med tillräcklig styvhet, och kunna deformeras fritt i övrigt (avsnitt 3.1.3);
- **föra krafterna den enklaste vägen.** Raka och korta kraftvägar utan onödiga excentriciteter ger ett förband som är lätt att beräkna och som fungerar som man tror;
- **vara möjligt att tillverka, montera och kontrollera**, till exempel med plats för verktyg vid skruvarna och svetsar som kan utföras i ett bra svetsläge;
- **vara beständigt**, så att korrosion, fukt i trä eller sprickor i betong inte sänker bärförmågan med tiden.

3.1.3 Bärförmåga, styvhet och deformationsförmåga

Ett förband för över krafter mellan två delar: normalkraft N, tvärkraft V och moment M, se figur 3.1a. För varje kraft som förbandet ska föra över finns en motsvarande deformation i förbandet: en glidning δ_N i kraftens riktning, en glidning δ_V tvärs delen eller en rotation φ mellan delarna. Sambandet mellan kraften och deformationen (figur 3.1b) beskriver förbandets mekaniska egenskaper:

- **Bärförmåga** F_R: den största kraft, eller det största moment, som förbandet kan föra över.

- **Styvhet** K: hur mycket kraft som behövs per enhet deformation, alltså lutningen i början av kurvan. Ett styvt förband deformeras lite, ett vekt förband mycket.
- **Deformationsförmåga** δ_u: hur mycket förbandet kan deformeras innan det går till brott. Ett **segt** förband kan deformeras mycket vid nästan konstant last och varnar därmed innan brottet, medan ett **sprött** förband går till brott plötsligt.



Figur 3.1 a) Ett förband för över normalkraft N, tvärkraft V och moment M, och var och en ger en motsvarande deformation: glidningarna δ_N och δ_V och rotationen φ. b) Sambandet mellan kraft och deformation ger förbandets styvhet K, bärförmåga F_R och deformationsförmåga δ_u. Ett segt förband deformeras mycket innan brottet, ett sprött går till brott utan förvarning.

Kraven på förbandet följer av hur bärverket har beräknats. I beräkningsmodellen behandlas varje kraftkomponent i ett förband nästan alltid som ett av två idealfall: antingen förs kraften över utan någon deformation alls (förbandet är **styvt** för den komponenten), eller så förs den inte över alls (förbandet är **fritt** för den). En ledad infästning är till exempel styv för N och V men fri för M, och ett glidlager är dessutom fritt för N i balkens längdriktning. Det verkliga förbandet måste då

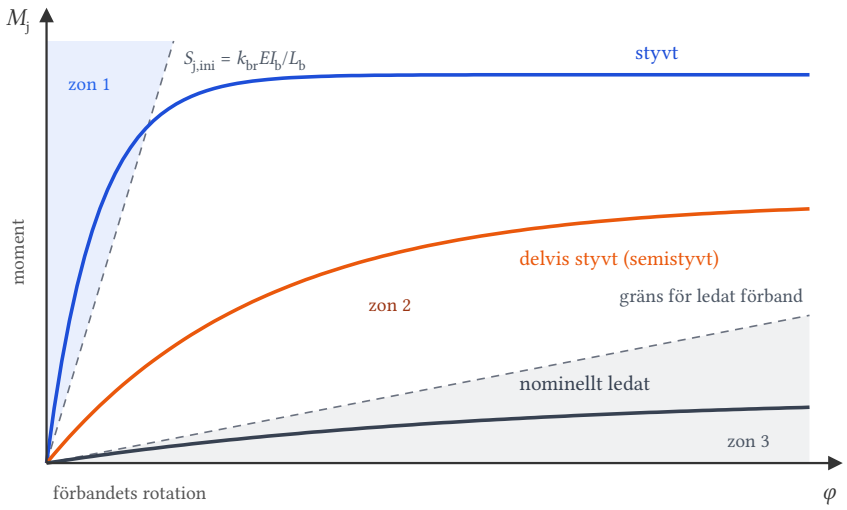
- ha tillräcklig bärförmåga för de komponenter som modellen förutsätter att det för över;
- vara så styvt för dessa komponenter att deformationen inte ändrar kraftfördelningen eller ger för stora förskjutningar i bruksgränstillståndet;
- kunna deformeras fritt, utan att gå sönder, för de komponenter som modellen förutsätter att det inte för över.

Styvheten för normalkraft och tvärkraft spelar roll till exempel i ett fackverk, där glidningen i varje knutpunkt summeras till en tydlig extra nedböjning, och i ett skruvförband som inte får glida i bruksgränstillståndet (avsnitt 3.2). Som exempel på hur förband klassificeras används här det fall som oftast har störst betydelse för bärverket: förband som ska föra över moment.

Exempel: förband som ska föra över moment

För momentet är deformationen förbandets rotation φ, och sambandet M_j–φ i figur 3.2 har den inledande lutningen $S_{j,ini}$, förbandets **rotationsstyvhet**. Efter den kan förbanden delas in i tre klasser:

- **Styva förband** roterar så lite att rotationen inte påverkar snittkrafterna nämnvärt. De kan räknas som fast inspända.
- **Nominellt ledade förband** för över tvärkraft och normalkraft men nästan inget moment, och de kan rotera tillräckligt utan att gå sönder. De kan räknas som leder.
- **Delvis styva (semistyva) förband** ligger däremellan. Deras styvhet påverkar momentfördelningen och måste tas med i analysen, till exempel som en rotationsfjäder i förbandet.



Figur 3.2 Samband mellan moment och rotation för tre förband mellan en balk och en pelare. Gränserna mellan zonerna är de som EC3-1-8 använder för stålförband: den streckade linjen $S_{j,ini} = k_{br} EI_b / L_b$ skiljer styva förband (zon 1) från delvis styva (zon 2), och nominellt ledade förband ligger i zon 3.

På samma sätt kan förbanden delas in efter **bärförmåga**: ett förband med full bärförmåga är minst lika starkt som den anslutna bärverksdelen, medan ett förband med partiell bärförmåga är svagare och därför bestämmer var brottet, eller en flytled, uppstår.

Det som skiljer materialen åt är hur styvheten uppstår och hur den hanteras i normerna.

Stål

EC3-1-8 7.3.2 ger gränser för klasserna. Ett balk–pelarförband är styvt om $S_{j,ini} \geq k_{br}\, EI_b / L_b$, där I_b och L_b är den anslutna balkens tröghetsmoment och längd och $k_{br} = 8$ i stagade ramar och 25 i ostagade. I den nya utgåvan anges inte längre en styvhetsgräns för ledade förband. I stället räknas förband som är utformade enligt standardens bilaga C som ledade, till exempel livplåtar och fästvinklar i balkens liv. Indelningen efter bärförmåga finns i 7.3.3. Svetsade förband och skruvade ändplåtar med avstyvningar blir styva, medan skruvade förband utan avstyvningar ofta är delvis styva, se figur 3.3.

Trä

I träförband med mekaniska förbindare, som spik, skruv och dymlingar, trycks förbindarna in i träet och förbandet glider redan vid låg last. Glidningen beskrivs med en **förskjutningsmodul** per förbindare och skjuvplan (EC5 11.3.8). Ett träförband är därför nästan aldrig helt styvt. De flesta förband räknas som leder, och momentstyva förband, till exempel en ring av dymlingar i en ramhörna, är i regel delvis styva. Glidningen i förbanden kan också ge ett betydande tillskott till nedböjningen, till exempel i ett fackverk. Limmade förband och inlimmade skruvar är däremot mycket styva (avsnitt 3.7).

Betong

En platsgjuten betongkonstruktion gjuts i ett stycke, och förbanden mellan balkar, pelare och plattor blir styva om armeringen går igenom förbandet och är tillräckligt förankrad på båda sidor (avsnitt 3.11 och avsnitt 3.12). Hur mycket moment förbandet verkligen för över beror ändå på sprickbildningen, som minskar styvheten. Förtillverkade element läggs däremot ofta upp på konsoler eller upplag med dorn, och de förbanden fungerar som leder. Ska ett sådant förband föra över moment måste armering skarvas över fogen och fogen gjutas igen.

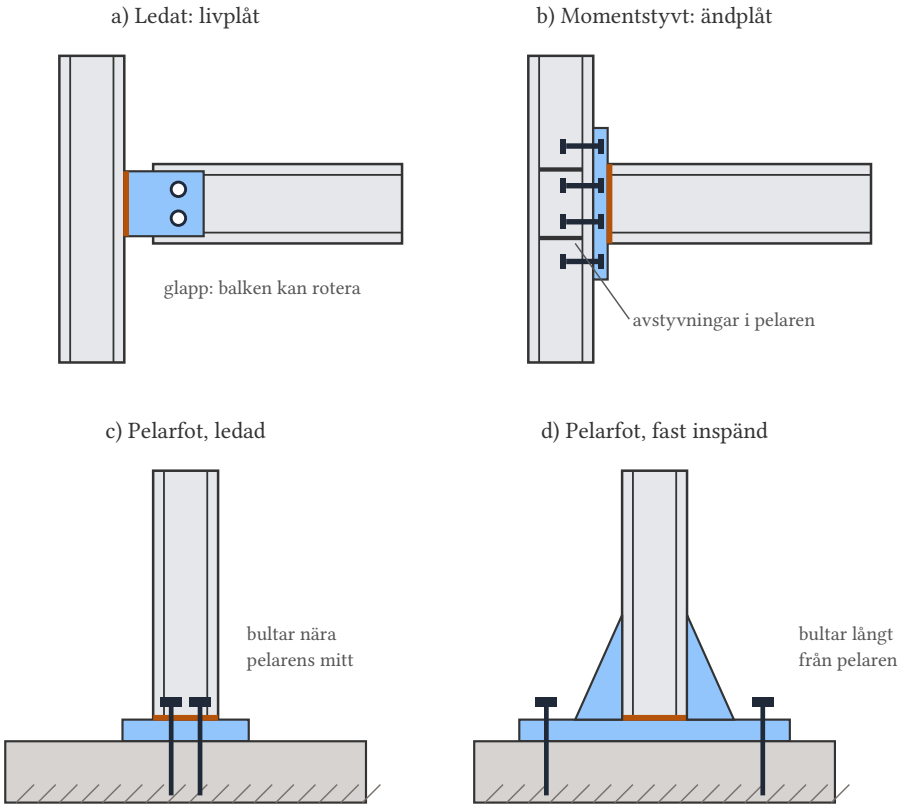
3.1.4 Typiska förband i stålkonstruktioner

Figur 3.3 visar några vanliga förband i en stålstomme:

- **Balk–pelarförband.** Ett ledat förband görs ofta med en **livplåt** som svetsas på pelaren och skruvas i balkens liv. Skruvarna sitter nära balkens neutrallager och ett glapp mellan balkänden och pelaren gör

att balken kan rotera. Ett momentstyvt förband görs till exempel med en **ändplåt** som svetsas på balken och skruvas i pelarflänsen. Skruvarna i över- och underkant ger en hävarm, så att momentet förs över som ett kraftpar, och avstyvningar i pelaren tar emot flänskrafterna.

- **Balkskarvar** görs med skarvplåtar på flänsar och liv eller med ändplåtar. De placeras om möjligt där momentet är litet.
- **Balk–balkförband**, där en sekundärbalk ansluter till en huvudbalk, utformas nästan alltid som leder, till exempel med fästvinklar eller en livplåt.
- **Pelarfötter.** En ledad pelarfot har en liten fotplåt och ingjutna bultar nära pelarens mitt, så att foten kan rotera. En fast inspänd pelarfot har en större fotplåt med bultarna långt från pelarens tyngdpunkt och ofta avstyvningar, så att momentet kan föras ned i grunden som ett kraftpar mellan bultarna och betongen under plåten.
- **Stånginfästningar** i fackverk och stag förs över med knutplåtar, skruvade eller svetsade, och utformas så att stängernas systemlinjer möts i en punkt.



Figur 3.3 Exempel på förband i en stålstomme. a) Ledat balk–pelarförband med livplåt. b) Momentstyvt balk–pelarförband med utskjutande ändplåt och avstyvningar i pelaren. c) Ledad pelarfot. d) Fast inspänd pelarfot.

Hur skruvarna och svetsarna i sådana förband dimensioneras behandlas i avsnitt 3.2 till avsnitt 3.6.

3.1.5 Förbindare

Den del som för kraften mellan delarna kallas **förbindare**. De viktigaste är:

Material	Förbindare	Avsnitt
Stål	skruvar (med eller utan förspänning), svetsar	Avsnitt 3.2 till avsnitt 3.6
Trä	spik, träskruv, genomgående skruv, dymlingar, lim, spikplåtar	Avsnitt 3.7 till avsnitt 3.9
Betong	armeringens vidhäftning, krokar och bockningar, svetsade tvärstänger, skarvar	Avsnitt 3.11 till avsnitt 3.12

Notera: Kapitlet följer den nya generationen eurokoder: EN 1993-1-8:2024 för stålförband, EN 1995-1-1:2025 för träförband och EN 1992-1-1:2023 för förankring och skarvning av armering. Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar ännu till de äldre utgåvorna. Skillnaderna tas upp i respektive del, och partialkoefficienterna finns i tabell 1.1.

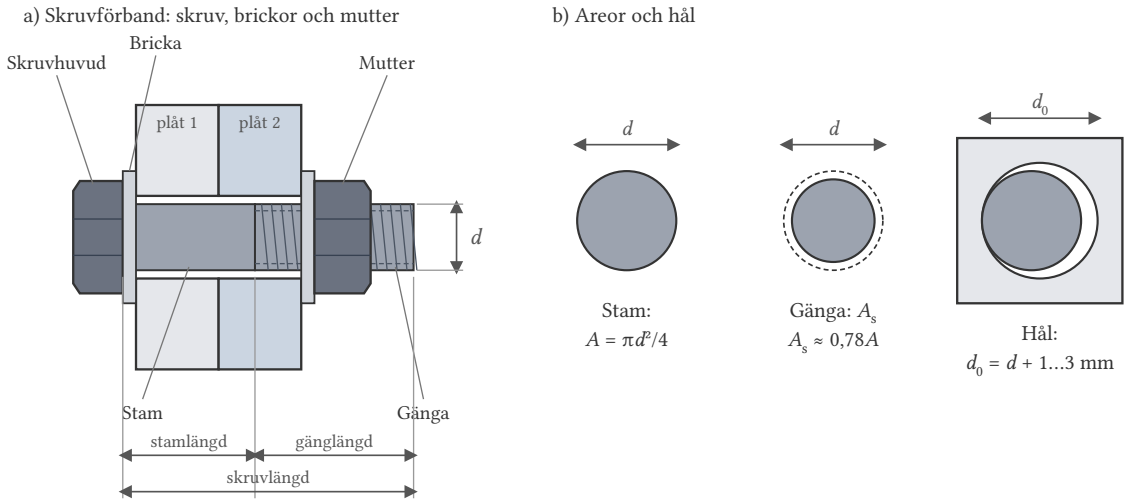
Stål – skruvförband

3.2 Stål: skruvar och skruvförband

Skruvförband är det vanligaste sättet att foga samman stålkonstruktioner på byggplatsen: delarna tillverkas och svetsas i verkstaden och skruvas ihop vid montaget. Varför förband behövs och hur de klassas efter styvhet och bärförmåga beskrivs i avsnitt 3.1. Det här avsnittet går igenom själva skruven (delar, hållfasthetsklasser och hål), hur kraften förs över i olika typer av skruvförband och vilka kant- och centrumavstånd som krävs. Bärförmågan för enskilda skruvar behandlas i avsnitt 3.3 och kraftfördelningen i en skruvgrupp i avsnitt 3.4.

3.2.1 Skruv, mutter och bricka

Ett skruvförband består av skruv, mutter och normalt en bricka under mutter och skruvhuvud, se figur 3.4. Skruven har ett huvud, en ogängad del som kallas stam och en gängad del. I äldre svensk litteratur kallas skruven bult, och skruvförband bultförband; i dagens terminologi är en bult en ogängad tapp. Brickan fördelar trycket från huvud och mutter mot plåten och skyddar ytan när muttern dras åt.



Figur 3.4 a) Skruvförband med två plåtar: skruvhuvud, brickor, mutter, stam och gänga. b) Stammens area A, gängans spänningsarea A_s och hålets diameter d_0 (spelet är överdrivet). Omritad efter kompendiet, figur S8.1 och S8.5.

Skruven har två tvärsnittsareor som båda används i dimensioneringen:

- **Stammens area** $A = \pi d^2/4$, där d är skruvens nominella diameter (M20 betyder $d = 20$ mm).
- **Spänningsarean** A_s i den gängade delen. Gängorna minskar tvärsnittet, och A_s är den area som ger rätt brottlast i ett dragprov på den gängade delen. Den är ungefär 78 % av A.

Eftersom $A_s < A$ går en dragen skruv till brott i gängan, och en skjuvad skruv är svagare om skjuvplanet går genom gängan än genom stammen. Areor och håldiametrar för vanliga skruvar finns i tabell 3.1.

Tabell 3.1 Areor och normal håldiameter för skruvar med grov gänga. Spänningsarean enligt ISO 898-1, håldiametern enligt EN 1090-2, 6.6

Skruv	d (mm)	A (mm²)	A_s (mm²)	d_0 (mm)
M12	12	113	84,3	13
M16	16	201	157	18
M20	20	314	245	22
M22	22	380	303	24
M24	24	452	353	26
M27	27	573	459	30
M30	30	707	561	33
M36	36	1 018	817	39

Hållfasthetsklasser

Skruvens hållfasthet anges med två tal, till exempel 8.8. Det första talet är brottgränsen f_{ub} i hundratals MPa och det andra är kvoten mellan sträckgräns och brottgräns. En skruv 8.8 har alltså $f_{ub} = 800$ MPa och $f_{yb} = 0{,}8 \cdot 800 = 640$ MPa, och en skruv 10.9 har $f_{ub} = 1\,000$ MPa och $f_{yb} = 900$ MPa. Beteckningen är instansad på skruvhuvudet tillsammans med tillverkarens märke. De nominella värdena används som karakteristiska värden, se tabell 3.2.

Tabell 3.2 Sträckgräns och brottgräns för skruvar (MPa) enligt EC3-1-8 5.1.1, tabell 5.1

Hållfasthetsklass	4.6	4.8	5.6	5.8	6.8	8.8	10.9
f_{yb}	240	320	300	400	480	640	900
f_{ub}	400	400	500	500	600	800	1 000

I byggnadskonstruktioner används oftast 8.8, och ibland 4.6 eller 10.9. Klasserna 8.8 och 10.9 kallas höghållfasta och är de enda som får förspännas (EC3-1-8 5.1.2). Muttern väljs med minst samma hållfasthetsklass som skruven, så att det är skruven och inte gängorna i muttern som går till brott; se avsnitt 3.3.4.

Hålets diameter

För att skruven ska gå att montera görs hålet något större än skruven. Ett större spel underlättar montaget, men förbandet glider då en bit innan skruvarna ligger an mot hålkanterna, vilket ger större deformationer redan vid låg last. För normala runda hål gäller (EN 1090-2, 6.6, som EC3-1-8 5.4.1 hänvisar till):

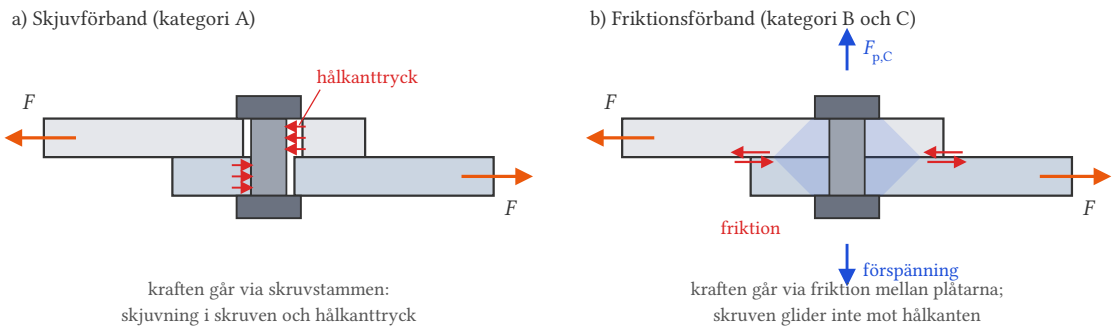
$$d_0 = \begin{cases} d + 1 \text{ mm} & \text{M12 och M14} \\ d + 2 \text{ mm} & \text{M16 till M24} \\ d + 3 \text{ mm} & \text{M27 och större} \end{cases} \tag{3.1}$$

Det finns också förstorade hål och avlånga hål (slitsar). De används för att ta upp toleranser eller tillåta rörelser och ger reducerad bärförmåga; de behandlas inte i boken.

3.2.2 Kraftöverföring i skruvförband

Ett skruvförband kan belastas på två principiellt olika sätt. I ett **skjuvförband** verkar kraften vinkelrätt mot skruvens axel, och i ett **dragförband** verkar den längs axeln. Kraften i ett skjuvförband kan i sin tur föras över på två sätt, se figur 3.5:

- **Hålkanttryck och skjuvning.** Plåtarna glider tills hålkanterna ligger an mot skruvstammen. Kraften går från den ena plåten genom tryck mot stammen, skjuvning i stammen och tryck mot den andra plåten. Skruvarna behöver inte förspännas, men förbandet glider något när det belastas.
- **Friktion.** Skruvarna förspänns med en kontrollerad åtdragning så att plåtarna pressas mot varandra med kraften $F_{p,C}$ per skruv. Kraften förs över genom friktion i kontaktytorna, och så länge friktionen räcker glider förbandet inte alls. Ett sådant förband kallas friktionsförband eller glidfritt förband.



Figur 3.5 Kraftöverföring i ett skjuvförband. a) Hålkanttryck mot skruvstammen och skjuvning i skruven. b) Förspänd skruv: friktion i kontaktytan mellan plåtarna. Omritad efter kompendiet, figur S8.11.

Friktionsförband är styvare och tål upprepad och växlande last bättre, eftersom spänningskoncentrationerna vid hålkanterna blir mycket mindre. De kräver å andra sidan höghållfasta skruvar, behandlade kontaktytor (till exempel blästrade) och kontrollerad åtdragning, och blir därför dyrare. De används där glidning inte får ske: vid växlande last, vid utmattning och i förband där deformationer måste begränsas.

EC3-1-8 5.4.1 delar in skruvförbanden i fem kategorier efter hur kraften förs över och vad som ska kontrolleras, se tabell 3.3. Bärförmågorna i tabellens sista kolumn redovisas i avsnitt 3.3.

Tabell 3.3 Kategorier av skruvförband och vad som kontrolleras, efter EC3-1-8 5.4.1 och tabell 5.4

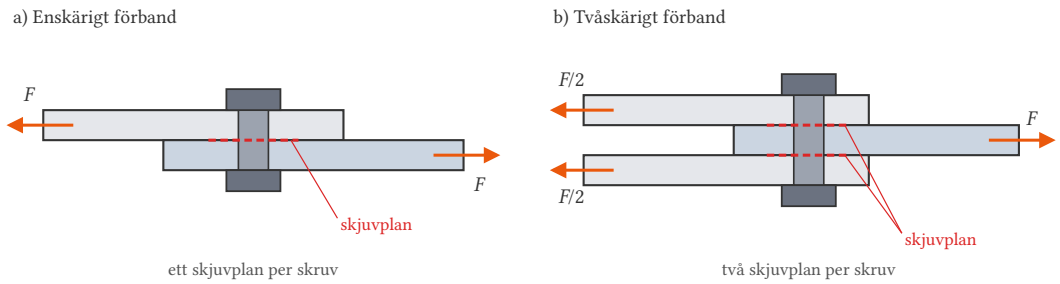
Kategori	Typ	Skruvar	Kontroll
A	Skjuvförband, hålkanttryck	4.6–10.9, ej förspända	$F_{v,Rd}$ och $F_{b,Rd}$ i ULS
B	Glidfritt i SLS	8.8, 10.9, förspända	$F_{s,Rd,ser}$ i SLS; som A i ULS
C	Glidfritt i ULS	8.8, 10.9, förspända	$F_{s,Rd}$ i ULS och nettotvärsnittet
D	Dragförband, ej förspända	4.6–10.9	$F_{t,Rd}$ och $B_{p,Rd}$ i ULS
E	Dragförband, förspända	8.8, 10.9, förspända	som D

Kategori D ska inte användas om dragkraften växlar ofta, men går bra för till exempel vindlast. Förspända dragförband (kategori E) håller ihop plåtarna så att skruvkraften knappt ändras när lasten varierar, vilket är gynnsamt vid utmattning.

Antal skjuvplan

Ett skjuvplan är ett snitt där två plåtar möts och där skruven skjuvas. Antalet skjuvplan räknas som antalet ställen där plåtarna "skär" skruven, se figur 3.6:

- I ett **enskärigt** förband (två plåtar omlott) har varje skruv ett skjuvplan. Krafterna i de två plåtarna ligger inte i samma linje, så förbandet böjs och skruven dras snett. EC3-1-8 5.9.1(4) begränsar därför hålkantbärförmågan i enskäriga förband med bara en skruvrad.
- I ett **tvåskärigt** förband (en plåt mellan två täckplåtar) har varje skruv två skjuvplan. Förbandet är symmetriskt och skruvens skjuvbärförmåga fördubblas.

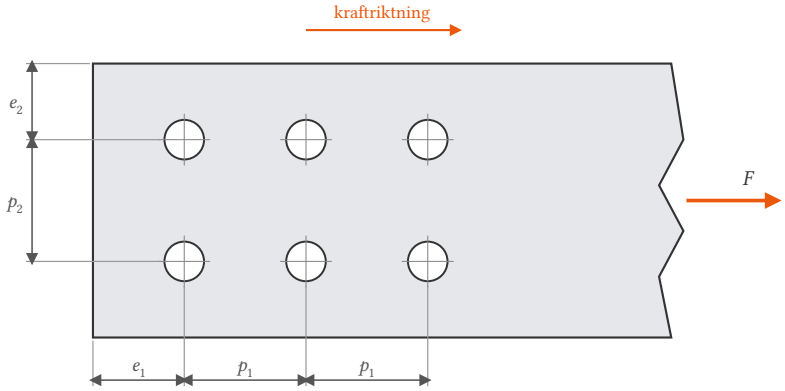


Figur 3.6 a) Enskärigt förband med ett skjuvplan per skruv. b) Tvåskärigt förband med två skjuvplan per skruv; mittplåten för kraften F och täckplåtarna $F/2$ var. Omritad efter kursens föreläsningsbilder.

3.2.3 Kant- och centrumavstånd

Hålens läge beskrivs med fyra mått, se figur 3.7. Index 1 betecknar avstånd i kraftens riktning och index 2 avstånd vinkelrätt mot den:

- e_1: **kantavståndet** från hålets centrum till plåtens ände, i kraftriktningen;
- e_2: **kantavståndet** från hålets centrum till plåtens sidokant, vinkelrätt mot kraftriktningen;
- p_1: **centrumavståndet** mellan hål i kraftriktningen;
- p_2: **centrumavståndet** mellan hålrader vinkelrätt mot kraftriktningen.



Figur 3.7 Beteckningar för kant- och centrumavstånd. Plåten dras åt höger, så skruvarna trycker plåten mot dess vänstra ände. Omritad efter EC3-1-8 figur 5.3.

Små avstånd ger risk för att plåten slits ut mellan hålen eller mot kanten (se avsnitt 3.3.1), och skruvarna måste också gå att montera med verktyg. Stora avstånd ger risk för korrosion i springan mellan plåtarna och, i tryckta delar, för att plåten bucklar ut mellan skruvarna. EC3-1-8 5.8 anger därför både minsta och största avstånd, se tabell 3.4. Bärförmågan för hålkanttryck växer med e_1 och p_1, så de minsta avstånden räcker sällan för att utnyttja skruvarna fullt.

Tabell 3.4 Minsta och största kant- och centrumavstånd för stål enligt EN 10025 (ej väderbeständigt stål), efter EC3-1-8 5.8, tabell 5.8. t är tjockleken hos den tunnaste yttre plåten

Avstånd	Minst	Störst, utsatt för väder	Störst, ej utsatt för väder
e_1, e_2	$1{,}2d_0$	$4t + 40$ mm	ingen gräns
p_1	$2{,}2d_0$	$\min\{14t;\ 200\ \text{mm}\}$	$\min\{14t;\ 200\ \text{mm}\}$
p_2	$2{,}4d_0$	$\min\{14t;\ 200\ \text{mm}\}$	$\min\{14t;\ 200\ \text{mm}\}$

De största avstånden i tryckta delar finns för att förhindra buckling mellan skruvarna. Den behöver inte kontrolleras om $p_1/t < 9\varepsilon$ (fotnot b till tabell 5.8, ε enligt ekv. (1.7)). Med förskjutna skruvrader får p_2 minskas till $1{,}2d_0$ om avståndet mellan två skruvar är minst $2{,}4d_0$.

Exempel 3.1 Kontroll av kant- och centrumavstånd

Två plattstål 250×15 mm är skarvade omlott med fyra skruvar M24 i två rader, se figur 3.12 i exempel 3.2. Kantavstånden är $e_1 = 50$ mm och $e_2 = 65$ mm, centrumavstånden $p_1 = 80$ mm och $p_2 = 120$ mm. Förbandet sitter inomhus. Kontrollera att avstånden uppfyller kraven.

Håldiameter. För M24 ger ekv. (3.1) $d_0 = 24 + 2 = 26$ mm.

Minsta avstånd. Kraven i tabell 3.4 blir

$$e_1 = 50 \text{ mm} \geq 1{,}2 d_0 = 31{,}2 \text{ mm}$$
$$e_2 = 65 \text{ mm} \geq 1{,}2 d_0 = 31{,}2 \text{ mm}$$
$$p_1 = 80 \text{ mm} \geq 2{,}2 d_0 = 57{,}2 \text{ mm}$$
$$p_2 = 120 \text{ mm} \geq 2{,}4 d_0 = 62{,}4 \text{ mm}$$

Största avstånd. Förbandet är inte utsatt för väder, så kantavstånden har ingen övre gräns. För centrumavstånden gäller

$$\min\{14t;\, 200\} = \min\{14 \cdot 15;\, 200\} = 200 \text{ mm} \geq p_1,\, p_2$$

Slutsats. Alla avstånd uppfyller kraven. Avstånden är större än minimivärdena, vilket ger högre hålkanttryckskapacitet än minimimåtten skulle ge; bärförmågan beräknas i exempel 3.2.

3.3 Skruvförband: brottyper och bärförmåga

Ett skruvförband kan gå till brott i skruven eller i plåten runt hålet, och vilket som sker beror på skruvens och plåtens hållfasthet, plåtens tjocklek och hålens placering. Det här avsnittet beskriver brottyperna och ger bärförmågan för en enskild skruv enligt EC3-1-8:2024 (avsnitt 5.9 och 5.10): skjuvning, hålkanttryck, drag, genomstansning, kombinationen skjuvning och drag samt glidning i friktionsförband. Till sist behandlas hur skruvarnas bärförmågor får läggas ihop till en skruvgrupps bärförmåga. Beteckningar och kategorier finns i avsnitt 3.2.

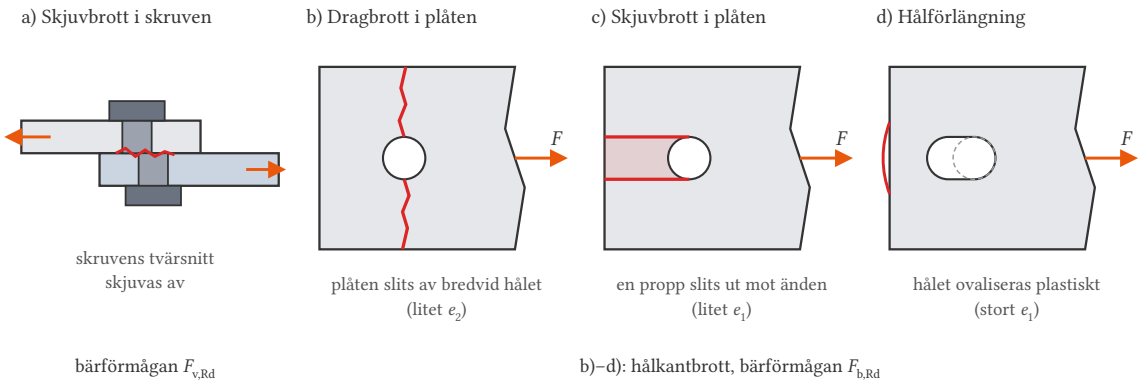
Alla bärförmågor i avsnittet har partialkoefficienten $\gamma_{M2} = 1{,}25$ för skruvar, svetsar och plåtar i hålkanttryck (EC3-1-8 tabell 4.1); för glidning gäller γ_{M3}.

> **Notera:** Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar fortfarande till den äldre utgåvan av EC3-1-8 (2005) och anger där $\gamma_{M2} = 1{,}2$ för skruvar, svetsar och plåtar i hålkanttryck. Boken använder det rekommenderade värdet 1,25 i den nya utgåvan; med EKS blir bärförmågorna i det här avsnittet och i avsnitt 3.6 drygt 4 % högre. Även formlerna för hålkanttryck skiljer sig mellan utgåvorna, se avsnitt 3.3.3.

3.3.1 Brottyper i ett skjuvförband

I ett skjuvförband (kategori A) kan brott ske på två principiellt olika sätt, se figur 3.8:

1. **Skruven skjuvas av** i ett skjuvplan. Skruvens stål är höghållfast och relativt sprött, så brottet sker plötsligt.
2. **Hålkantbrott** i plåten. Skruven trycker mot hålkanten och plåten runt hålet ger efter. Det kan ske på tre sätt:
   - **dragbrott i plåten** bredvid hålet, vinkelrätt mot kraften, när kantavståndet e_2 eller centrumavståndet p_2 är litet;
   - **skjuvbrott i plåten**, där en propp av material mellan hålet och plåtens ände (eller nästa hål) skjuvas ut längs två plan, när e_1 eller p_1 är litet;
   - **hålförlängning**, där materialet framför skruven plasticeras och hålet ovaliseras, när avstånden är stora. Det är ett segt beteende med stora deformationer.



Figur 3.8 Brottyper i ett skjuvbelastat skruvförband. a) Skjuvbrott i skruven. b)–d) Hålkantbrott: dragbrott i plåten bredvid hålet, skjuvbrott mot plåtens ände och hålförlängning. Plåten dras åt höger och skruven trycker mot den vänstra hålkanten. Omritad efter kompendiet, figur S8.10.

Utöver skruvarna och hålkanterna ska de förbundna delarna kontrolleras: dragbrott i nettotvärsnittet genom hålen, $N_{u,Rd} = kA_{net}f_u/\gamma_{M2}$ (EC3-1-1 8.2.3, se avsnitt 1.4.5), och blockbrott, där en hel grupp av skruvar slits ut med skjuvbrott längs ena sidan av gruppen och dragbrott längs den andra (EC3-1-8 5.14).

3.3.2 Skjuvbärförmåga hos skruven

Skjuvbärförmågan per skjuvplan är (EC3-1-8 tabell 5.9)

$$F_{v,Rd} = \frac{\alpha_v \, f_{ub} \, A}{\gamma_{M2}} \tag{3.2}$$

där A är arean i skjuvplanet:

- om skjuvplanet går genom **gängan** används spänningsarean A_s och $\alpha_v = 0{,}6$ för klasserna 4.6, 5.6 och 8.8, men $\alpha_v = 0{,}5$ för 4.8, 5.8, 6.8 och 10.9, som är mindre sega;
- om skjuvplanet går genom **stammen** används stammens area A och $\alpha_v = 0{,}6$ för alla klasser.

Faktorn 0,6 svarar mot von Mises flytvillkor, enligt vilket ett segt material i ren skjuvning går till brott vid ungefär $f_{ub}/\sqrt{3} \approx 0{,}58 f_{ub}$ värdet är kalibrerat mot försök. Har skruven flera skjuvplan multipliceras $F_{v,Rd}$ med antalet. Om det inte är känt var gängan hamnar räknar man med att skjuvplanet går genom gängan. Stammens area får användas om stammen sträcker sig förbi skjuvplanet med minst $\max\{0{,}1d;\ 0{,}5t_2\}$, där t_2 är tjockleken hos plåten på andra sidan skjuvplanet (EC3-1-8 5.9.1(8)).

3.3.3 Hålkantbärförmåga

Hålkantbärförmågan per skruv och plåt är enligt EC3-1-8:2024 tabell 5.9

$$F_{b,Rd} = \frac{k_m \, \alpha_b \, f_u \, d \, t}{\gamma_{M2}} \tag{3.3}$$

där f_u är plåtens brottgräns, d skruvens diameter och t plåtens tjocklek. Faktorn $k_m = 1{,}0$ för stål under S460 och $k_m = 0{,}9$ för S460 och högre. Faktorn α_b beror på var skruven sitter:

$$\alpha_b = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{e_1}{d_0};\ 3\dfrac{f_{ub}}{f_u};\ 3 \right\} & \text{ändskruv} \\ [2ex] \min\left\{ \dfrac{p_1}{d_0} - \dfrac{1}{2};\ 3\dfrac{f_{ub}}{f_u};\ 3 \right\} & \text{inre skruv} \end{cases} \tag{3.4}$$

En ändskruv är den skruv i en rad som ligger närmast plåtens ände i kraftens riktning; övriga skruvar i raden är inre skruvar. De tre termerna svarar mot olika brottyper:

- e_1/d_0 och $p_1/d_0 - 1/2$: **skjuvbrott i plåten** framför skruven. Proppen som skjuvas ut har två skjuvplan med längden ungefär $e_1 - d_0/2$. Med skjuvhållfastheten $f_u/\sqrt{3}$ blir brottlasten ungefär $2(e_1 -$

$d_0/2)\, t\, f_u/\sqrt{3} \approx 1{,}15\,(e_1/d_0 - 0{,}5)\, f_u d_0 t$, alltså proportionell mot e_1/d_0. EC3-1-8 bygger på försök och använder en enklare linjär funktion av e_1/d_0.

- $3f_{ub}/f_u$: skruven är så mjuk i förhållande till plåten att den deformeras först. Den blir sällan avgörande för vanliga kombinationer (för 8.8 i S355 är den $3 \cdot 800/490 = 4{,}9$).
- 3: **hålförlängning**. Även med mycket stora avstånd kan trycket mot hålkanten inte bli större än ungefär $3f_u$ innan hålet ovaliseras kraftigt.

För en skruv nära en sidokant kan plåten i stället gå av bredvid hålet (dragbrott i plåten). Hålkantbärförmågan för sådana kantskruvar får därför inte överstiga (EC3-1-8 tabell 5.9, fotnot d, och formel (5.21))

$$F_{b,Rd} \le \frac{2{,}0\,(e_2 - 0{,}5d_0)\, t\, f_u}{\gamma_{M2}} \tag{3.5}$$

Uttrycket är dragbrott i plåtremsan med bredden $e_2 - 0{,}5d_0$ mellan hålet och kanten, med en faktor 2,0 som är kalibrerad mot försök. Med de vanliga avstånden $e_2 \ge 1{,}5d_0$ blir begränsningen sällan avgörande.

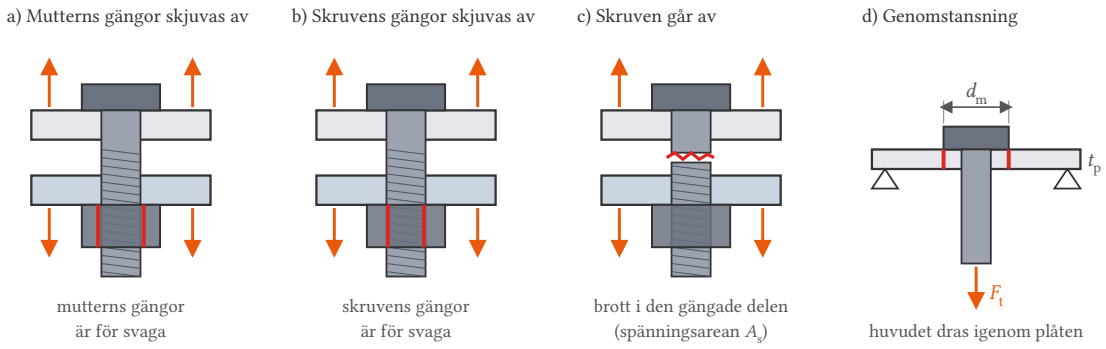
> **Obs:** I den äldre utgåvan av EC3-1-8 skrevs bärförmågan $k_1\alpha_b f_u dt/\gamma_{M2}$, där α_b (med $e_1/(3d_0)$) var högst 1,0 och k_1 (beroende av e_2 och p_2) högst 2,5. Produkten kunde alltså bli högst 2,5. I den nya utgåvan är taket 3, och inverkan av e_2 ligger i stället i ekv. (3.5). Äldre exempelsamlingar och tabeller ger därför något lägre hålkantbärförmåga än boken.

Några kompletterande regler (EC3-1-8 5.9.1):

- Bärförmågan beräknas för **varje plåt** som skruven ligger an mot. I ett tvåskärigt förband jämförs mittplåten med de två täckplåtarna tillsammans, eftersom de delar på kraften.
- Om kraften på skruven är **snett riktad** mot plåtkanten delas den upp i två vinkelräta komposanter, och var och en jämförs med bärförmågan i sin riktning: $(F_{b,x,Ed}/F_{b,x,Rd})^2 + (F_{b,y,Ed}/F_{b,y,Rd})^2 \le 1$ (formel (5.11)).
- I ett **enskärigt förband med bara en skruvrad** ska skruvarna ha brickor under både huvud och mutter, och $F_{b,Rd} \le 1{,}5\, d\, t\, f_u/\gamma_{M2}$ (formel (5.7)).
- Om deformationerna i hålen måste begränsas används ett reducerat α_b (formel (5.6)).

3.3.4 Skruvar i drag

En skruv i ett dragförband kan gå till brott på tre sätt, se figur 3.9: gängorna i muttern skjuvas av, gängorna på skruven skjuvas av, eller skruven går av i den gängade delen. De två första är spröda och utnyttjar inte skruvens hållfasthet, så mutter och skruv väljs så att den tredje brottypen blir avgörande. Med standardiserade muttrar av rätt hållfasthetsklass är det uppfyllt, och EC3-1-8 behöver då bara kontrollera själva skruven. Dessutom kan skruvhuvudet eller muttern dras igenom en tunn plåt (genomstansning).



Figur 3.9 Brottyper för en dragen skruv. a) Mutterns gängor skjuvas av. b) Skruvens gängor skjuvas av. c) Skruven går av i gängan, vilket är den brottyp man strävar efter. d) Skruvhuvudet stansas igenom en tunn plåt. Omritad efter kompendiet, figur S8.4, och föreläsningsbilderna.

Dragbärförmågan är (EC3-1-8 tabell 5.9)

$$F_{t,Rd} = \frac{0{,}9\, f_{ub}\, A_s}{\gamma_{M2}} \tag{3.6}$$

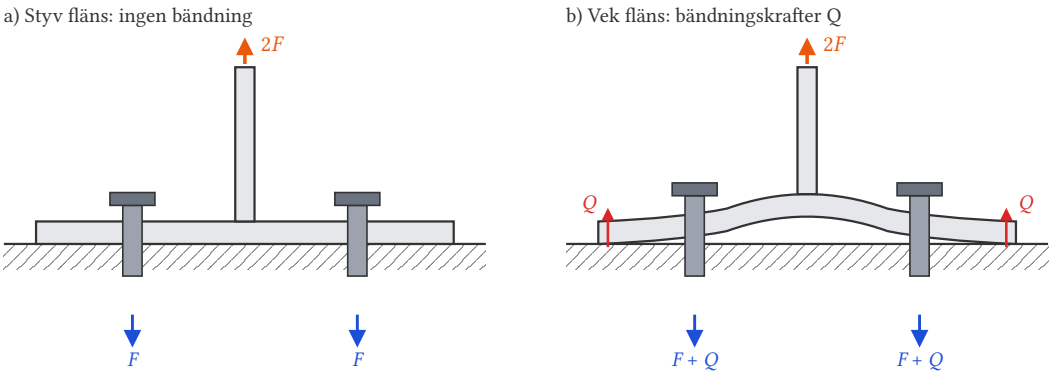
med spänningsarean A_s, eftersom brottet sker i gängan. Faktorn 0,9 tar bland annat hänsyn till att skruven också böjs något när plåtarna deformeras. Bärförmågan mot genomstansning av plåten är

$$B_{p,Rd} = \frac{0{,}6\,\pi\, d_m\, t_p\, f_u}{\gamma_{M2}} \tag{3.7}$$

där t_p är tjockleken hos plåten under huvudet eller muttern och d_m medelvärdet av huvudets (eller mutterns) mått över hörnen och över planen, det minsta av de två. Formeln är skjuvbrott ($0{,}6 f_u$) längs en cylinder med diametern d_m och höjden t_p.

Bändning

När en dragen plåt som är fastskruvad mot ett stöd är vek, böjs den så att dess ytterkanter trycks mot stödet. Det ger kontaktkrafter Q vid kanterna, och för jämvikt måste skruvarna då ta kraften $F + Q$ i stället för F, se figur 3.10. Fenomenet kallas bändning (på engelska *prying*). Bändningskrafterna ska läggas till skruvkraften (EC3-1-8 5.9.5). Reglerna för den ekvivalenta T-stubben i EC3-1-8 8.3, som används för ändplåtsförband, tar hänsyn till bändningen direkt. Ett enkelt sätt att undvika stora bändningskrafter är att göra plåten tjock eller att placera skruvarna nära livet.



Figur 3.10 Dragen T-stubbe som skruvas mot ett styvt stöd. a) Med en styv fläns tar varje skruv kraften F. b) Med en vek fläns böjs flänsen, dess kanter trycks mot stödet med kraften Q och skruvarna får kraften $F + Q$. Omritad efter kompendiet, figur S8.6.

3.3.5 Kombinerad skjuvning och drag

En skruv som både skjuvas och dras, till exempel de övre skruvarna i ett ändplåtsförband som tar både moment och tvärkraft, ska uppfylla (EC3-1-8 tabell 5.9)

$$\frac{F_{v,Ed}}{F_{v,Rd}} + \frac{F_{t,Ed}}{1{,}4\, F_{t,Rd}} \le 1{,}0 \quad \text{och} \quad \frac{F_{t,Ed}}{F_{t,Rd}} \le 1{,}0 \tag{3.8}$$

Kombinationen är linjär men gynnsammare för draget än en ren summa: en skruv som tar hela sin skjuvbärförmåga tål ingen dragkraft, men en skruv som tar sin fulla dragbärförmåga tål fortfarande knappt 30 % av skjuvbärförmågan.

3.3.6 Friktionsförband

I ett friktionsförband (kategori B och C) förspänns höghållfasta skruvar till förspänningskraften (EC3-1-8 formel (5.15))

$$F_{p,C} = 0{,}7\, f_{ub}\, A_s \tag{3.9}$$

och glidbärförmågan per skruv är (formel (5.13) och (5.16))

$$F_{s,Rd} = \frac{k_s \, n \, \mu \, (F_{p,C} - 0{,}8 F_{t,Ed})}{\gamma_{M3}} \tag{3.10}$$

där n är antalet friktionsytor, μ friktionskoefficienten (glidfaktorn) och $k_s = 1{,}0$ för normala runda hål. En samtidig dragkraft $F_{t,Ed}$ minskar klämkraften och därmed friktionen. Friktionskoefficienten beror på hur kontaktytorna behandlats och är enligt EC3-1-8 tabell 5.13 0,5 för blästrade ytor utan lös rost (klass A), 0,4 för vissa blästrade och målade eller metalliserade ytor (klass B), 0,3–0,35 för stålborstade eller varmförzinkade och svepblästrade ytor (klass C) och 0,2 för valsade ytor utan behandling (klass D). Partialkoefficienten är $\gamma_{M3} = 1{,}25$ när glidning ska förhindras i brottgränstillståndet (kategori C) och $\gamma_{M3,ser} = 1{,}1$ när den ska förhindras i bruksgränstillståndet (kategori B).

3.3.7 Skruvgrupp med axiell last

När flera skruvar för över en kraft i förbandets längdriktning fördelas kraften i elastiskt stadium inte lika på skruvarna. Plåtarna töjs olika mycket längs förbandet, så de yttersta skruvarna får större kraft än de mittersta, se figur 3.11a. En enkel fjädermodell (kompendiet, S8.3) visar att skillnaden växer med centrumavståndet och med skruvarnas styvhet i förhållande till plåtarnas, EA. Om hålkanterna kan plasticeras utjämnas krafterna innan något brott inträffar.

Seghetsvillkoret

EC3-1-8 5.11 tillåter att skruvarnas bärförmågor läggs ihop (plastisk fördelning) bara om förbandet är tillräckligt segt, det vill säga om det är hålkanterna och inte skruvarna som först ger efter. För stål under S460 gäller seghetsvillkoret

$$F_{v,Rd} \geq 0{,}8 \, F_{b,Rd} \quad \text{för varje skruv} \tag{3.11}$$

där $F_{v,Rd}$ avser alla skjuvplan hos skruven. (För S460 och högre krävs $F_{v,Rd} \geq F_{b,Rd}$.) Gruppens bärförmåga blir då

- om ekv. (3.11) är uppfyllt: summan av varje skruvs $\min\{F_{v,Rd};\, F_{b,Rd}\}$
- annars: antalet skruvar gånger den minsta bärförmågan hos någon skruv.

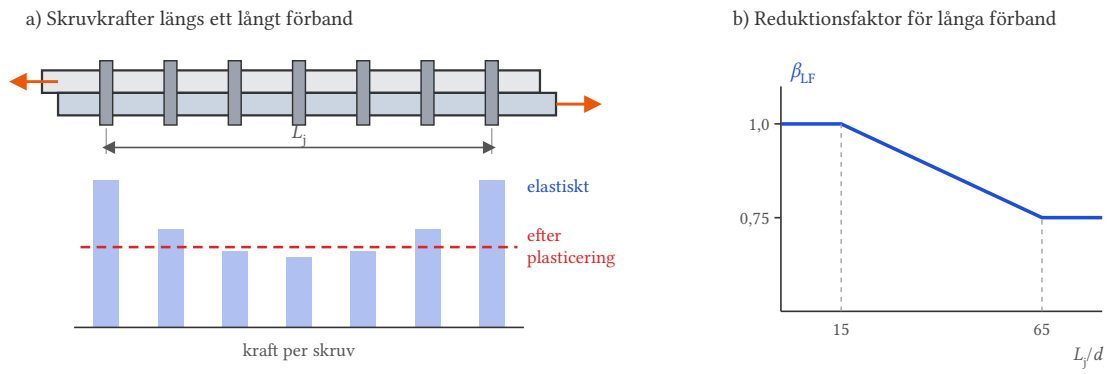
Bakgrunden är att hålkanttryck ger stora plastiska deformationer redan vid ungefär $0{,}8 F_{b,Rd}$, medan en skruv som skjuvas av går till brott utan förvarning. Om deformationerna i hålen måste begränsas räknas gruppen alltid med den minsta bärförmågan.

Långa förband

I långa förband hinner de yttersta skruvarna gå till brott innan krafterna har jämnats ut. Om avståndet L_j mellan de yttersta skruvarna i kraftriktningen är större än $15d$ reduceras gruppens bärförmåga med (EC3-1-8 5.11(7), formel (5.18))

$$\beta_{LF} = 1 - \frac{L_j - 15d}{200\, d}, \qquad 0{,}75 \leq \beta_{LF} \leq 1{,}0 \tag{3.12}$$

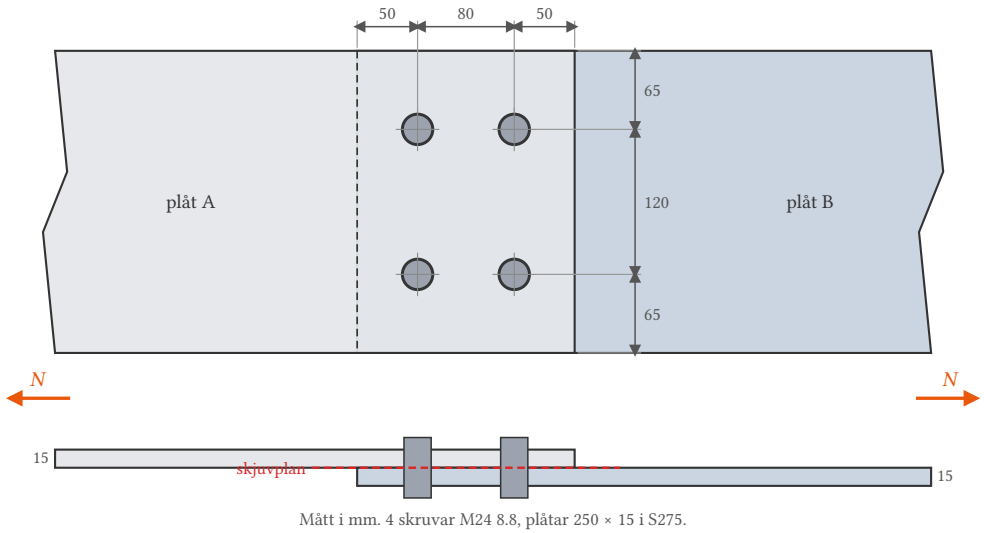
se figur 3.11b. Reduktionen gäller inte när kraften förs över jämnt längs förbandet, som i ett förband mellan liv och fläns.



Figur 3.11 a) Skruvkrafter i ett långt förband: i elastiskt stadium tar de yttersta skruvarna mest; efter plasticering av hålkanterna blir fördelningen jämnare. b) Reduktionsfaktorn β_{LF} enligt ekv. (3.12). Omritad efter kompendiet, figur S8.13 och S8.14.

Exempel 3.2 Bärförmåga hos ett skarvat plattstål

Två plattstål 250 × 15 mm i S275 är skarvade omlott med fyra skruvar M24 8.8 enligt figur 3.12 avstånden kontrollerades i exempel 3.1. Skjuvplanet antas gå genom gängan. Bestäm den största dimensionerande dragkraft N_{Rd} som förbandet kan föra över.



Figur 3.12 Plattstålen i exemplet: plan och sidovy. Förbandet är enskärigt med två skruvar i varje rad i kraftriktningen.

Material. S275 har $f_y = 275$ MPa och $f_u = 390$ MPa (tabell 1.8, $t \le 40$ mm). Skruven 8.8 har $f_{ub} = 800$ MPa (tabell 3.2), och för M24 är $A_s = 353$ mm² och $d_0 = 26$ mm (tabell 3.1).

Skjuvbärförmåga. Förbandet är enskärigt, så varje skruv har ett skjuvplan. Med $\alpha_v = 0{,}6$ för 8.8 ger ekv. (3.2)

$$F_{v,Rd} = \frac{\alpha_v f_{ub} A_s}{\gamma_{M2}} = \frac{0{,}6 \cdot 800 \cdot 353}{1{,}25} = 135{,}6 \cdot 10^3 \text{ N} = 135{,}6 \text{ kN}$$

Hålkantbärförmåga, ändskruvar. Båda plåtarna har $t = 15$ mm och samma avstånd, så det räcker att räkna på den ena. Ändskruvarna har $e_1 = 50$ mm, och ekv. (3.4) ger

$$\alpha_b = \min\left\{\frac{50}{26};\, 3 \cdot \frac{800}{390};\, 3\right\} = \min\{1{,}923;\, 6{,}15;\, 3\} = 1{,}923$$

$$F_{b,Rd} = \frac{k_m \alpha_b f_u dt}{\gamma_{M2}} = \frac{1{,}0 \cdot 1{,}923 \cdot 390 \cdot 24 \cdot 15}{1{,}25} = 216{,}0 \text{ kN}$$

Hålkantbärförmåga, inre skruvar. Med $p_1 = 80$ mm:

$$\alpha_b = \min\left\{\frac{80}{26} - \frac{1}{2};\, 6{,}15;\, 3\right\} = 2{,}577$$

$$F_{b,Rd} = \frac{1{,}0 \cdot 2{,}577 \cdot 390 \cdot 24 \cdot 15}{1{,}25} = 289{,}4 \text{ kN}$$

Kontroll av kantavståndet. Alla skruvar sitter i en ytterrad med $e_2 = 65$ mm. Ekv. (3.5) ger

$$\frac{2{,}0\,(e_2 - 0{,}5 d_0)\, t\, f_u}{\gamma_{M2}} = \frac{2{,}0 \cdot (65 - 13) \cdot 15 \cdot 390}{1{,}25} = 486{,}7 \text{ kN}$$

vilket är större än $F_{b,Rd}$ ovan, så begränsningen påverkar inte.

Seghetsvillkoret. För ändskruvarna är $0{,}8 F_{b,Rd} = 0{,}8 \cdot 216{,}0 = 172{,}8$ kN $> F_{v,Rd} = 135{,}6$ kN, så ekv. (3.11) är inte uppfyllt. Gruppens bärförmåga är då antalet skruvar gånger den minsta enskilda bärförmågan, som är skjuvbärförmågan:

$$N_{Rd,skruv} = n \cdot \min\{F_{v,Rd};\, F_{b,Rd}\} = 4 \cdot 135{,}6 = 542 \text{ kN}$$

Förbandets längd är $L_j = p_1 = 80$ mm $< 15d = 360$ mm, så $\beta_{LF} = 1{,}0$.

Plåtarnas bärförmåga. Nettoarean genom två hål är $A_{net} = (250 - 2 \cdot 26) \cdot 15 = 2\,970$ mm². Med $k = 1{,}0$ för borrade hål (avsnitt 1.4.5):

$$N_{u,Rd} = \frac{k A_{net} f_u}{\gamma_{M2}} = \frac{1{,}0 \cdot 2\,970 \cdot 390}{1{,}25} = 927 \text{ kN}$$

och flytning i bruttotvärsnittet, med $A = 250 \cdot 15 = 3\,750$ mm²,

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{3\,750 \cdot 275}{1{,}0} = 1\,031 \text{ kN}$$

Summa. Den minsta bärförmågan avgör:

$$N_{Rd} = \min\{542;\, 927;\, 1\,031\} = 542 \text{ kN}$$

Skruvarnas skjuvbärförmåga är dimensionerande med god marginal till plåten. Om förbandet görs tvåskärigt, med plattstålet mellan två täckplåtar (vardera minst 8 mm tjocka), fördubblas skjuvbärförmågan till 271 kN per skruv. Seghetsvillkoret är då uppfyllt, och gruppens bärförmåga blir summan av skruvarnas $\min\{F_{v,Rd};\, F_{b,Rd}\}$ i mittplåten, $2 \cdot 216{,}0 + 2 \cdot 271{,}1 = 974$ kN. Då blir plåtens nettotvärsnitt (927 kN) avgörande.

3.4 Skruvförband: kraftfördelning i skruvgrupper

I många förband angriper lasten inte i skruvgruppens tyngdpunkt. En konsol som bär en balk, ett livskarvförband eller en vindförbandsanslutning belastar skruvgruppen med en kraft och ett moment i gruppens eget plan. Det här avsnittet härleder hur kraften fördelas på de enskilda skruvarna när gruppen belastas av en vertikal kraft V, en horisontell kraft H och ett moment M, och hur den mest belastade skruven hittas. Skruvens bärförmåga, som skruvkraften sedan jämförs med, finns i avsnitt 3.3.

3.4.1 Antaganden

Fördelningen beräknas elastiskt, med följande antaganden (kompendiet, S8.4):

1. De förbundna plåtarna är **stela** i förhållande till skruvarna; de rör sig som stela kroppar i förhållande till varandra.

2. Alla skruvar är lika och har samma **linjära styvhet** K: skruvkraften är proportionell mot den relativa förskjutningen mellan plåtarna vid skruven, $N_i = K\delta_i$.
3. Friktionen mellan plåtarna försummas.

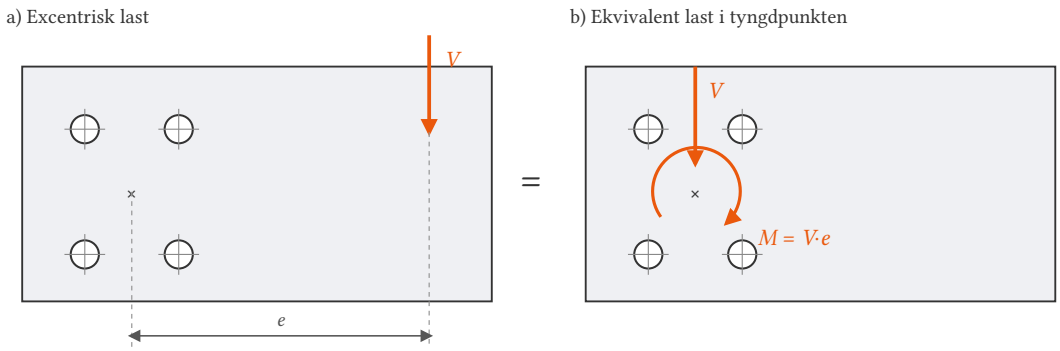
EC3-1-8 5.13 föreskriver en linjärt elastisk fördelning för skjuvförband i kategori A, om inte seghetsvillkoret i Seghetsvillkoret är uppfyllt, och alltid för friktionsförband i kategori C. Den elastiska fördelningen kan alltså alltid användas och ligger på säkra sidan.

3.4.2 Kraftförflyttning

En kraft som angriper utanför skruvgruppens tyngdpunkt ersätts med samma kraft i tyngdpunkten plus ett moment, se figur 3.13. För lika skruvar ligger tyngdpunkten i medelvärdet av skruvarnas koordinater, $x_c = \sum x_i/n$ och $y_c = \sum y_i/n$. Med origo i tyngdpunkten, x åt höger och y nedåt ger en vertikal kraft V (positiv nedåt) och en horisontell kraft H (positiv åt höger) som angriper i punkten (x_P, y_P) momentet

$$M = V \cdot x_P - H \cdot y_P \tag{3.13}$$

kring tyngdpunkten, positivt medurs. För en vertikal kraft på avståndet e till höger om tyngdpunkten blir $M = Ve$. Teckenkonventionen sammanfattas i figur 3.14.



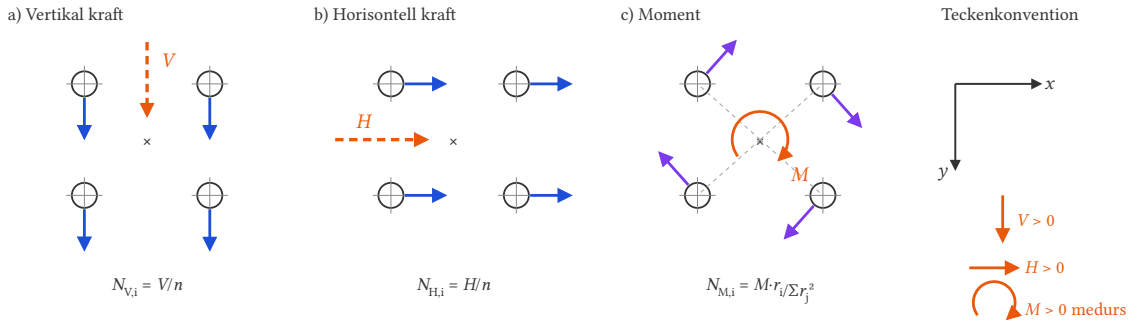
Figur 3.13 Kraftförflyttning. a) Vertikal kraft på avståndet e från skruvgruppens tyngdpunkt. b) Samma last uttryckt som en kraft i tyngdpunkten och momentet $M = Ve$. Omritad efter kursens föreläsningsbilder.

3.4.3 Krafter från V och H

En kraft genom tyngdpunkten ger plåten en ren förskjutning utan rotation. Alla skruvar förskjuts lika mycket och får därför lika stor kraft, se figur 3.14a och b:

$$N_{V,i} = \frac{V}{n}, \qquad N_{H,i} = \frac{H}{n} \tag{3.14}$$

där n är antalet skruvar. Krafterna är riktade som lasten.



Figur 3.14 Skruvkrafter av a) en vertikal kraft, b) en horisontell kraft och c) ett moment i skruvgruppens tyngdpunkt (×). Pilarna är krafterna från den belastade plåten på skruvarna. Till höger bokens teckenkonvention: x åt höger, y nedåt, V och H positiva i axlarnas riktning och M positivt medurs. Omritad efter instuderingsfråga 2.

3.4.4 Krafter från momentet

Momentet M vrider den belastade plåten vinkeln φ kring tyngdpunkten C, se figur 3.15. En skruv på avståndet $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ från C förskjuts då sträckan $\delta_i = \varphi\, r_i$ vinkelrätt mot radien, och skruvkraften blir

$$N_{M,i} = K\delta_i = K\varphi\, r_i$$

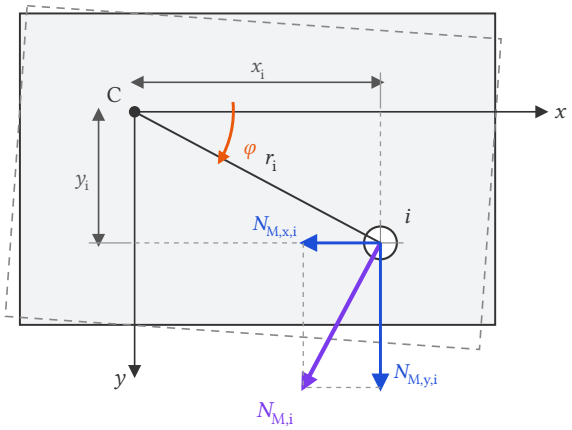
Skruvkrafterna är alltså vinkelräta mot radien och proportionella mot avståndet till tyngdpunkten. Deras moment kring C ska tillsammans vara lika med det yttre momentet:

$$M = \sum_{j=1}^{n} N_{M,j}\, r_j = K\varphi \sum_{j=1}^{n} r_j^2$$

Löser man ut $K\varphi$ och sätter in i uttrycket för $N_{M,i}$ får man

$$N_{M,i} = \frac{M\, r_i}{\sum r_j^2}, \qquad \sum r_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 + y_j^2) \tag{3.15}$$

Summan $\sum r_j^2$ kallas skruvgruppens **polära tröghetsmoment** I_p (med skruvarnas area satt till 1). Styvheten K och vinkeln φ försvinner ur resultatet; bara geometrin behövs.



Stel plåt som roterar vinkeln φ medurs kring C (streckad).

Figur 3.15 Den stela plåten roterar vinkeln φ kring tyngdpunkten C. Skruven i på avståndet r_i får kraften $N_{M,i}$ vinkelrätt mot radien, med komposanterna $N_{M,x,i}$ och $N_{M,y,i}$. Omritad efter kompendiet, figur S8.16.

Kraftens komposanter fås med likformiga trianglar: komposanten i y-led förhåller sig till $N_{M,i}$ som x_i till r_i, och komposanten i x-led som y_i till r_i. Med teckenkonventionen ovan (medurs M positivt, y nedåt) blir

$$N_{M,x,i} = -\frac{M\, y_i}{\sum r_j^2}, \qquad N_{M,y,i} = \frac{M\, x_i}{\sum r_j^2} \tag{3.16}$$

Kontroll med figur 3.14c: ett medurs moment trycker en skruv ovanför tyngdpunkten ($y_i < 0$) åt höger ($N_{M,x,i} > 0$) och en skruv till höger om tyngdpunkten ($x_i > 0$) nedåt ($N_{M,y,i} > 0$).

3.4.5 Total skruvkraft

Bidragen från V, H och M adderas komposantvis:

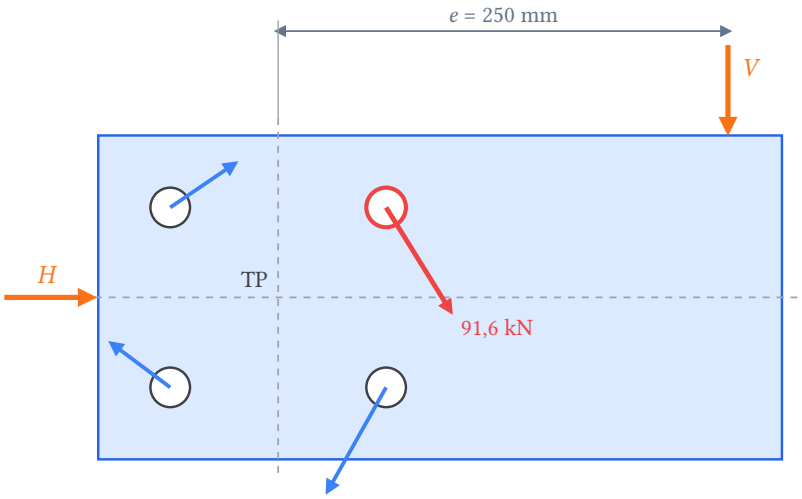
$$N_{x,i} = \frac{H}{n} - \frac{M\, y_i}{\sum r_j^2}, \qquad N_{y,i} = \frac{V}{n} + \frac{M\, x_i}{\sum r_j^2} \tag{3.17}$$

och skruvkraften är resultanten

$$N_i = \sqrt{N_{x,i}^2 + N_{y,i}^2} \tag{3.18}$$

Den mest belastade skruven är den där bidragen från momentet och från krafterna samverkar, och det är nästan alltid en hörnskruv, eftersom den har störst r_i. Det räcker därför i regel att räkna på hörnskruvarna och välja den största. Den punkt där skruvkraften skulle vara noll är plåtens momentana rotationscentrum. Den ligger på motsatt sida om tyngdpunkten från lasten, och ju större excentriciteten är, desto närmare tyngdpunkten hamnar den.

Skruvkraften N_i jämförs sedan med skruvens bärförmåga, $N_i \leq F_{v,Rd}$ och $N_i \leq F_{b,Rd}$. Eftersom kraften är snett riktad kan hålkanttrycket kontrolleras med komposanter enligt avsnitt 3.3.3, eller, på säkra sidan, med det minsta kant- och centrumavståndet i alla riktningar.



Mått i mm, krafter i kN. Teckenkonvention: x åt höger, y nedåt, M positivt medurs.

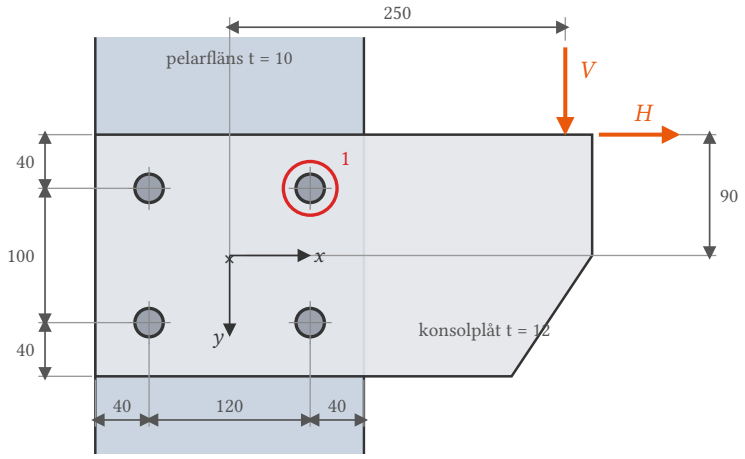
Figur 3.16 Skruvkrafter i en rektangulär skruvgrupp med en vertikal kraft på avståndet e från tyngdpunkten och en horisontell kraft genom tyngdpunkten. Ändra antal skruvar, avstånd och last och se vilken skruv som blir mest belastad.

I den interaktiva figur 3.16 syns hur momentbidraget växer när e ökar och hur större avstånd mellan skruvarna (större $\sum r_j^2$) minskar det. Fler skruvar i en rad längs lastens riktning hjälper mindre än att sprida skruvarna ut från tyngdpunkten.

> **Obs:** Om skruvgruppens origo inte läggs i tyngdpunkten kopplas ekvationerna ihop och translation och rotation måste lösas som ett ekvationssystem (kompendiet, S8.4.3). Att flytta lasten till tyngdpunkten först gör räkningen enkel.

Exempel 3.3 Konsol fastskruvad i en pelare

En konsolplåt ($t = 12$ mm) är fastskruvad i en pelarfläns ($t = 10$ mm) med fyra skruvar M20 8.8 enligt figur 3.17. Skruvarna sitter i ett rutmönster 120 × 100 mm, och alla kantavstånd är minst 40 mm. Den vertikala lasten V angriper 250 mm till höger om skruvgruppens tyngdpunkt, och en horisontell last $H = V/10$ angriper 90 mm ovanför tyngdpunkten. Stål S275. Skjuvplanet går genom gängan. Bestäm den största dimensionerande last V som skruvförbandet kan bära.



Figur 3.17 Konsolen i exemplet, mått i mm. Skruv 1 (ringad) blir mest belastad.

Geometri. Med origo i tyngdpunkten ligger skruvarna i $x_i = \pm 60$ mm och $y_i = \pm 50$ mm. Ekv. (3.15) ger

$$\sum r_j^2 = 4 \cdot (60^2 + 50^2) = 24\,400 \text{mm}^2$$

Moment kring tyngdpunkten. V angriper i $x_P = 250$ mm och H i $y_P = -90$ mm (ovanför). Ekv. (3.13) ger

$$M = V \cdot 250 - \frac{V}{10} \cdot (-90) = 259\,V \quad \text{(mm)}$$

Båda lasterna vrider konsolen medurs.

Mest belastade skruven. Skruv 1, uppe till höger, har $x_1 = 60$ mm och $y_1 = -50$ mm; där samverkar alla bidrag. Ekv. (3.17) ger

$$N_{x,1} = \frac{0{,}1V}{4} - \frac{259V \cdot (-50)}{24\,400} = (0{,}025 + 0{,}531)\,V = 0{,}556\,V$$

$$N_{y,1} = \frac{V}{4} + \frac{259V \cdot 60}{24\,400} = (0{,}250 + 0{,}637)\,V = 0{,}887\,V$$

och ekv. (3.18) ger

$$N_1 = \sqrt{0{,}556^2 + 0{,}887^2} \cdot V = 1{,}047\,V$$

Skruven nere till höger får $N_x = -0{,}506V$ och samma N_y, alltså $N = 1{,}021V$, och de två vänstra skruvarna mindre än $0{,}68V$.

Skruvens bärförmåga. Skjuvbärförmågan med ett skjuvplan genom gängan ($A_s = 245$ mm², tabell 3.1) är enligt ekv. (3.2)

$$F_{v,Rd} = \frac{0{,}6 \cdot 800 \cdot 245}{1{,}25} = 94{,}1 \text{ kN}$$

Hålkanttrycket kontrolleras på säkra sidan i den tunnaste plåten ($t = 10$ mm) med det minsta kantavståndet 40 mm i alla riktningar, $d_0 = 22$ mm och $f_u = 390$ MPa. Ekv. (3.4) och ekv. (3.3) ger

$$\alpha_b = \min\left\{\frac{40}{22};\, 3 \cdot \frac{800}{390};\, 3\right\} = 1{,}818$$

$$F_{b,Rd} = \frac{1{,}0 \cdot 1{,}818 \cdot 390 \cdot 20 \cdot 10}{1{,}25} = 113{,}5 \text{ kN}$$

och begränsningen för kantskruvar, ekv. (3.5), ger $2{,}0 \cdot (40 - 11) \cdot 10 \cdot 390/1{,}25 = 181$ kN, som inte är avgörande. Skjuvningen avgör: $F_{Rd} = 94{,}1$ kN.

Största last. Villkoret $N_1 \le F_{Rd}$ ger

$$V_{Rd} = \frac{F_{Rd}}{1{,}047} = \frac{94{,}1}{1{,}047} = 89{,}9 \text{ kN}, \qquad H = 9{,}0 \text{ kN}$$

Vid den lasten är skruvkraften i skruv 1 $N_{x,1} = 50{,}0$ kN och $N_{y,1} = 79{,}7$ kN, riktad snett nedåt höger.

Tolkning. Momentet dominerar: om samma last angrep i tyngdpunkten skulle varje skruv bara få $V/4$, och förbandet skulle bära fyra gånger så mycket, cirka 376 kN. Den horisontella lasten minskar bärförmågan med bara 4 % (utan H blir $V_{Rd} = 93{,}6$ kN). Större avstånd mellan skruvarna ökar $\sum r_j^2$ och är det effektivaste sättet att höja bärförmågan; prova i figur 3.16.

Stål – svetsförband

3.5 Stål: svetsar och svetsförband

Svetsning gör två ståldelar till en sammanhängande del och är det vanligaste sättet att bygga upp och foga samman stålkonstruktioner i verkstaden. Det här avsnittet beskriver vad som händer när man svetsar, de vanligaste svetsmetoderna, hur svetsningen påverkar materialet (zoner, egenspänningar och deformationer), vanliga svetsdefekter och svetslägen. Därefter definieras svetstyperna och de mått som behövs för dimensioneringen: a-måttet och svetsens längd. Hur spänningarna i en kälsvets beräknas och kontrolleras visas i avsnitt 3.6.

3.5.1 Svetsning och svetsmetoder

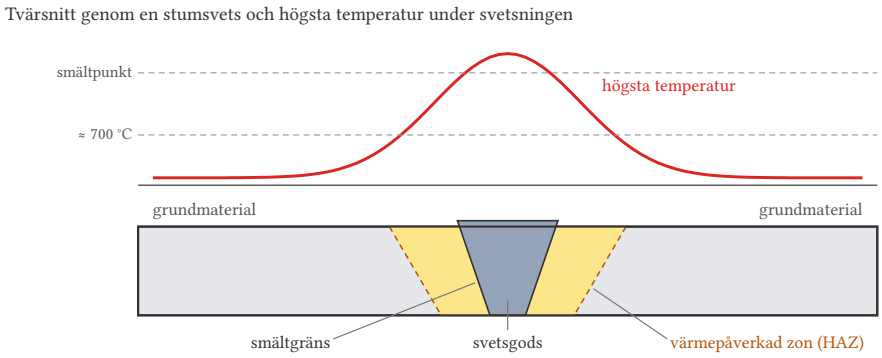
Vid **smältsvetsning** smälts grundmaterialet i fogen lokalt, oftast tillsammans med ett tillsatsmaterial från en elektrod eller tråd. Smältan stelnar till svetsgods som binder ihop delarna. Svetsgodset måste skyddas från luftens syre och kväve, som annars gör det poröst och sprött. Metoderna skiljer sig främst i hur värmen alstras och hur smältan skyddas:

- **Manuell metallbågsvetsning** med belagd elektrod: en ljusbåge mellan elektroden och arbetsstycket smälter både grundmaterial och elektrod. Beläggningen bildar en skyddande gas och slagg. Metoden är enkel och flexibel och fungerar även utomhus.
- **Gasbågsvetsning** (MIG/MAG): en tråd matas fram kontinuerligt och fungerar som elektrod, och ljusbågen skyddas av en gas, ofta argon blandad med koldioxid. Metoden ger få svetsstopp och lämpar sig för mekanisering och robotsvetsning.
- **Pulverbågsvetsning**: ljusbågen brinner under ett lager pulver som smälter till slagg och skyddar svetsen. Metoden är högproduktiv och används för långa raka svetsar i verkstad, till exempel i svetsade balkar.
- **Gassvetsning**: en låga av acetylen och syre smälter materialet. Det är den äldsta metoden och används i dag mest vid reparationer.

Det finns också till exempel punktsvetsning (tunna plåtar), lasersvetsning och friktionssvetsning. Kvaliteten beror mycket på förhållandena: i verkstaden kan delarna vändas och svetsas i bästa läge, medan svetsning på byggplatsen ofta sker i dåliga lägen och i väder och vind. Därför svetsas så mycket som möjligt i verkstaden, och förbanden på byggplatsen görs oftast med skruv.

3.5.2 Svetsens zoner

När svetsen svalnar får materialet närmast den en annan struktur än grundmaterialet, se figur 3.18. **Svetsgodset** har en gjutstruktur. Utanför smältgränsen ligger den **värmepåverkade zonen** (HAZ, *heat-affected zone*): närmast smältgränsen har materialet hettats upp nästan till smältpunkten och fått grova korn, längre ut har det normaliserats och fått en finkornig struktur. Utanför zonen är grundmaterialet opåverkat, eftersom värmen är mycket lokal.

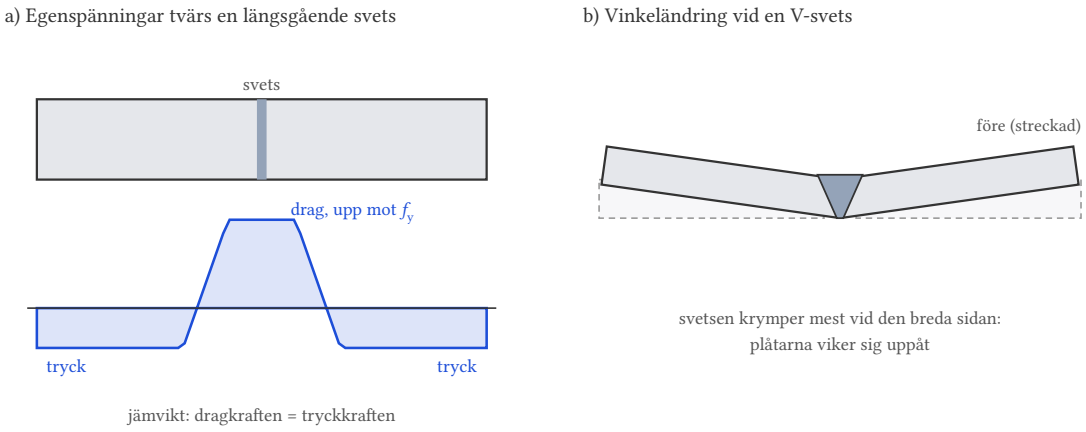


Figur 3.18 Zoner i och kring en stumsvets och den högsta temperaturen som materialet når under svetsningen. Omritad efter kompendiet, figur S9.2, och föreläsningsbilderna.

I ett svetsbart stål och med rätt utförd svetsning blir zonerna inte svagare än grundmaterialet. Svalnar svetsen för fort, i tjocka plåtar eller i stål med hög kolhalt, kan den värmepåverkade zonen däremot bli hård och spröd. Det förebyggs med förvärmning och rätt val av tillsatsmaterial.

3.5.3 Egenspänningar och deformationer

När svetsen svalnar vill den krympa, men det omgivande kalla materialet hindrar den. Svetsen och materialet närmast den får då **dragspänningar**, ofta ända upp till sträckgränsen, och materialet längre bort får **tryckspänningar**, så att tvärsnittet som helhet är i jämvikt, se figur 3.19a. Spänningarna finns kvar utan yttre last och kallas egenspänningar (svetsspänningar). Där krympningen inte hindras blir det i stället **deformationer**: en stumsvets med V-fog krymper mest vid den breda sidan, och plåtarna viker sig så att det blir en vinkeländring, se figur 3.19b. Ju fler strängar svetsen läggs i, desto större blir vinkeländringen; en dubbelsidig X-fog ger mindre vinkeländring.



Figur 3.19 a) Egenspänningar tvärs en plåt med en längsgående svets: drag vid svetsen, tryck längre bort. b) Vinkeländring av två plåtar som stumsvetsats med en enkelsidig V-fog. Omritad efter kompendiet, figur S9.6, och föreläsningsbilderna.

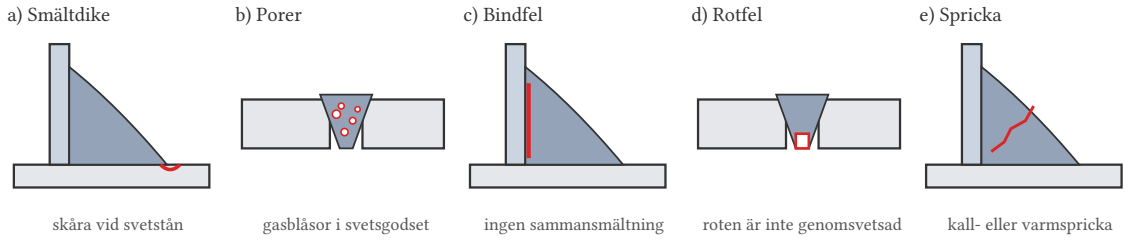
Ordningen som svetsarna läggs i påverkar hur egenspänningarna blir. Svetsas till exempel en I-balk ihop med stumsvetsar, flänsarna först och livet sist, hindrar flänsarna livets krympning, så att livet får dragspänningar och flänsarna tryck. Med omvänd ordning blir det tvärtom. Egenspänningar påverkar inte den statiska bärförmågan hos ett segt material, eftersom de jämnas ut när materialet flyter (EC3-1-8 6.9(2) tillåter att de försummas), men de sänker utmattningshållfastheten och kan vara ogynnsamma för stabiliteten och för risken för sprött brott. För att hålla nere egenspänningar och deformationer

- väljs så små fogar som möjligt;
- undviks korsande svetsar och anhopningar av svetsar;
- planeras svetsordningen så att delarna kan krympa fritt så länge som möjligt;

- kan konstruktionen spänningsfriglödgas vid ungefär 600 °C.

3.5.4 Svetsdefekter

De vanligaste felen i svetsar visas i figur 3.20: **smältdiken** (en skåra i grundmaterialet vid svetsens kant, svetstån), **porer** (gasblåsor i svetsgodset), **bindfel** (svetsgodset har inte smält ihop med grundmaterialet), **rotfel** (roten är inte genomsvetsad) och **sprickor**, som kan uppstå när svetsen stelnar eller när den svalnar. Dessutom förekommer slagginneslutningar och kratrar vid start och stopp. Defekterna fungerar som anvisningar och är särskilt farliga vid utmattning och vid låga temperaturer.

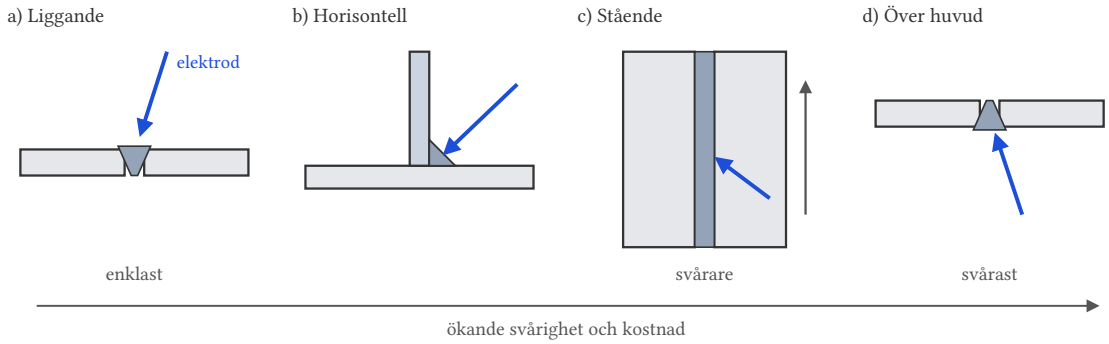


Figur 3.20 Vanliga svetsdefekter: a) smältdike vid svetstån, b) porer, c) bindfel, d) rotfel och e) spricka. Omritad efter föreläsningsbilderna.

Reglerna i EC3-1-8 förutsätter kvalitetsnivå C enligt EN ISO 5817 (EC3-1-8 6.1); vilken kvalitet som krävs bestäms av konstruktionens utförandeklass enligt EN 1090-2. Svetsarna kontrolleras med okulär besiktning och vid behov med oförstörande provning: ultraljud, röntgen, magnetpulver eller penetrant.

3.5.5 Svetslägen

Hur svår en svets är att utföra beror på i vilket läge den läggs, se figur 3.21. Liggande svetsar ovanifrån och liggande kälsvetsar är enklast och ger bäst kvalitet. Stående svetsar är betydligt svårare, och svetsar över huvudet är svårast. Vid handsvetsning kan en stående svets kosta ungefär dubbelt så mycket och en svets över huvud ungefär tre gånger så mycket som en liggande. Konstruktören bör därför se till att svetsarna kan läggas i bra lägen och att det finns plats för elektroden; en svets som inte går att nå blir aldrig bra.



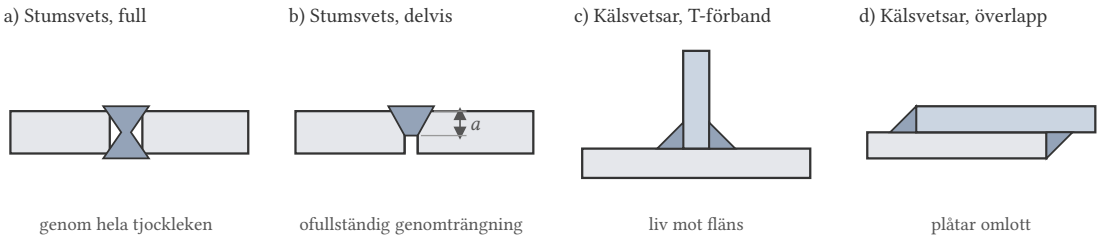
Figur 3.21 Svetslägen: a) liggande, b) horisontell kälsvets, c) stående och d) över huvud. Pilen visar elektrodens riktning. Omritad efter kompendiet, figur S9.5.

3.5.6 Stumsvetsar och kälsvetsar

De två huvudtyperna av svetsar visas i figur 3.22:

- En **stumsvets** läggs mellan två delar vars kanter ligger mot varandra, oftast i en bearbetad fog (V-, X- eller U-fog). Är den svetsad **med full genomträngning** genom hela tjockleken har den minst samma bärförmåga som den svagaste av de förbundna delarna, och den behöver då inte kontrolleras för stål upp till S460 (EC3-1-8 6.7.1). En stumsvets **med delvis genomträngning** dimensioneras som en kälsvets, med ett a-mått som inte är större än det genomträngningsdjup som säkert kan uppnås (EC3-1-8 6.7.2).

- En **kälsvets** läggs i hörnet mellan två delar, till exempel i ett T-förband eller mellan två plåtar som ligger omlott. Kälsvetsar kräver ingen fogberedning och är därför billigast. De får användas när delarnas anliggningsytor bildar en vinkel mellan 60° och 120° (EC3-1-8 6.3.2.1).



Figur 3.22 Svetstyper: a) stumsvets med full genomträngning, b) stumsvets med delvis genomträngning, c) kälsvetsar i ett T-förband och d) kälsvetsar i ett överlappsförband. Omritad efter kompendiet, figur S9.1 och S9.10.

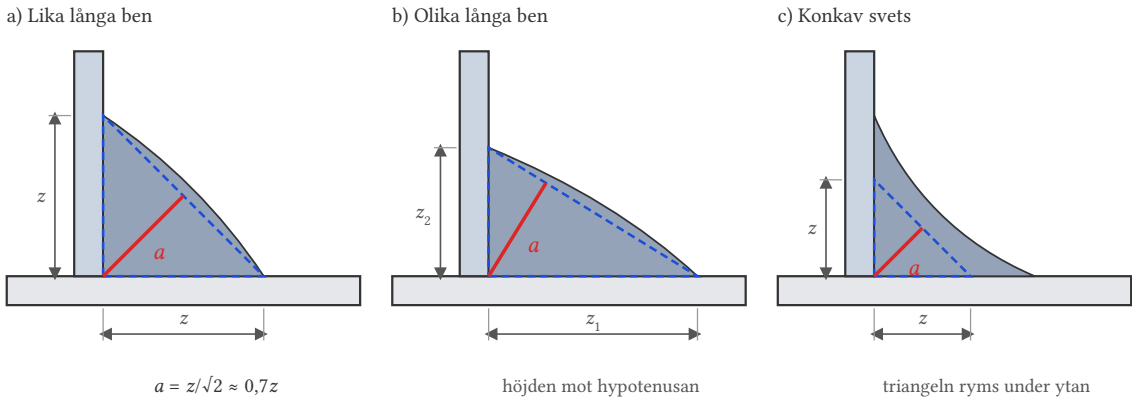
En kälsvets byggs upp av en eller flera strängar. Ett a-mått på 3–5 mm går att lägga i en sträng, 6–9 mm kräver ungefär tre strängar och 10–13 mm ungefär sex. Eftersom arbetet är den största kostnaden växer priset snabbt med a-måttet; flera tunna svetsar är ofta billigare än en tjock.

3.5.7 a-mått

En kälsvets dimensioneras med sitt **a-mått** a (*throat thickness*): höjden i den största triangel som kan skrivas in mellan anliggningsytorna och svetsens yta, mätt vinkelrätt mot triangelns yttre sida (EC3-1-8 6.5.2), se figur 3.23. Triangelns kateter kallas svetsens ben z. För en kälsvets med lika långa ben mellan vinkelräta plåtar är

$$a = \frac{z}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7\,z \tag{3.19}$$

Svetsens kupiga överhöjning räknas inte in. En konkav svets får ett mindre a-mått än benen antyder, eftersom triangeln måste rymmas under ytan. a-måttet ska vara minst 3 mm. Om svetsprocessen säkert ger djupare inträngning än själva fogen får den extra inträngningen räknas in (djupinträngande kälsvets, EC3-1-8 6.5.2(3)).



Figur 3.23 a-måttet a är höjden i den största inskrivna triangeln (streckad), mätt från roten vinkelrätt mot triangelns yttre sida. a) Lika långa ben z. b) Olika långa ben z_1 och z_2. c) Konkav svets. Omritad efter EC3-1-8 figur 6.5 och kompendiet, figur S9.9.

3.5.8 Svetslängd

Svetsens **nominella längd** l är den längd där svetsen har fullt a-mått (EC3-1-8 6.5.1). Vid start och stopp blir svetsen ofta tunnare, och om man inte vet att svetsen har fullt mått hela vägen räknas därför

$$l = l_{tot} - 2a \tag{3.20}$$

där l_{tot} är svetsens totala längd. Ingen reduktion behövs om svetsen görs med fullt mått även i ändarna, till exempel genom att den förs runt hörnet (ändomvikning) eller dras ut på en utloppsbit som sedan skärs bort. En ändomvikning ska vara minst två gånger benlängden och anges på ritningen (EC3-1-8 6.3.2.2).

En kälsvets som är kortare än 30 mm eller kortare än $6a$ får inte räknas som bärande (EC3-1-8 6.5.1(2)). Långa svetsar i överlappsförband får reducerad bärförmåga, se avsnitt 3.6.4.

Exempel 3.4 a-mått, benlängd och nominell längd

En plåt är fastsvetsad med en kälsvets med $a = 5$ mm och den totala längden $l_{tot} = 120$ mm. Svetsen slutar rakt av i båda ändar, utan ändomvikning. Bestäm benlängden, den nominella längden som får användas i beräkningen och kontrollera minsta längd.

Benlängd. Med lika långa ben ger ekv. (3.19)

$$z = \sqrt{2}\,a = \sqrt{2} \cdot 5 = 7{,}1 \text{ mm}$$

Nominell längd. Svetsen har inte fullt mått i ändarna, så ekv. (3.20) ger

$$l = l_{tot} - 2a = 120 - 2 \cdot 5 = 110 \text{ mm}$$

Minsta längd. Kravet är $l \geq \max\{30;\, 6a\} = \max\{30;\, 30\} = 30$ mm, vilket är uppfyllt med god marginal. a-måttet uppfyller också kravet $a \geq 3$ mm.

Tolkning. Avdraget för ändarna minskar bärförmågan med 8 %. Förs svetsen runt plåtens hörn med minst $2z = 14$ mm i varje ände får hela längden 120 mm räknas.

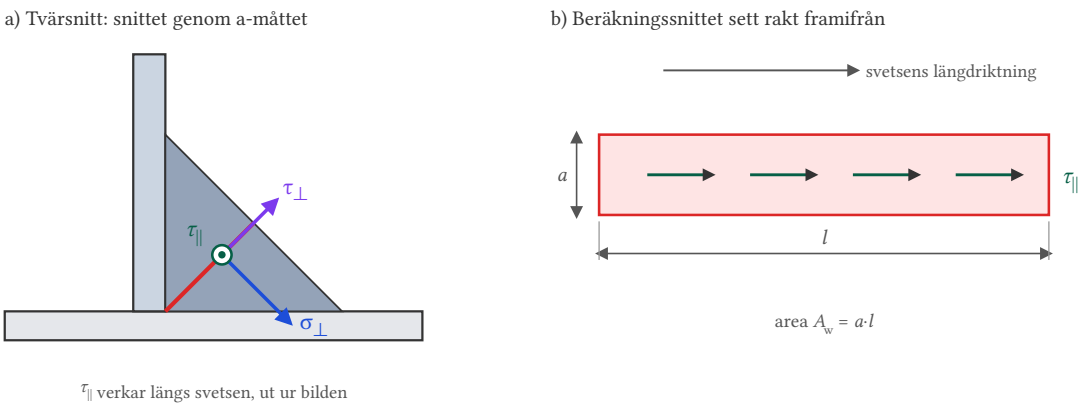
3.6 Svetsförband: spänningar och bärförmåga i kälsvetsar

En kälsvets kan belastas längs sin längdriktning, vinkelrätt mot den eller i båda riktningarna samtidigt, och spänningarna i svetsen blir olika i de olika fallen. Det här avsnittet visar hur spänningarna i en kälsvets beräknas i ett beräkningssnitt genom a-måttet och hur de kontrolleras enligt EC3-1-8 6.5, med riktningsmetoden och den förenklade metoden. Därefter behandlas tre typfall från kursen: spänningsfördelningen längs en lång svets, halssvetsarna mellan fläns och liv i en I-balk och en platta som är fastsvetsad med två kälsvetsar och belastad med krafter och moment. Begreppen a-mått och svetslängd definieras i avsnitt 3.5. Spänningarna beräknas med de nominella krafterna enligt elementär hållfasthetslära; egenspänningar räknas inte med (EC3-1-8 6.9(2)).

3.6.1 Beräkningssnittet och spänningarna

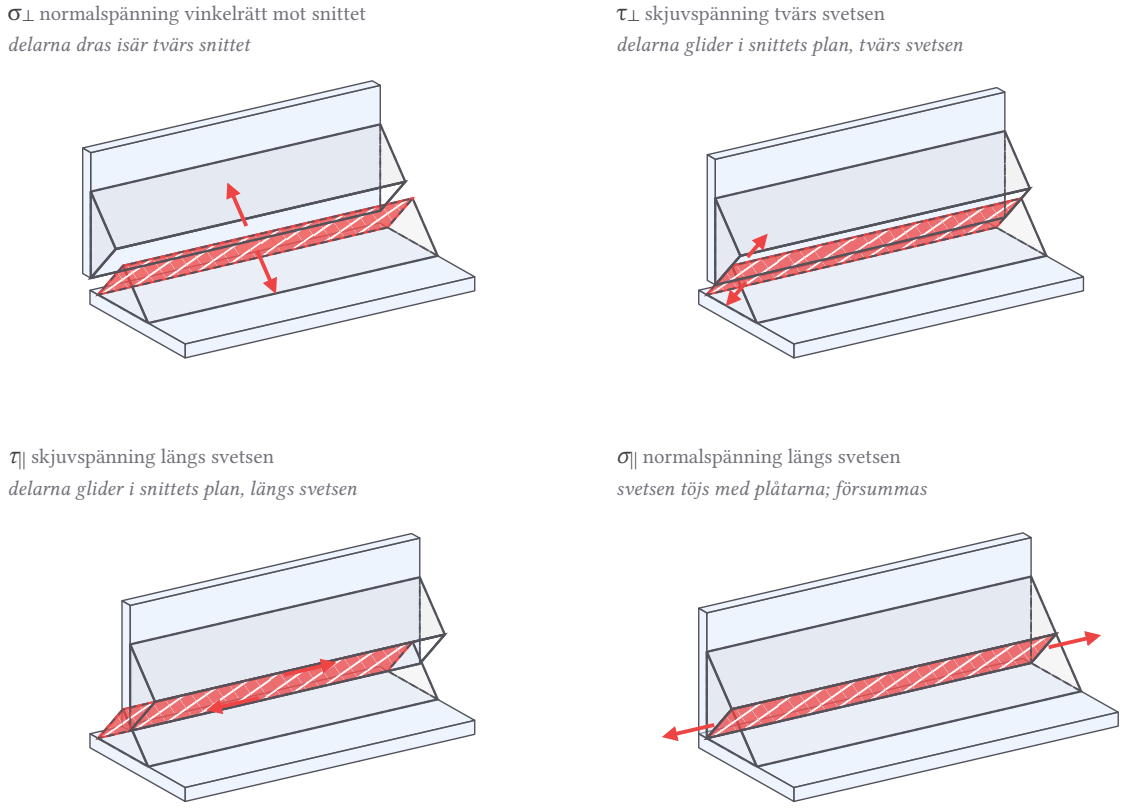
En kälsvets dimensioneras i ett **beräkningssnitt** genom a-måttet, med arean $A_w = a \cdot l$, där l är svetsens nominella längd. Snittet antas ligga i svetsens rot, och spänningen antas jämnt fördelad över snittet (EC3-1-8 6.5.3.2). Spänningen i snittet delas upp i komposanter, se figur 3.24:

- $\sigma_\perp$: normalspänning vinkelrätt mot snittet;
- $\tau_\perp$: skjuvspänning i snittets plan, vinkelrätt mot svetsens längdriktning;
- $\tau_\parallel$: skjuvspänning i snittets plan, längs svetsens längdriktning;
- $\sigma_\parallel$: normalspänning längs svetsen. Den uppstår när svetsen töjs med de förbundna delarna, men för inte över någon kraft mellan dem och försummas.



Figur 3.24 Spänningarna i beräkningssnittet genom a-måttet. a) Tvärsnitt genom svetsen: $\sigma_\perp$ vinkelrätt mot snittet och $\tau_\perp$ i snittets plan. b) Snittet sett rakt framifrån, med arean $a \cdot l$ och skjuvspänningen $\tau_\parallel$ längs svetsen. Omritad efter EC3-1-8 figur 6.7.

Vad varje komposant betyder blir tydligt om svetsen tänks delad i beräkningssnittet, så att den ena halvan följer den ena plåten och den andra halvan den andra plåten. Varje spänningskomposant vill då flytta halvorna på ett bestämt sätt i förhållande till varandra, se figur 3.25. Normalspänningen $\sigma_\perp$ drar isär halvorna tvärs snittet, medan de båda skjuvspänningarna låter dem glida i snittets plan, $\tau_\perp$ tvärs svetsen och $\tau_\parallel$ längs den. Normalspänningen $\sigma_\parallel$ ger ingen relativ rörelse alls: hela svetsen töjs bara tillsammans med plåtarna.



Figur 3.25 Rörelsen som varje spänningskomposant i beräkningssnittet motsvarar. Svetsen är delad i snittet genom a-måttet; den undre delen sitter i den liggande plåten och den övre följer den stående plåten. Efter animationer av författaren.

Last vinkelrätt mot svetsen

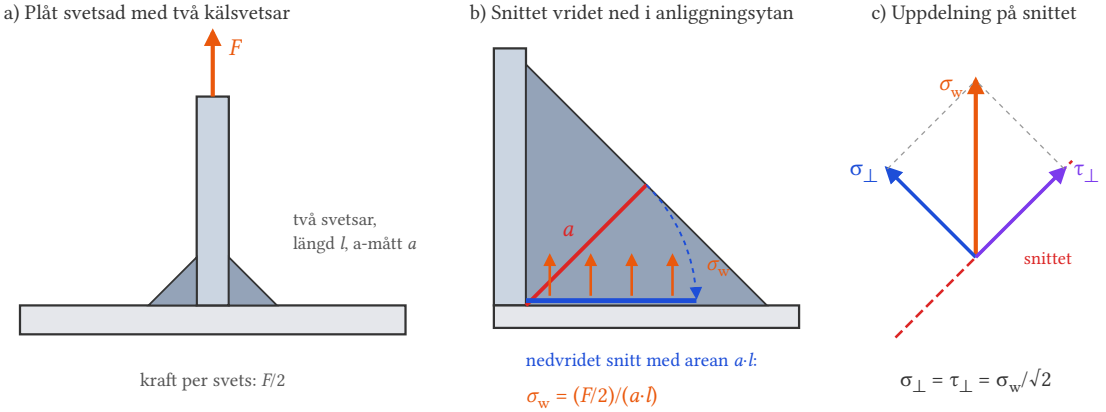
Betrakta en plåt som dras ut ur en annan plåt med kraften F och är fastsvetsad med två kälsvetsar med längden l, se figur 3.26. Varje svets för över $F_w = F/2$. Snittet genom a-måttet lutar 45° mot plåtarna. Ett enkelt sätt att dela upp kraften är att tänka sig snittet **vridet ned** i anliggningsytan mot den andra plåten, så att det blir vinkelrätt mot kraften. På det nedvridna snittet, med samma area $a \cdot l$, ger kraften spänningen

$$\sigma_w = \frac{F_w}{a\,l}$$

Vrids snittet tillbaka till sitt verkliga läge delas spänningen upp i en komposant vinkelrät mot snittet och en i snittets plan. Båda bildar 45° med σ_w, så

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{\sigma_w}{\sqrt{2}} = \frac{F_w}{\sqrt{2}\,a\,l} \tag{3.21}$$

Samma resultat fås direkt genom att dela upp kraften F_w i komposanter vinkelrätt mot och längs det verkliga snittet, $F_w/\sqrt{2}$ vardera, och dividera med snittets area. För två svetsar som tillsammans för över F blir $\sigma_\perp = \tau_\perp = F/(2\sqrt{2}\,a\,l)$.



Figur 3.26 Last vinkelrätt mot en kälsvets. a) Plåt med två kälsvetsar som dras med kraften F. b) Snittet genom a-måttet (rött) vridet ned i anliggningsytan (blått), där kraften ger spänningen σ_w. c) Uppdelning av σ_w på det verkliga snittet: $\sigma_\perp = \tau_\perp = \sigma_w/\sqrt{2}$. Omritad efter kompendiet, figur S9.13, och föreläsningsbilderna.

Last längs svetsen

En kraft F_w längs svetsen ger bara skjuvspänning längs snittet:

$$\tau_\parallel = \frac{F_w}{a\,l} \tag{3.22}$$

Är lasten utbredd längs svetsen arbetar man med kraft per längdenhet, q (N/mm). Då är $\sigma_\perp = \tau_\perp = q_\perp/(\sqrt{2}\,a)$ och $\tau_\parallel = q_\parallel/a$.

3.6.2 Riktningsmetoden

En kälsvets har tillräcklig bärförmåga om båda villkoren är uppfyllda (EC3-1-8 6.5.3.2(6), formel (6.1)):

$$\sqrt{\sigma_\perp^2 + 3\left(\tau_\perp^2 + \tau_\parallel^2\right)} \le \frac{f_u}{\beta_w\,\gamma_{M2}} \quad \text{och} \quad \sigma_\perp \le \frac{0{,}9\,f_u}{\gamma_{M2}} \tag{3.23}$$

Vänsterledet i det första villkoret är en jämförelsespänning enligt von Mises, och f_u är brottgränsen hos den svagaste av de förbundna delarna. **Korrelationsfaktorn** β_w tar hänsyn till att svetsgodset normalt är starkare än grundmaterialet och att materialen blandas vid svetsningen; den är kalibrerad mot försök så att man kan räkna med grundmaterialets f_u i stället för med en blandad hållfasthet. Det andra villkoret begränsar normalspänningen så att svetsen inte går till brott i rent drag. Värden finns i tabell 3.5.

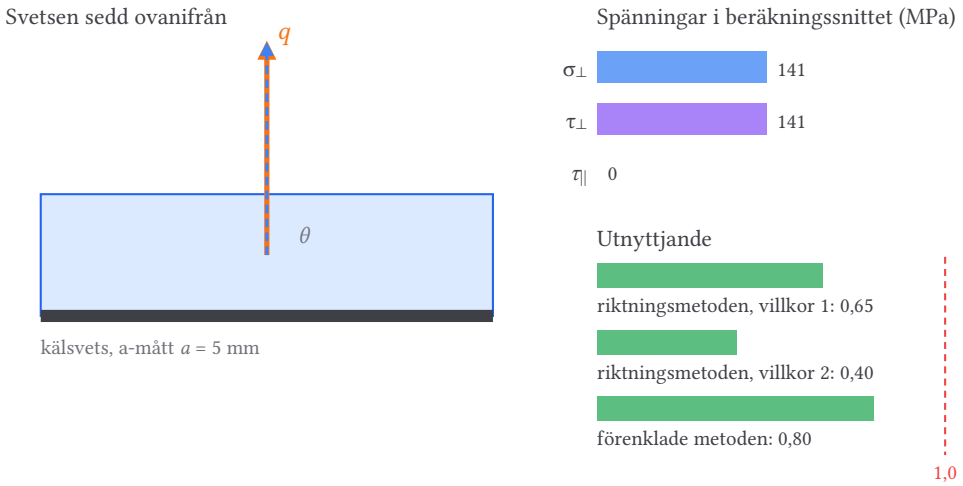
Tabell 3.5 Korrelationsfaktorn βw enligt EC3-1-8 tabell 6.1 för stål enligt EN 10025 och de hållfastheter som den ger med γM2 = 1,25 (fu för t ≤ 40 mm enligt EC3 tabell 5.1)

Stål	β_w	f_u (MPa)	$f_u/(\beta_w\gamma_{M2})$ (MPa)	$0{,}9f_u/\gamma_{M2}$ (MPa)	$f_{vw,d}$ (MPa)
S235	0,80	360	360	259	208
S275	0,85	390	367	281	212
S355	0,90	490	436	353	251
S420	0,88	510	464	367	268
S460	0,85	540	508	389	293

Två specialfall visar hur villkoret fungerar:

- **Last längs svetsen:** $\sqrt{3}\,\tau_\parallel \le f_u/(\beta_w\gamma_{M2})$, alltså $F_w \le a\,l\,f_u/(\sqrt{3}\,\beta_w\gamma_{M2})$.
- **Last vinkelrätt mot svetsen:** med ekv. (3.21) blir jämförelsespänningen $\sqrt{\sigma_\perp^2 + 3\sigma_\perp^2} = 2\sigma_\perp = \sqrt{2}\,F_w/(a\,l)$, alltså $F_w \le a\,l\,f_u/(\sqrt{2}\,\beta_w\gamma_{M2})$.

En tvärbelastad svets bär alltså $\sqrt{3/2} \approx 1{,}22$ gånger mer än en längsbelastad med samma a-mått och längd. Det andra villkoret blir avgörande först när $\sigma_\perp$ är stor och skjuvspänningarna små. Sambanden kan provas i figur 3.27.



Figur 3.27 Spänningar och utnyttjande i en kälsvets som belastas med en linjelast q i vinkeln θ mot svetsens längdriktning, enligt riktningsmetoden och den förenklade metoden.

3.6.3 Förenklade metoden

Som alternativ till riktningsmetoden får man räkna med resultanten av alla krafter per längdenhet, $F_{w,Ed}$, oberoende av riktning (EC3-1-8 6.5.3.3):

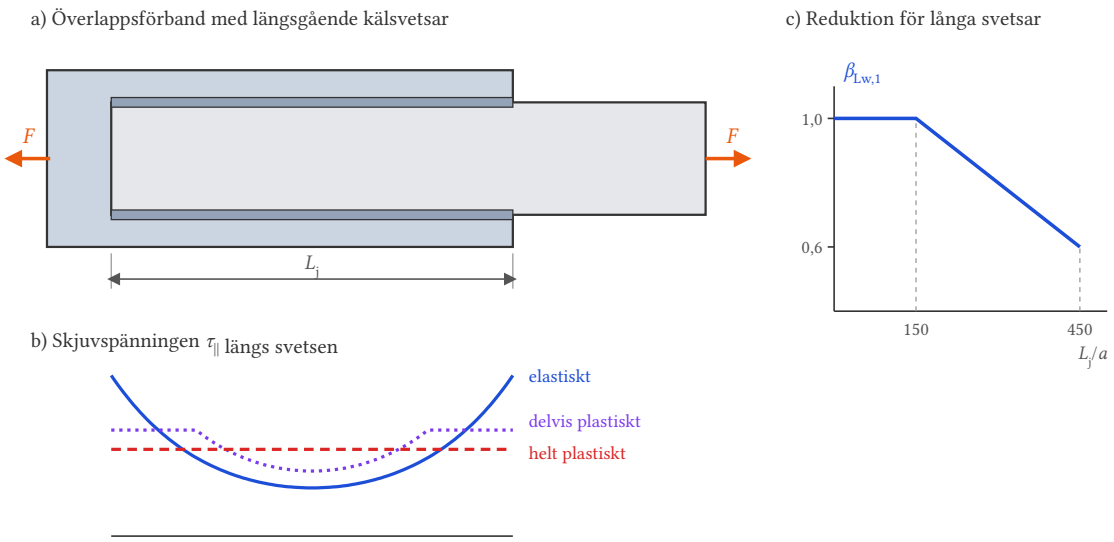
$$F_{w,Ed} \le F_{w,Rd} = f_{vw,d}\cdot a, \qquad f_{vw,d} = \frac{f_u}{\sqrt{3}\,\beta_w\,\gamma_{M2}} \tag{3.24}$$

Hållfastheten $f_{vw,d}$ är svetsens skjuvhållfasthet, och metoden behandlar alltså varje last som om den gick längs svetsen. Den är enkel men konservativ för laster vinkelrätt mot svetsen, där den ger ungefär 18 % lägre bärförmåga än riktningsmetoden.

3.6.4 Spänningsfördelning längs en längsgående svets

I ett överlappsförband med längsgående kälsvetsar, se figur 3.28a, beräknas skjuvspänningen som om den vore jämnt fördelad: $\tau_\parallel = P_s/(a\,L)$, där P_s är kraften per svets och L svetsens nominella längd. I verkligheten är fördelningen ojämn i elastiskt stadium. Plåtarna töjs olika mycket längs förbandet: vid den ena änden bär den ena plåten nästan hela kraften och vid den andra änden den andra plåten, så den relativa förskjutningen och därmed skjuvspänningen blir störst vid svetsens ändar, se figur 3.28b. Fördelningen blir

ojämnare ju längre svetsen är och ju mindre plåtarnas tvärsnittsarea är, precis som för skruvarna i ett långt skruvförband (Långa förband).



Figur 3.28 a) Överlappsförband med två längsgående kälsvetsar med längden L_j. b) Skjuvspänningen längs svetsen: elastisk fördelning med toppar vid ändarna, delvis och helt plasticerad. c) Reduktionsfaktorn $\beta_{Lw,1}$ enligt ekv. (3.25). Omritad efter kompendiet, figur S9.11 och S9.12.

I en kort svets plasticeras ändarna och spänningen omfördelas tills den är nästan jämn när svetsen går till brott; då är medelspänningen ett riktigt mått. I en lång svets räcker deformationsförmågan inte: ändarna går till brott innan spänningen har hunnit jämnas ut, och en beräkning med hela längden skulle hamna på osäkra sidan. Därför reduceras bärförmågan för överlappsförband som är längre än $150a$ med faktorn (EC3-1-8 6.11, formel (6.15))

$$\beta_{Lw,1} = 1{,}2 - \frac{0{,}2\,L_j}{150\,a} \le 1{,}0 \tag{3.25}$$

där L_j är överlappets längd i kraftriktningen. Reduktionen gäller inte när spänningen i svetsen följer spänningen i grundmaterialet, som i halssvetsarna mellan fläns och liv i en balk (EC3-1-8 6.11(5)). För stål S460 och högre får längsgående svetsar i överlappsförband inte räknas längre än $150a$.

3.6.5 Halssvetsar i en I-balk

I en svetsad I-balk håller halssvetsarna ihop flänsarna och livet. När balken böjs varierar flänskraften längs balken, och skillnaden måste föras över till livet genom svetsarna, annars skulle flänsen glida i förhållande till livet. Betrakta ett balkelement med längden $\mathrm{d}x$, se figur 3.29. Momentjämvikt för elementet ger

$$M - (M + \mathrm{d}M) + V\,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$$

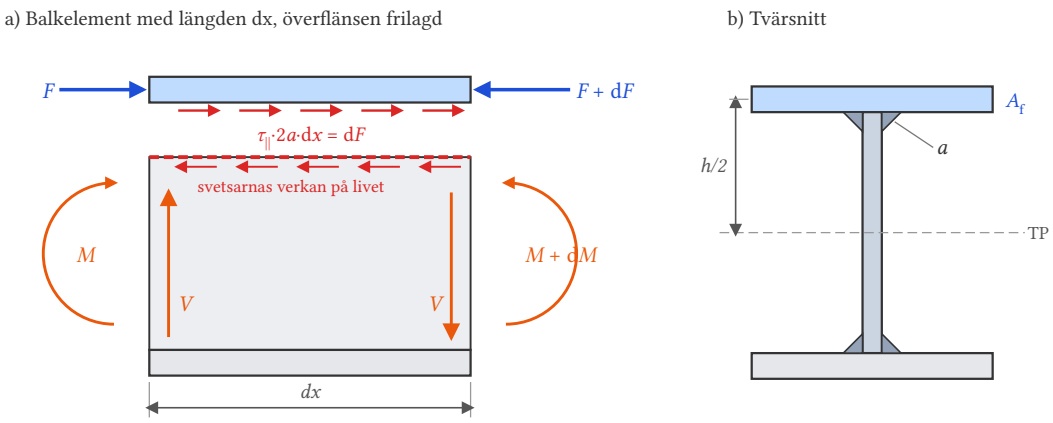
Flänskraften är normalspänningen i flänsens tyngdpunkt gånger flänsarean, $F = (M/I) \cdot (h/2) \cdot A_f$, där $h/2$ är avståndet från balkens tyngdpunkt till flänsens tyngdpunkt. Skillnaden över elementet är

$$\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}M}{I} \cdot \frac{h}{2} A_f = \frac{\mathrm{d}M\,S}{I}$$

där $S = A_f\,h/2$ är flänsens statiska moment kring balkens tyngdpunkt. Flänsen hålls i jämvikt av skjuvspänningen i de två svetsarna, $\tau_\parallel \cdot 2a \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}F$. Insättning av $\mathrm{d}M = V\,\mathrm{d}x$ ger

$$\tau_\parallel = \frac{V\,S}{I \cdot 2a} \tag{3.26}$$

Det är samma uttryck som skjuvspänningen i ett balktvärsnitt, med livtjockleken utbytt mot svetsarnas sammanlagda a-mått $2a$.



Figur 3.29 a) Balkelement med längden dx i en balk med positivt moment (fältmoment), med överflänsen frilagd. Flänsen trycks av F och $F + \mathrm{d}F$, och skillnaden dF tas av skjuvspänningen $\tau_{\parallel}$ i halssvetsarna. Livet påverkas av en lika stor, motriktad kraft. b) Tvärsnitt med flänsarean A_f, avståndet $h/2$ och halssvetsarna med a-måttet a. Omritad efter kompendiet, figur S9.14 och S9.15.

Punktlast på flänsen

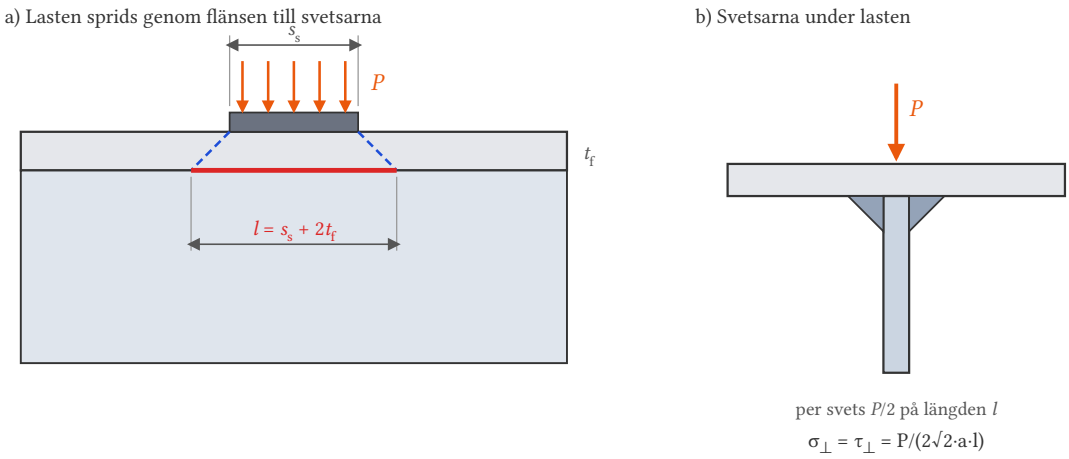
Under en punktlast som angriper direkt på överflänsen, utan avstyvning, måste lasten också föras från flänsen till livet genom halssvetsarna. Svetsarna belastas då vinkelrätt mot sin längdriktning, se figur 3.30. Lasten antas spridas genom flänsen med lutningen 1:1, så att den fördelas på längden

$$l = s_s + 2t_f \tag{3.27}$$

där s_s är lastens anliggningslängd och t_f flänstjockleken. Med två svetsar ger ekv. (3.21)

$$\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} = \frac{P}{2\sqrt{2}\,a\,l} \tag{3.28}$$

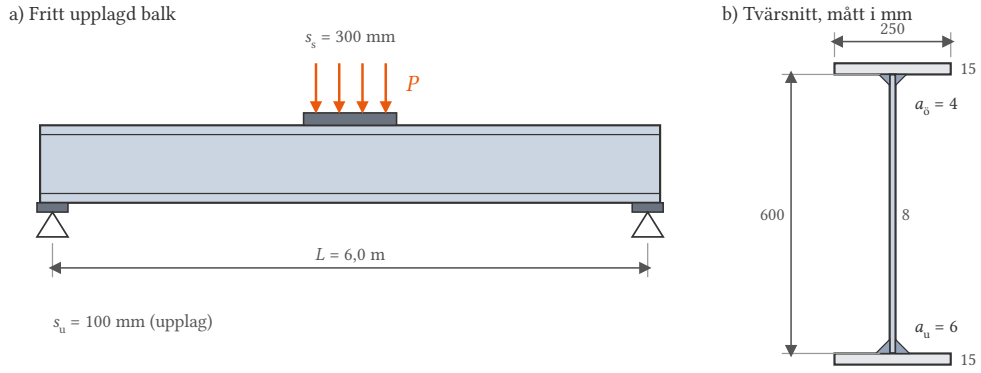
Under lasten verkar dessutom $\tau_{\parallel}$ från tvärkraften, så alla tre spänningarna kombineras i ekv. (3.23). Samma sak gäller underflänsens svetsar vid ett upplag. Om lasten förs in via en avstyvning tar avstyvningens svetsar lasten i stället.



Figur 3.30 Punktlast på en I-balks överfläns. a) Lasten sprids genom flänsen till längden $l = s_s + 2t_f$ vid svetsarna. b) Varje svets bär $P/2$ på längden l, vinkelrätt mot sin längdriktning. Omritad efter föreläsningsbilderna.

Exempel 3.5 Halssvetsar i en punktbelastad I-balk

En fritt upplagd svetsad I-balk med spännvidden $L = 6{,}0$ m bär en dimensionerande punktlast $P = 600$ kN i mitten, se figur 3.31. Lasten angriper på överflänsen över längden $s_s = 300$ mm, och upplagslängden är $s_u = 100$ mm. Livet är 600×8 mm och flänsarna 250×15 mm. Halssvetsarna har $a = 4$ mm vid överflänsen och $a = 6$ mm vid underflänsen. Stål S275. Kontrollera halssvetsarna under lasten och vid upplaget.



Figur 3.31 Balken i exemplet. a) Last och upplag. b) Tvärsnitt, mått i mm.

Material. S275 har $f_u = 390$ MPa och $\beta_w = 0{,}85$. Tabell 3.5 ger gränserna $f_u/(\beta_w \gamma_{M2}) = 367{,}1$ MPa och $0{,}9 f_u/\gamma_{M2} = 280{,}8$ MPa.

Tvärsnittsdata. Flänsens tyngdpunkt ligger $300 + 15/2 = 307{,}5$ mm från balkens tyngdpunkt. Trögheitsmomentet och flänsens statiska moment är

$$I = \frac{8 \cdot 600^3}{12} + 2\left(\frac{250 \cdot 15^3}{12} + 250 \cdot 15 \cdot 307{,}5^2\right)$$
$$= 853{,}3 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

$$S = A_f \cdot \frac{h}{2} = 250 \cdot 15 \cdot 307{,}5 = 1{,}153 \cdot 10^6 \text{mm}^3$$

Tvärkraft. I hela balken är $|\,V\,| = P/2 = 300$ kN.

Översvetsar under lasten. ekv. (3.26) ger skjuvspänningen längs svetsarna

$$\tau_\parallel = \frac{VS}{I \cdot 2a} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 1{,}153 \cdot 10^6}{853{,}3 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 4} = 50{,}7 \text{ MPa}$$

Lasten sprids enligt ekv. (3.27) till $l = 300 + 2 \cdot 15 = 330$ mm, och ekv. (3.28) ger

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{P}{2\sqrt{2}\,a\,l} = \frac{600 \cdot 10^3}{2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 330} = 160{,}7 \text{ MPa}$$

Kontroll av översvetsarna. ekv. (3.23) ger

$$\sqrt{160{,}7^2 + 3 \cdot (160{,}7^2 + 50{,}7^2)} = 333{,}2 \text{ MPa} \le 367{,}1 \text{ MPa}$$

och $\sigma_\perp = 160{,}7$ MPa $\le 280{,}8$ MPa. Utnyttjandegraden är $333{,}2/367{,}1 = 0{,}91$.

Undersvetsar vid upplaget. Med $a = 6$ mm är $\tau_\parallel = 50{,}7 \cdot 4/6 = 33{,}8$ MPa. Upplagskraften $R = 300$ kN sprids till $l = 100 + 2 \cdot 15 = 130$ mm:

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{300 \cdot 10^3}{2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 130} = 136{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{136{,}0^2 + 3 \cdot (136{,}0^2 + 33{,}8^2)} = 278{,}2 \text{ MPa} \le 367{,}1 \text{ MPa}$$

och $\sigma_\perp = 136{,}0$ MPa $\leq 280{,}8$ MPa. Utnyttjandegraden är 0,76.

Tolkning. Båda svetsarna klarar lasten. Det är den lokala lasten och inte tvärkraften som dominerar: utan punktlasten skulle översvetsarna bara få $\sqrt{3} \cdot 50{,}7 = 88$ MPa. Med en avstyvning under lasten och vid upplagen skulle halssvetsarna klara sig med minsta a-måttet; i stället får avstyvningarnas svetsar ta de lokala krafterna.

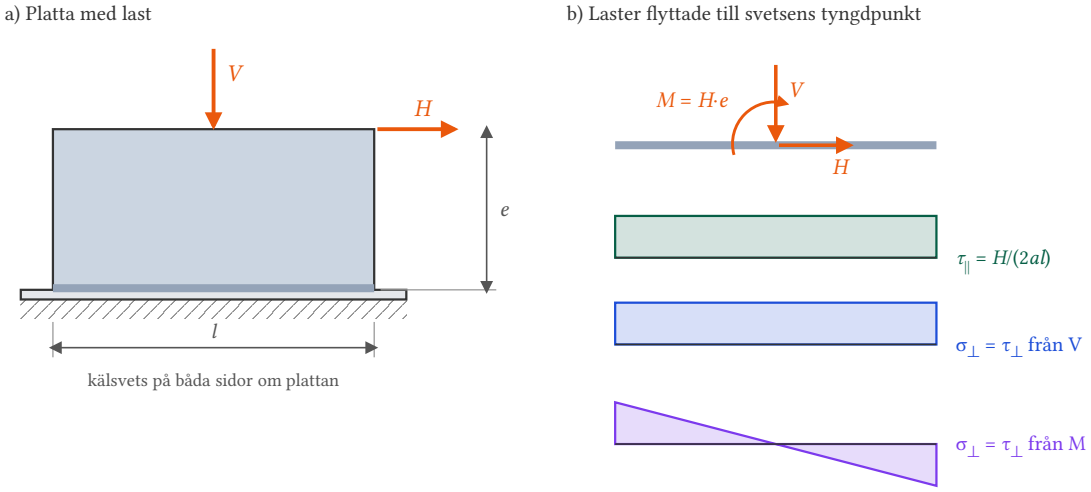
3.6.6 Platta med vertikal och horisontell kraft

En platta som är fastsvetsad mot en balk med två kälsvetsar, en på var sida, och belastas med en vertikal kraft V och en horisontell kraft H på höjden e över svetsen är ett vanligt fall, se figur 3.32. Lasterna flyttas till svetsgruppens tyngdpunkt i mitten av svetsarna, på samma sätt som för en skruvgrupp (avsnitt 3.4.2): kvar blir V, H och momentet $M = H \cdot e$. Spänningarna i svetsarna (längd l, a-mått a) blir:

- H verkar längs svetsarna och ger en jämnt fördelad skjuvspänning $\tau_\parallel = H/(2\,a\,l)$.
- V verkar vinkelrätt mot svetsarna och ger enligt ekv. (3.21) $\sigma_\perp = \tau_\perp = V/(2\sqrt{2}\,a\,l)$, jämnt fördelat.
- M böjer svetsarna i deras eget plan. Varje svets har böjmotståndet $W_w = a\,l^2/6$, och momentet ger normalspänningen $M/(2W_w)$ på det nedvridna snittet, som varierar linjärt från drag i ena änden till tryck i den andra. Uppdelad på det verkliga snittet blir den

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{M}{2\sqrt{2}\,W_w}, \qquad W_w = \frac{a\,l^2}{6} \tag{3.29}$$

Bidragen från V och M adderas i den ände där de har samma tecken, och spänningarna kontrolleras där med ekv. (3.23). Om plattan i stället är svetsad runt om och momentet verkar i svetsarnas plan kan man göra som för en skruvgrupp: kraften per längdenhet från momentet blir $q = M\,r/I_{p,w}$ vinkelrätt mot radien r från svetsgruppens tyngdpunkt, där $I_{p,w} = \int r^2\,\mathrm{d}l$ är svetslinjernas polära tröghetsmoment. Resultanten jämförs enklast med ekv. (3.24).



Figur 3.32 Platta svetsad mot en balk med två kälsvetsar. a) Laster. b) Lasterna flyttade till svetsens tyngdpunkt och spänningarna längs svetsen: $\tau_\parallel$ från H, $\sigma_\perp = \tau_\perp$ från V (jämnt fördelade) och från $M = He$ (linjärt varierande). Omritad efter instuderingsfråga 5.

Tabell 3.6 sammanfattar spänningarna för de vanligaste fallen.

Tabell 3.6 Spänningar i kälsvetsar för några vanliga fall (två svetsar med längden l och a-måttet a om inget annat anges). Sammanställd efter kursens översikt Kraftspel i svetsförband

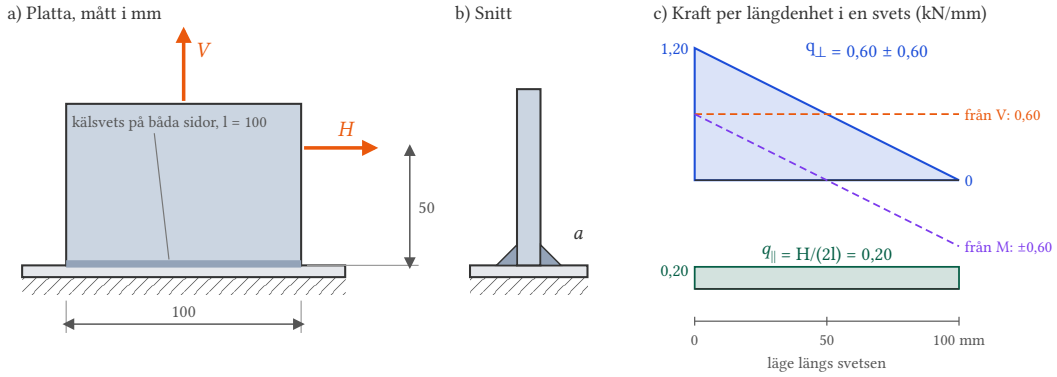
Fall	$\tau_\parallel$	$\sigma_\perp = \tau_\perp$
Överlappsförband, kraft P längs svetsarna	$P/(2al)$	–

Fall	$\tau_\parallel$	$\sigma_\perp = \tau_\perp$
T-förband, kraft P vinkelrätt mot svetsarna	–	$P/(2\sqrt{2}\,al)$
Platta med V och H på höjden e	$H/(2al)$	$V/(2\sqrt{2}\,al) + M/(2\sqrt{2}\,W_w)$, $M = He$
Halssvetsar i balk, tvärkraft V	$VS/(2aI)$	–
Halssvetsar under punktlast P	$VS/(2aI)$	$P/(2\sqrt{2}\,al)$, $l = s_s + 2t_f$
Påsvetsad förstärkningsplåt på fläns	$VS_p/(2aI)$	–

I den sista raden är S_p förstärkningsplåtens statiska moment kring balkens tyngdpunkt.

Exempel 3.6 Platta med vertikal och horisontell kraft

En platta är fastsvetsad mot en balkfläns med två kälsvetsar med längden $l = 100$ mm, en på var sida, se figur 3.33. Plattan dras uppåt av den dimensionerande kraften $V = 120$ kN i mitten och belastas dessutom med $H = 40$ kN på höjden $h = 50$ mm över svetsen. Svetsarna har fullt mått hela vägen (ändomvikning). Stål S355. Bestäm erforderligt a-mått, dels för enbart V, dels för V och H tillsammans.



Figur 3.33 a) Plattan i exemplet, mått i mm. b) Snitt med de två kälsvetsarna. c) Kraft per längdenhet i en svets: $q_\perp$ från V och momentet, $q_\parallel$ från H.

Material. S355 har $f_u = 490$ MPa och $\beta_w = 0{,}90$, och tabell 3.5 ger $f_u/(\beta_w\gamma_{M2}) = 435{,}6$ MPa och $0{,}9f_u/\gamma_{M2} = 352{,}8$ MPa.

Krafter per längdenhet. Det är enklast att räkna med kraften per millimeter svets och dividera med a-måttet först i kontrollen. Varje svets tar halva lasten. Kraften V ger

$$q_{\perp,V} = \frac{V}{2l} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 100} = 600 \text{ N/mm}$$

Momentet kring svetsens mitt är $M = Hh = 40 \cdot 50 = 2\,000$ kNmm. Det ger kraften per längdenhet $M/(2\,l^2/6)$ i svetsens ändar, drag i den vänstra änden:

$$q_{\perp,M} = \frac{6M}{2\,l^2} = \frac{6 \cdot 2\,000 \cdot 10^3}{2 \cdot 100^2} = 600 \text{ N/mm}$$

Kraften H ger

$$q_\parallel = \frac{H}{2l} = \frac{40 \cdot 10^3}{2 \cdot 100} = 200 \text{ N/mm}$$

I den vänstra änden är alltså $q_\perp = 600 + 600 = 1\,200$ N/mm och $q_\parallel = 200$ N/mm, se figur 3.33c.

Erforderligt a-mått, enbart V. Med $\sigma_\perp = \tau_\perp = q_\perp/(\sqrt{2}\,a)$ blir jämförelsespänningen $2\sigma_\perp = \sqrt{2}\,q_\perp/a$, och ekv. (3.23) ger

$$a \geq \frac{\sqrt{2}\, q_{\perp,V}}{f_u/(\beta_w \gamma_{M2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot 600}{435{,}6} = 1{,}95 \text{ mm}$$

Minsta tillåtna a-mått är 3 mm, som alltså räcker.

Erforderligt a-mått, V och H. Med alla tre spänningarna är jämförelsespänningen $\sqrt{2q_\perp^2 + 3q_\parallel^2}/a$:

$$a \geq \frac{\sqrt{2 \cdot 1\,200^2 + 3 \cdot 200^2}}{435{,}6} = \frac{1\,732}{435{,}6} = 3{,}98 \text{ mm}$$

Välj $a = 4$ mm.

Kontroll med a = 4 mm. Spänningarna i den vänstra änden är

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{1\,200}{\sqrt{2} \cdot 4} = 212{,}1 \text{ MPa}, \qquad \tau_\parallel = \frac{200}{4} = 50{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{212{,}1^2 + 3 \cdot (212{,}1^2 + 50{,}0^2)} = 433{,}0 \text{ MPa} \leq 435{,}6 \text{ MPa}$$

och $\sigma_\perp = 212{,}1 \text{ MPa} \leq 352{,}8$ MPa. Längden $l = 100$ mm uppfyller $l \geq \max\{30;\, 6a\}$, och förbandet är inget överlappsförband, så ingen reduktion för lång svets behövs.

Jämförelse med förenklade metoden. Resultanten per längdenhet är $F_{w,Ed} = \sqrt{1\,200^2 + 200^2} = 1\,217$ N/mm, och ekv. (3.24) ger $f_{vw,d} = 251{,}5$ MPa:

$$a \geq \frac{F_{w,Ed}}{f_{vw,d}} = \frac{1\,217}{251{,}5} = 4{,}84 \text{ mm}$$

Tolkning. Den horisontella kraften kräver ett dubbelt så stort a-mått, främst genom momentet Hh, som fördubblar dragkraften per längdenhet i svetsens ände. Med riktningsmetoden räcker $a = 4$ mm (utnyttjande 0,99), medan den förenklade metoden kräver 5 mm eftersom den behandlar den tvärgående lasten som om den gick längs svetsen.

Trä

3.7 Träförband: typer och verkningssätt

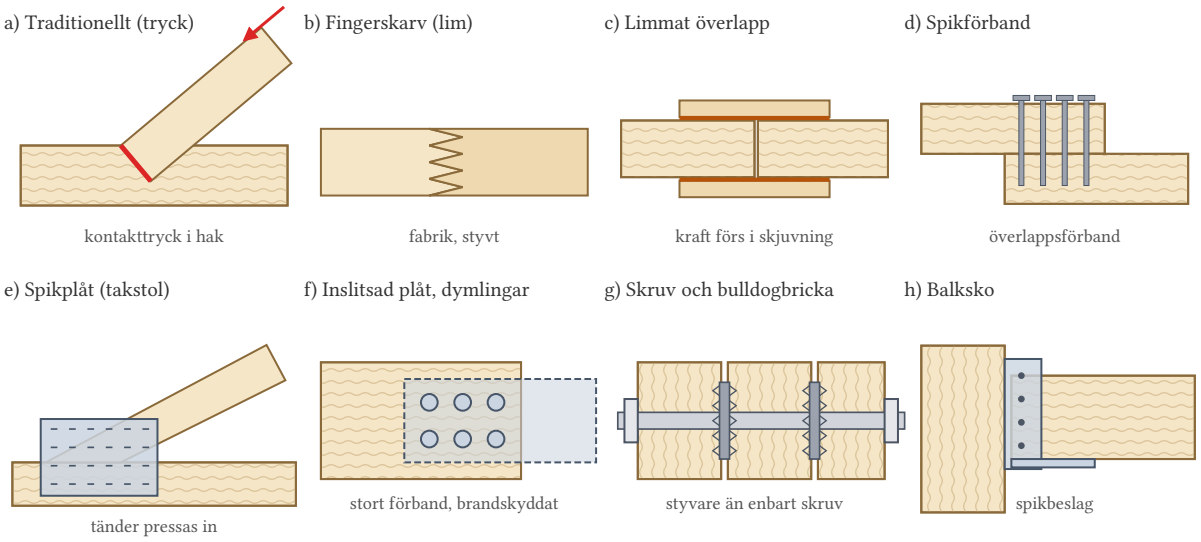
Trä fogas samman på många olika sätt, från hantverksmässiga snickeriförband till industriellt tillverkade spikplåtar och inlimmade stänger. Det här avsnittet går igenom de vanligaste förbandstyperna, hur de för över kraft och hur styva de är. Den gemensamma bakgrunden, varför förband behövs och hur de klassas efter styvhet, finns i avsnitt 3.1. Hur bärförmågan hos förband med stavformiga förbindare beräknas behandlas sedan i avsnitt 3.8 och avsnitt 3.9.

3.7.1 Tre sätt att föra över kraft

Ett träförband för över kraft på ett av tre sätt:

- **Kontakttryck** mellan trädelarna, som i traditionella snickeriförband.
- **Skjuvning i en limfog**, som i fingerskarvar och limmade överlappsförband.
- **Mekaniska förbindare** (spik, skruv, dymlingar, spikplåtar med mera). Kraften går då från den ena trädelen till förbindaren genom anliggning (hålkanttryck) och från förbindaren vidare till nästa trädel på samma sätt.

Figur 3.34 visar exempel på alla tre. Förbandstypen påverkar inte bara bärförmågan utan också styvheten, segheten (förmågan att deformeras utan att gå sönder) och hur förbandet beter sig vid brand.



Figur 3.34 Exempel på träförband: a) traditionellt förband där en snedsträva trycker mot ett hak, b) fingerskarv, c) limmat överlappsförband med skarvbrädor, d) spikat överlappsförband, e) spikplåt i en takstolsknut, f) inslitsad stålplåt med dymlingar, g) genomgående skruv med bulldogbrickor, h) balksko (spikbeslag).

3.7.2 Traditionella förband

I traditionella snickeriförband, till exempel hak, tappar och laxar, förs kraften över som **tryck** mellan trädelarna (figur 3.34a). De är därför bra på att ta tryckkrafter men dåliga på att ta dragkrafter. Om mekaniska förbindare används i sådana förband är deras uppgift främst att hålla delarna på plats så att kontakten består, inte att bära lasten.

Traditionella förband har fått en renässans tack vare datorstyrda bearbetningsmaskiner (CNC, *computerized numerical control*), som kan fräsa komplicerade kontaktytor snabbt och med god passning. EC5 behandlar dem som snickeriförband (*carpentry connections*, EC5 11.11).

3.7.3 Limförband

En väl utförd limfog är minst lika stark som träet runt omkring. Limförband ger **mycket styva** förband och används främst i fingerskarvar (som skarvar lameller i limträ och konstruktionsvirke på längden, figur 3.34b) och i själva limträbalkarna. Lim kan också användas i överlappsförband, där kraften förs över i **skjuvning** genom limfogen (figur 3.34c).

Limning kräver kontrollerade förhållanden: rätt fuktkvot i virket, rätt temperatur för härdningen och god passning mellan ytorna. Bärande limförband utförs därför i fabrik. I ett överlappsförband koncentreras skjuvspänningarna till fogens ändar, så bärförmågan växer inte i proportion till överlappets längd. Sådana förband används därför mest i mindre konstruktioner.

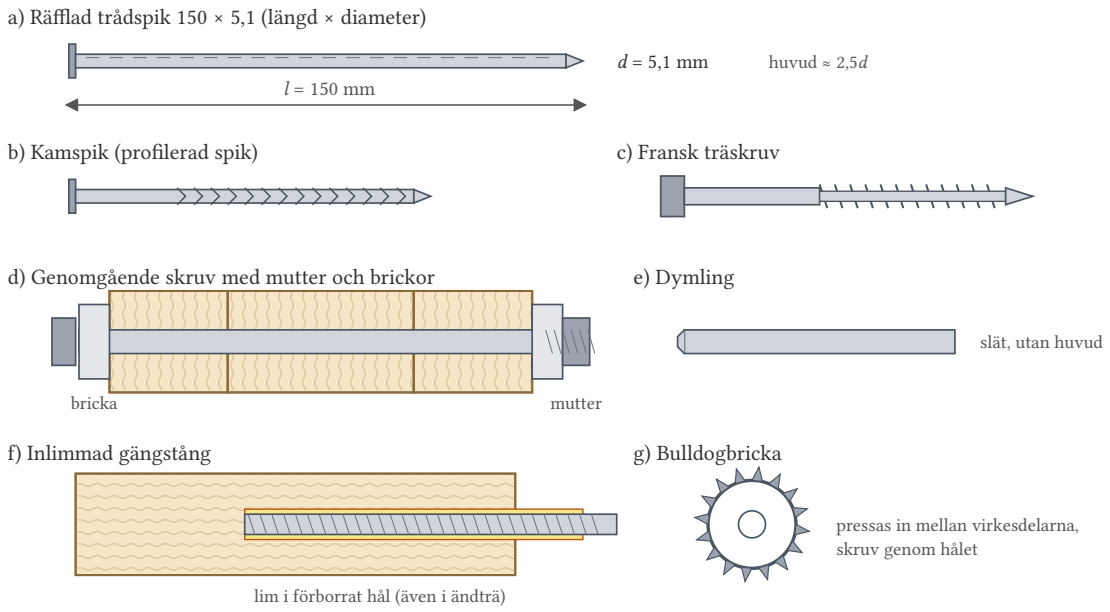
3.7.4 Spikförband

Spik är den vanligaste förbindaren i lätta träkonstruktioner, till exempel regelväggar och takstolar (figur 3.34d). Spik tillverkas av olegerat kolstål som dras kallt till rätt dimension. En klen spik dras ut mer och får därför högre hållfasthet än en grov. EC5 räknar med draghållfastheten $f_u = 600$ MPa för spiktråd (EC5 tabell 11.3).

De vanligaste typerna är **räfflad trådspik**, vars räfflor går längs spiken så att den räknas som slät, och **kamspik** (ankarspik), som har tvärgående kammar för bättre förankring vid utdrag (figur 3.35a–b). Dyckert, trådspik med litet huvud, är avsedd för synliga snickerier och används inte i bärande förband. Spikhuvudet är ungefär 2,5 gånger skaftets diameter så att huvudet inte dras in i träet.

En spik betecknas med längd × diameter i millimeter. Spiken 150 × 5,1 är alltså 150 mm lång och 5,1 mm tjock (figur 3.35a). Längderna är oftast multiplar av 25 mm (en tum). Normalt behöver spik inte förborras,

men grov spik ($d \geq 6$ mm), mycket tätt trä ($\rho_k > 500$ kg/m³) och sprickbenägna träslag kräver förborrning (EC5 11.3.11).



Figur 3.35 Förbindare i träförband: a) räfflad trådspik med beteckningen längd × diameter, b) kamspik, c) fransk träskruv, d) genomgående skruv med brickor och mutter, e) dymling, f) inlimmad gängstång, g) bulldogbricka (tandad inpressad bricka).

En enskild spik bär inte mycket, i storleksordningen 0,3–3,5 kN per skjuvplan, men spikar kan sättas tätt och utan förarbete. Förbandet blir därför effektivt per ytenhet. Till spikförbanden räknas också:

- **Spikningsplåtar och spikbeslag:** varmförzinkade stålplåtar med förstansade hål, plana, som band eller bockade till beslag, till exempel balkskor för att fästa en bjälke i en huvudbalk (figur 3.34h) och pelarskor. Med en stålplåt får spikarna sitta tätare än i trä mot trä (EC5 11.4.2(5)).
- **Spikplåtar** (*punched metal plate fasteners*): 1–2 mm tjock förzinkad plåt med utstansade tänder som pressas in i träet med hydraulpress (figur 3.34e). De används i fabrikstillverkade fackverkstakstolar, där delarna i en knutpunkt måste ha samma tjocklek. Bärförmågan bestäms i regel genom provning, och tillverkarna dimensionerar takstolarna med egna program.

3.7.5 Skruv- och dymlingsförband

Träskruv skruvas in i träet och förankras i det med gängan. Klena skruvar används för snickerier och skivor och är ett alternativ till spik när förbandet ska kunna demonteras eller när större utdragskapacitet behövs. Grövre skruvar för bärande förband, till exempel **fransk träskruv** med sexkantshuvud (d = 6–20 mm), förborras alltid och monteras med en tryckfördelande bricka under huvudet (figur 3.35c). Moderna självborrande skruvar med hel gänga kan bära stora krafter i sin längdriktning och används även som förstärkning.

Genomgående skruv (bult) med mutter och brickor är den vanligaste skruvtypen i träkonstruktioner (figur 3.35d). Diametern är 6–30 mm, oftast M12, M16, M20 eller M24, och hållfastheten anges med samma hållfasthetsklasser som för stålskruvar (till exempel 4.6 och 8.8, se avsnitt 3.2). Hålet borras högst 1 mm större än skruven så att den går att föra igenom. Glappet gör att förbandet glider en bit innan skruven tar i träet. Brickorna, med diametern minst $3d$ och tjockleken minst $0{,}3d$, fördelar kraften när skruven dras i sin längdriktning.

En **dymling** är en slät rund stång utan huvud (figur 3.35e), i dag nästan alltid av stål (i äldre konstruktioner av hårt trä, till exempel ek). Hålet borras något mindre än dymlingen, så att den pressas in och sitter utan glapp. Dymlingar bör ha en diameter på minst 8 mm. Dymlingsförband med **inslitsade stålplåtar** (figur

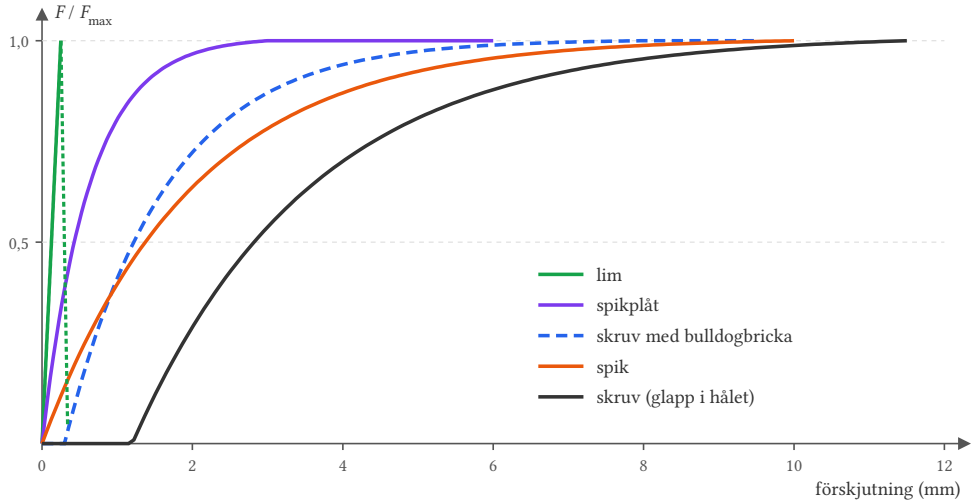
3.34f) är i dag den vanligaste förbandstypen i stora träkonstruktioner: stålplåten ökar bärförmågan, och eftersom plåten ligger skyddad inne i träet klarar förbandet brand bättre och syns inte.

Bulldogbrickor (tandade inpressade brickor, *toothed-plate connectors*) läggs mellan trädelarna i ett skruvförband och pressas in i träet (figur 3.34g och figur 3.35g). De för över kraft på en större yta än skruven ensam och gör förbandet både starkare och styvare.

Inlimmade stänger är gängstänger eller armeringsjärn som limmas in i förborrade hål (figur 3.35f). De kan föra över både drag- och skjuvkrafter och kan, till skillnad från de flesta andra förbindare, förankras i **ändträ**. Det gör dem användbara i momentstyva knutpunkter och pelarfötter (EC5 11.10).

3.7.6 Verkningssätt och styvhet

Förbandstyperna beter sig mycket olika när de belastas i skjuvning. Figur 3.36 visar typiska last–förskjutningskurvor, normerade med respektive förbands maximala last.



Figur 3.36 Typiska last–förskjutningskurvor för skjuvbelastade träförband, normerade med den maximala lasten (principskiss). Lim är styvast men sprött; skruv i ett hål med glapp glider först innan den bär. Omritad efter kompendiet *Bärande konstruktioner del 2*, figur T7.19 (efter Carling, 1992).

- **Lim** är överlägset styvast: förskjutningen är nästan noll ända tills fogen går till brott, och brottet är sprött.
- **Spikplåtar** är styva, eftersom många korta tänder delar på lasten.
- **Spik** ger ett mjukare, segt förband.
- **Skruv** har först en glidning som motsvarar glappet i hålet. Först därefter ligger skruven an mot träet. Bulldogbrickor tar bort en stor del av glidningen.

Eftersom de mekaniska förbindarna har ungefär lika arbetskurvor kan de kombineras i samma förband. Lim kan däremot inte samverka med mekaniska förbindare: limfogen tar hela lasten, eftersom den är så mycket styvare, och går till brott innan förbindarna hunnit bära något. EC5 11.1.2(5) säger därför att förbindningssystem med väsentligt olika last–förskjutningssamband inte ska räknas som samverkande.

Ett sätt att jämföra förbandstyperna är att räkna ut hur stor last de kan bära per ytenhet förbandsyta, när förbindarna sitter så tätt som avståndsreglerna tillåter. Tabell 3.7 ger ungefärliga värden.

Tabell 3.7 Ungefärlig karakteristisk bärförmåga per ytenhet förbandsyta för skjuvbelastade träförband, belastning parallellt med fibrerna. Efter kursens föreläsningsbilder och kompendiet Bärande konstruktioner del 2, tabell T7.3 (efter Larsen, 2003)

Förbandstyp	Karakteristisk bärförmåga (N/mm²)
Limmad knutplatta	2,0

Förbandstyp	Karakteristisk bärförmåga (N/mm²)
Skruv	0,5–0,7
Skruv med inpressat mellanlägg (bulldogbricka)	0,9–1,3
Spik	2–3
Spikplåt	4,0–5,0

Skruvförband kräver stora avstånd mellan förbindarna och utnyttjar därför förbandsytan dåligt. Spik och spikplåtar, med många tunna förbindare tätt placerade, är betydligt effektivare per ytenhet. Grova förbindare som skruv och dymlingar används ändå när krafterna är stora, eftersom antalet förbindare annars blir orimligt stort.

3.8 Skjuvbelastade förbindare: Johansens modell

Spik, skruv och dymlingar är stavformiga förbindare (*dowel-type fasteners*) som belastas vinkelrätt mot sin längdriktning när förbandet utsätts för skjuvning. Det här avsnittet visar hur bärförmågan för en sådan förbindare beräknas. Modellen bygger på två enkla materialantaganden och ger ett fåtal möjliga brottmoder, och den avgörande brottmoden är den som ger lägst last. Modellen gäller alla stavformiga förbindare. Vad som skiljer typerna åt är bara materialvärdena: bäddhållfastheten och flytmomentet, som ges i avsnitt 3.9.

3.8.1 Modell för skjuvbelastade förbindare

Modellen för skjuvbelastade förbindare presenterades av K. W. Johansen vid DTU i Danmark 1949, och motsvarande arbete gjordes samtidigt på Chalmers (T. Möller, 1951). Den kallas i dag ofta *European Yield Model* och är grunden för EC5:s regler. Förbindaren betraktas som en balk som är inbäddad i träet och belastas av träets motstånd längs sin längd. Två saker kan gå sönder:

- **Träet** kring förbindaren trycks sönder lokalt (hålkantbrott, *embedment failure*): förbindaren pressas in i träet.
- **Förbindaren** flyter i böjning och bildar en **flytled** (*plastic hinge*).

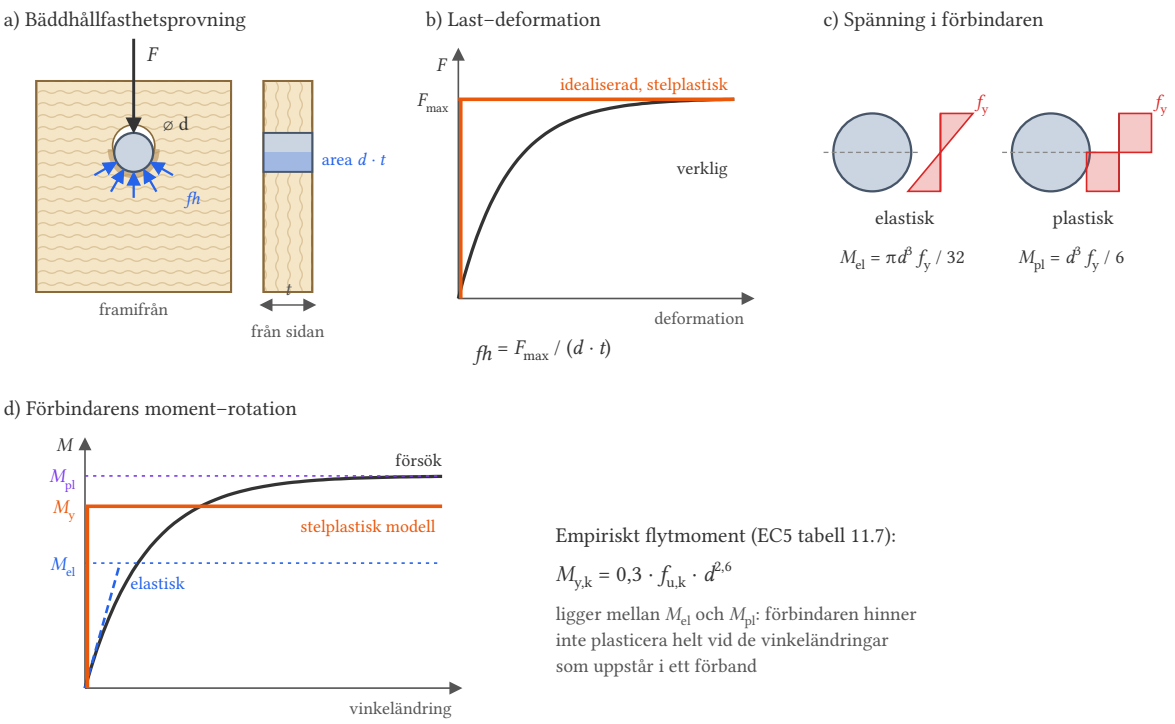
Modellen förutsätter att förbindaren inte skjuvas av (den är av stål och tillräckligt grov), att det inte finns någon friktion mellan virkesdelarna och att träet inte spricker. Spröda brott som klyvning längs en rad förbindare, blockskjuvning och dragbrott i nettotvärsnittet kontrolleras separat (EC5 11.5 och 11.6).

Bäddhållfasthet

Träets materialegenskap i modellen är **bäddhållfastheten** f_h (*embedment strength*), det vill säga träets hållfasthet mot hålkanttryck. Bäddhållfasthet är eurokodens term; i äldre kurslitteratur talas oftare om hålkanttryck och hålkantbrott. Den bestäms i ett försök där en stel förbindare pressas in i ett träprov (figur 3.37a). Den största lasten delas med förbindarens projicerade area:

$$f_h = \frac{F_{max}}{d \cdot t} \tag{3.30}$$

där d är förbindarens diameter och t provets tjocklek. Det verkliga sambandet mellan last och intryckning är först ungefär linjärt och böjer sedan av mot en platå (figur 3.37b). I modellen idealiseras det som **stelplastiskt**: ingen deformation alls under f_h, obegränsad deformation vid f_h. Bäddhållfastheten ökar med densiteten, minskar något med diametern och beror för grova förbindare på vinkeln mellan kraften och fibrerna (avsnitt 3.9.1).



Figur 3.37 Materialsambanden i Johansens modell. a) Försök för att bestämma bäddhållfastheten: en stel förbindare i ett hål pressas in i träet, som trycks sönder under förbindaren och tar emot bäddspänningen f_h på den projicerade arean $d \cdot t$. b) Verkligt och idealiserat (stelplastiskt) samband mellan last och intryckning. c) Spänningsfördelning i förbindarens tvärsnitt vid elastisk och helt plastisk böjning. d) Förbindarens moment–rotationssamband: försöket närmar sig M_{pl}, och det empiriska flytmomentet M_y som modellen använder ligger mellan M_{el} och M_{pl}.

Flytmoment

Även förbindaren antas vara stelplastisk: den är rak tills momentet når **flytmomentet** M_y, och då bildas en led som kan rotera fritt vid konstant moment (figur 3.37d). Vilket värde ska M_y ha? Om flytningen begränsas till den yttersta fibern i det cirkulära tvärsnittet blir momentet det elastiska, $M_{el} = \pi d^3 f_y/32 \approx 0{,}098\, d^3 f_y$. Om hela tvärsnittet plasticeras blir det plastiska momentet $M_{pl} = d^3 f_y/6 \approx 0{,}167\, d^3 f_y$ (figur 3.37c). För att nå M_{pl} behövs dock vinkeländringar på uppemot 45°, betydligt mer än vad som uppstår i ett förband. Försök visar att det verkliga värdet ligger däremellan och beror på diametern, och EC5 använder därför ett empiriskt uttryck (tabell 11.7):

$$M_{y,k} = 0{,}3 \cdot f_{u,k} \cdot d^{2,6} \quad [\text{Nmm}] \tag{3.31}$$

med förbindarens draghållfasthet $f_{u,k}$ i MPa och d i mm. Observera att uttrycket innehåller brotthållfastheten f_u, inte sträckgränsen. EC5 innehåller bara själva uttrycket, med värden på $f_{u,k}$ i tabell 11.3. Jämförelsen med M_{el} och M_{pl} ovan finns inte i standarden, utan är bakgrund som förklarar varför uttrycket ser ut som det gör. Hur flytmomentet beräknas för olika förbindare, till exempel kvadratisk spik och träskruv, visas i avsnitt 3.9.2.

3.8.2 Brottmoder i enskäriga förband

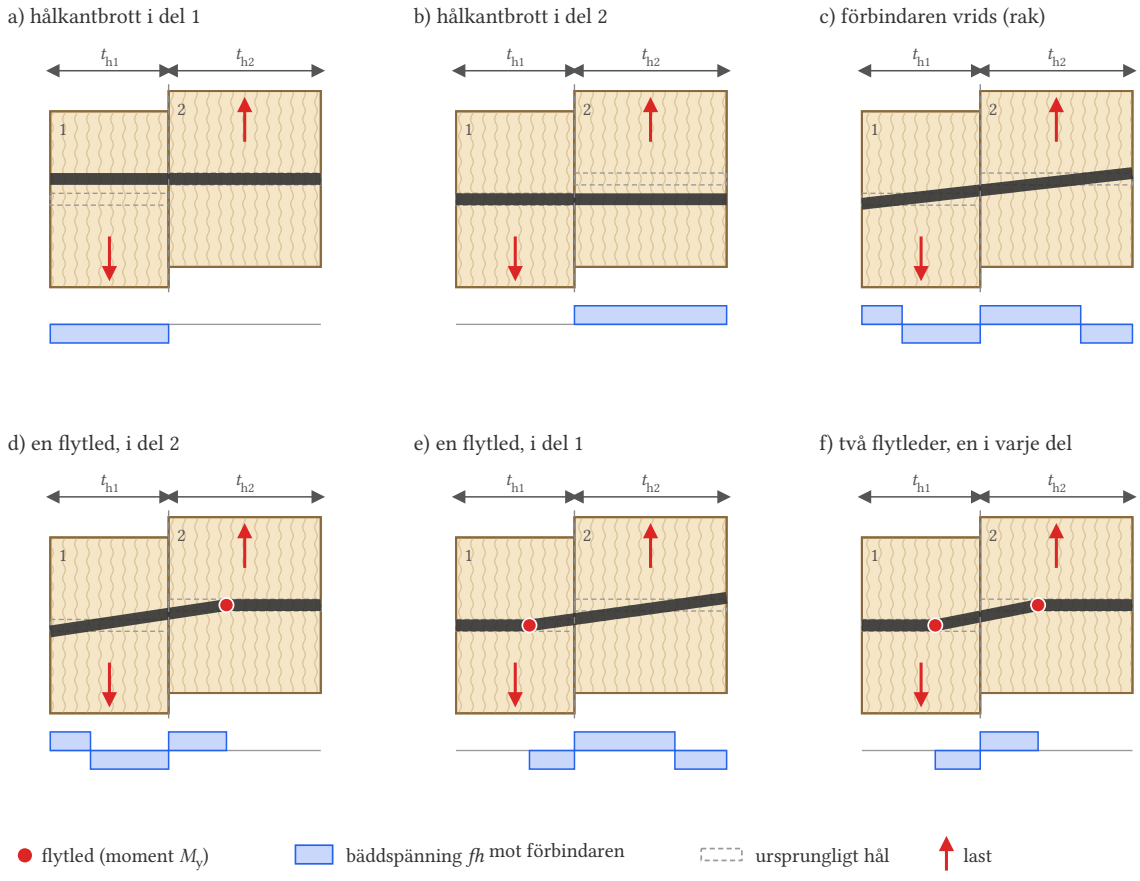
Ett förband där förbindaren går genom två virkesdelar har **ett skjuvplan** och kallas **enskärigt** (*single shear*): kraften förs över genom förbindaren på ett ställe. Går förbindaren genom tre delar är förbandet **tvåskärigt** (*double shear*). Den virkesdel där spiken slås in (huvudsidan) kallas del 1, den andra del 2. Förbindarens längd inne i del i är **inbäddningsdjupet** t_{hi} (*embedment depth*), och del i har bäddhållfastheten $f_{h,i}$. Kvoten mellan bäddhållfastheterna betecknas

$$\beta = \frac{f_{h,2}}{f_{h,1}} \tag{3.32}$$

> **Obs:** EC5:2025 använder också β för en vinkel (mellan förbindarens axel och den breda sidan, EC5 figur 11.5). I den här boken betyder β alltid kvoten mellan bäddhållfastheterna.

Genom att kombinera de två grundläggande brottyperna, hålkantbrott i träet och flytled i förbindaren, får man **sex brottmoder** för ett enskärigt förband (figur 3.38):

- **a och b, hålkantbrott i del 1 respektive del 2.** Förbindaren förblir rak och pressas in i den ena virkesdelen över hela inbäddningsdjupet. Den andra delen är så tjock eller stark att den inte når sin bäddhållfasthet.
- **c, förbindaren vrids.** Förbindaren är så styv att den förblir rak, men den roterar som en stel kropp och trycks in i båda delarna. I varje del byter bäddspänningen riktning vid förbindarens rotationspunkt.
- **d och e, en flytled.** Förbindaren bildar en flytled i den ena delen (i del 2 för mod d, i del 1 för mod e), medan den i den andra delen vrids som en stel kropp.
- **f, två flytleder.** Förbindaren bildar en flytled i varje del. Bara den korta biten mellan flytlederna rör sig; ytterdelarna ligger stilla i träet.



Figur 3.38 De sex brottmoderna för en förbindare i ett enskärigt förband. Del 1 har förskjutits nedåt i förhållande till del 2. Under varje mekanism visas bäddspänningarna från träet mot förbindaren. Omritad efter EC5 figur 11.6 och kompendiet *Bärande konstruktioner del 2*, figur T8.5.

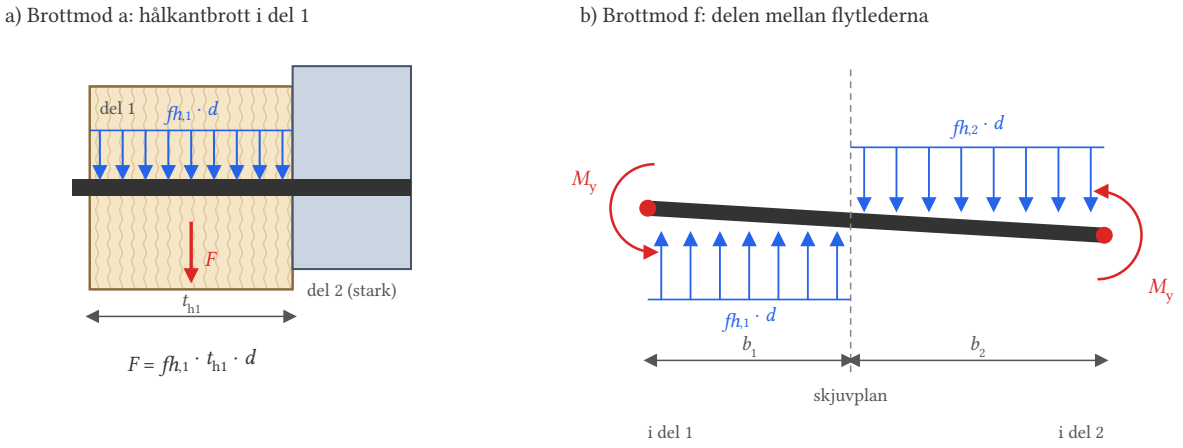
Tjocka virkesdelar och slanka förbindare leder till flytleder (mod f). Tunna virkesdelar och grova, styva förbindare leder till hålkantbrott (mod a–c). För varje mod kan den last F som behövs för att mekanismen ska bildas härledas ur jämvikt. Eftersom materialen är stelplastiska är det den mekanism som kräver **lägst** last som inträffar.

Härledning av brottmod a

I mod a är förbindaren rak och pressas in i del 1 längs hela inbäddningsdjupet t_{h1} (figur 3.39a). Bäddspänningen är $f_{h,1}$ överallt längs denna sträcka och verkar på den projicerade arean $t_{h1} \cdot d$. Jämvikt för förbindaren ger direkt

$$F = f_{h,1} \cdot t_{h1} \cdot d \tag{3.33}$$

Mod b är densamma med del 2: $F = f_{h,2} \cdot t_{h2} \cdot d$.



Figur 3.39 Härledning av brottmoderna a och f. a) Mod a: jämnt fördelad bäddspänning längs hela inbäddningsdjupet i del 1. b) Mod f: den del av förbindaren som ligger mellan de två flytlederna, med bäddspänningarna längs b_1 och b_2 och flytmomentet M_y i varje led.

Härledning av brottmod f

I mod f bildas en flytled i varje virkesdel. Betrakta den del av förbindaren som ligger mellan de två flytlederna (figur 3.39b). Avstånden från skjuvplanet till lederna, b_1 i del 1 och b_2 i del 2, är okända. Längs dessa sträckor verkar full bäddspänning, $f_{h,1}$ respektive $f_{h,2}$, och i varje led verkar flytmomentet M_y.

Kraftjämvikt. I en flytled är momentet maximalt, så tvärkraften är noll där. Hela kraften F förs därför över av bäddspänningarna, och de två blocken måste vara lika stora:

$$F = f_{h,1}\, d\, b_1 = f_{h,2}\, d\, b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{b_1}{\beta} \tag{3.34}$$

Momentjämvikt kring den högra flytleden. Spänningsblocket i del 1 har sin resultant på avståndet $b_1/2 + b_2$ från leden, blocket i del 2 på avståndet $b_2/2$. Tillsammans med de två flytmomenten ger det

$$2M_y = f_{h,1}\, d\, b_1 \left(\frac{b_1}{2} + b_2 \right) - f_{h,2}\, d\, b_2 \cdot \frac{b_2}{2} \tag{3.35}$$

Lös ut b_1. Med $f_{h,2} b_2 = f_{h,1} b_1$ och $b_2 = b_1/\beta$ från ekv. (3.34) förenklas högerledet till $f_{h,1} d b_1 (b_1 + b_2)/2 = f_{h,1} d b_1^2 (1+\beta)/(2\beta)$, och

$$b_1 = 2\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{M_y}{f_{h,1}\, d}} \tag{3.36}$$

Bärförmåga. Insatt i ekv. (3.34) blir lasten

$$F = f_{h,1}\, d\, b_1 = \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \cdot \sqrt{2\, M_y\, f_{h,1}\, d} \tag{3.37}$$

Lasten beror inte på virkesdelarnas tjocklek, bara på att de är tillräckligt tjocka för att lederna ska få plats ($b_1 \le t_{h1}$ och $b_2 \le t_{h2}$). För lika virkesdelar ($\beta = 1$) blir $F = \sqrt{2 M_y f_h d}$.

Moderna c, d och e härleds på samma sätt, med en stelt roterande förbindardel i stället för en flytled i den ena eller båda delarna. Algebran blir längre eftersom bäddspänningen byter riktning inne i den roterande delen, men principen är densamma: kraftjämvikt, momentjämvikt och lösning av en andragradsekvation. För $\beta = 1$ och lika tjocka delar ger mod c till exempel $F = (\sqrt{2}-1) f_h t d \approx 0{,}414\, f_h t d$.

3.8.3 Bärförmåga enligt EC5

EC5:2025 samlar resultaten i formel (11.14), som gäller för **alla** kombinationer av material: trä, träbaserade skivor och metall. Den karakteristiska bärförmågan per skjuvplan och förbindare (dymlingsverkan, *dowel-effect contribution*) är det minsta av värdena för de sex moderna. Hålkantbrott, moderna a och b:

$$F_{D,k} = f_{h,1,k}\, t_{h1}\, d \qquad F_{D,k} = f_{h,2,k}\, t_{h2}\, d \tag{3.38}$$

Förbindaren vrids, mod c, med kvoten $\tau = t_{h2}/t_{h1}$ (en förkortning i boken):

$$F_{D,k} = \frac{f_{h,1,k}\, t_{h1}\, d}{1+\beta}\Big[\sqrt{\beta + 2\beta^2(1+\tau+\tau^2) + \beta^3\tau^2} - \beta(1+\tau)\Big] \tag{3.39}$$

En flytled, mod d (led i del 2) och mod e (led i del 1), med de dimensionslösa flytmomenten $\mu_i = M_{y,k}/(f_{h,1,k}\, d\, t_{hi}^2)$:

$$\begin{aligned} F_{D,k} &= 1{,}05\,\frac{f_{h,1,k}\, t_{h1}\, d}{2+\beta}\Big[\sqrt{2\beta(1+\beta) + 4\beta(2+\beta)\,\mu_1} - \beta\Big] \\ F_{D,k} &= 1{,}05\,\frac{f_{h,1,k}\, t_{h2}\, d}{1+2\beta}\Big[\sqrt{2\beta^2(1+\beta) + 4\beta(1+2\beta)\,\mu_2} - \beta\Big] \end{aligned} \tag{3.40}$$

Två flytleder, mod f:

$$F_{D,k} = 1{,}15\,\sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}\,\sqrt{2\, M_{y,k}\, f_{h,1,k}\, d} \tag{3.41}$$

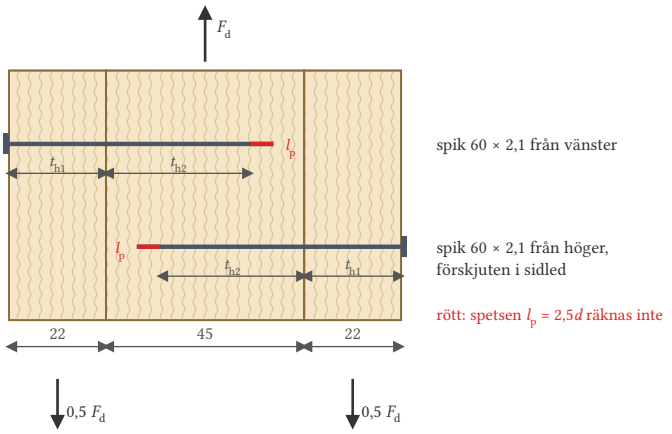
Uttrycken är, bortsett från faktorerna 1,05 och 1,15, exakt de som jämviktsvillkoren ger; jämför ekv. (3.41) med ekv. (3.37).

Faktorerna 1,05 och 1,15 höjer bärförmågan i de moder där förbindaren flyter. De är empiriska. Försök visar att modellen underskattar bärförmågan något när flytleder bildas, bland annat för att stålet hårdnar när det deformeras plastiskt. Dessutom används en enda partialkoefficient γ_R för hela förbandet, fast stålets hållfasthet varierar mindre än träets; i äldre versioner av EC5 räknades trä och stål med olika partialkoefficienter. Samma faktorer finns i de minsta inbäddningsdjup som krävs för mod d–f (EC5 tabell 11.4 och 11.5).

Mod f ger det **segaste** förbandet: förbindaren deformeras plastiskt och förbandet kan ta stora förskjutningar innan det går till brott. EC5 11.1.2(7) räknar därför ett förband med stavformiga förbindare som segt bara om mod f är avgörande, och om spröda brott och klyvning är uteslutna. Vid dimensionering eftersträvas därför tjocka virkesdelar och relativt slanka förbindare.

Exempel 3.7 Brottmoder för en spik i enskärig skjuvning

Ett mittstycke av virke 45 mm är förbundet med två sidobrädor 22 mm, en på var sida, med räfflad trådspik 60 × 2,1 som slås in från båda sidorna och förskjuts i sidled så att spetsarna inte möts (figur 3.40). Allt virke är C24. Varje spik är alltså enskärig, med del 1 = sidobrädan ($t_{h1} = 22$ mm) och del 2 = mittstycket. Spetsen, $l_p = 2{,}5d = 5{,}3$ mm, räknas inte, så inbäddningsdjupet i mittstycket blir $t_{h2} = 60 - 22 - 5{,}25 = 32{,}75$ mm (avsnitt 3.9.1). Bäddhållfastheten är $f_{h,k} = 22{,}97$ MPa i båda delarna och spikens flytmoment $M_{y,k} = 1\,858$ Nmm (beräknade i avsnitt 3.9 med ekv. (3.47) och ekv. (3.31)). Bestäm den karakteristiska bärförmågan per spik och den avgörande brottmoden.



Figur 3.40 Spikat förband i tre lager: sidobrädor 22 mm och mittstycke 45 mm. Varje spik är enskärig med inbäddningsdjupen t_{h1} och t_{h2} spetsen l_p räknas inte. Efter Exempelsamlingen, uppgift TF1.

Indata. Samma material i båda delarna ger $\beta = 1$ (ekv. (3.32)). Kvoten mellan inbäddningsdjupen är $\tau = 32{,}75/22 = 1{,}489$.

Brottmod a och b. ekv. (3.38) ger

$$F_a = 22{,}97 \cdot 22 \cdot 2{,}1 = 1\,061 \text{ N}$$
$$F_b = 22{,}97 \cdot 32{,}75 \cdot 2{,}1 = 1\,580 \text{ N}$$

Brottmod c. Med $\beta = 1$ blir uttrycket under rottecknet i ekv. (3.39) $1 + 2(1 + \tau + \tau^2) + \tau^2 = 12{,}63$, och

$$F_c = \frac{1\,061}{2}\left[\sqrt{12{,}63} - 2{,}489\right] = 565 \text{ N}$$

Brottmod d och e. Den första raden i ekv. (3.40) ger, med $\mu_1 = 1\,858/(22{,}97 \cdot 2{,}1 \cdot 22^2) = 0{,}0796$ och därmed $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 12 \cdot 0{,}0796 = 0{,}955$,

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{1\,061}{3}\left[\sqrt{4 + 0{,}955} - 1\right] = 455 \text{ N}$$

och den andra raden, med $4\beta(1+2\beta)\mu_2 = 12 \cdot 1\,858/(22{,}97 \cdot 2{,}1 \cdot 32{,}75^2) = 0{,}431$,

$$F_e = 1{,}05 \cdot \frac{1\,580}{3}\left[\sqrt{4 + 0{,}431} - 1\right] = 611 \text{ N}$$

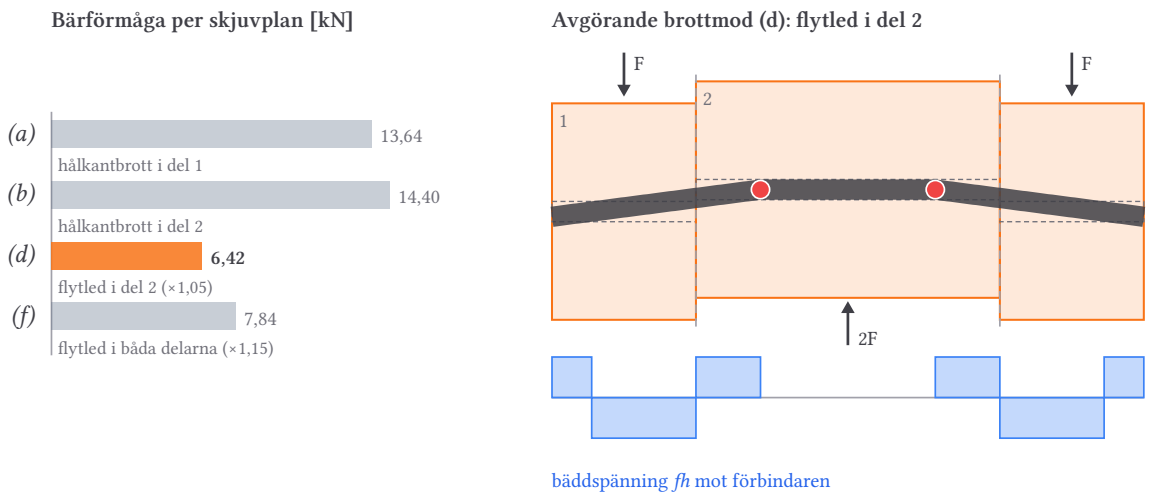
Brottmod f. ekv. (3.41) med $\beta = 1$:

$$F_f = 1{,}15 \cdot \sqrt{2 \cdot 1\,858 \cdot 22{,}97 \cdot 2{,}1} = 487 \text{ N}$$

Avgörande brottmod. Den minsta lasten ger mod d:

$$F_{D,k} = \min\{1\,061;\ 1\,580;\ 565;\ 455;\ 611;\ 487\} = 455 \text{ N}$$

Spiken bildar alltså en flytled i mittstycket, medan den vrids i den tunna sidobrädan. Mod f ligger bara 7 % högre: med en något tjockare sidobräda skulle spiken bilda två flytleder och förbandet bli segare. I figur 3.41 kan samma förband undersökas genom att välja spik med $d = 2{,}1$ mm. Den dimensionerande bärförmågan för hela förbandet beräknas i uppgift 3.9 för ett liknande förband.



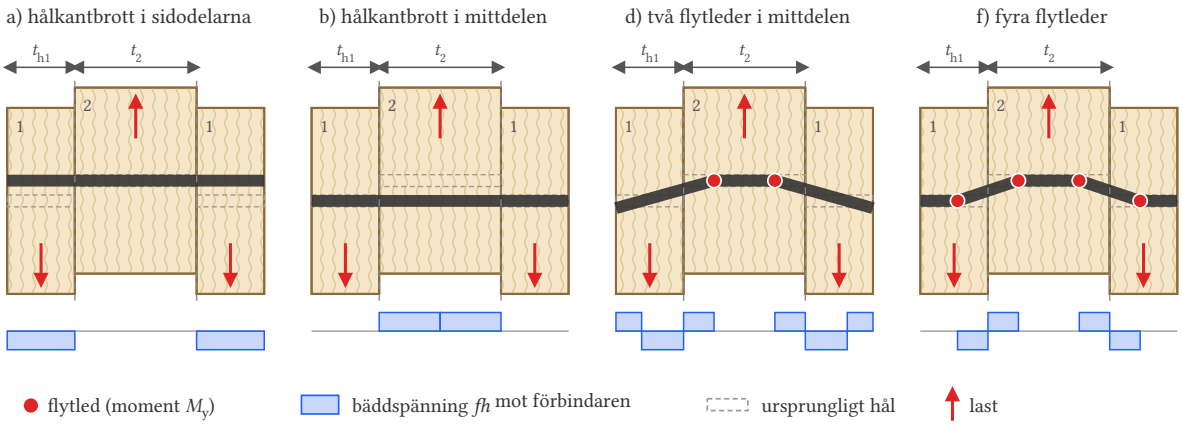
Figur 3.41 Bärförmåga per skjuvplan för varje brottmod enligt EC5 formel (11.14) och skiss av den avgörande mekanismen. Ändra virkestjocklekar, diameter, densitet och förbindarens draghållfasthet, välj en- eller tvåskärigt och trä eller stålplåt som del 2.

Figur 3.41 visar hur den avgörande moden flyttas när måtten ändras. Tunna virkesdelar ger hålkantbrott (a, b), och när delarna blir tjockare tar moderna med flytleder över, till sist mod f, som inte längre beror på tjockleken. En grövre förbindare höjer alla moder, men moderna med flytleder mest: de växer ungefär som $d^{1,8}$ (genom $\sqrt{M_y\, d}$ med $M_y \propto d^{2,6}$), medan hålkantmoderna växer ungefär i proportion till d, eftersom bäddhållfastheten avtar svagt med diametern. Grova förbindare i tunna virkesdelar ger därför hålkantbrott, och slanka förbindare i tjocka delar ger flytleder.

3.8.4 Tvåskäriga förband

I ett **symmetriskt tvåskärigt** förband går förbindaren genom två sidodelar (del 1) och en mittdel (del 2). Av symmetriskäl kan förbindaren inte vridas som en stel kropp i mittdelen, så bara fyra brottmoder är möjliga (figur 3.42):

- **a, hålkantbrott i sidodelarna.** Förbindaren pressas in i båda sidodelarna längs hela deras tjocklek.
- **b, hålkantbrott i mittdelen.** Förbindaren pressas in i mittdelen längs hela dess tjocklek.
- **d, två flytleder i mittdelen.** Förbindaren vrids i sidodelarna och bildar en flytled i mittdelen nära varje skjuvplan.
- **f, fyra flytleder.** En flytled i varje sidodel och två i mittdelen.



Figur 3.42 Brottmoderna a, b, d och f för en förbindare i ett symmetriskt tvåskärigt förband. Sidodelarna (1) har förskjutits nedåt i förhållande till mittdelen (2). Omritad efter EC5 figur 11.7.

EC5 räknar varje skjuvplan för sig med samma formler som för enskäriga förband, ekv. (3.38), ekv. (3.40) (första raden) och ekv. (3.41), men med mittdelens inbäddningsdjup lika med **halva** dess tjocklek (EC5 11.2.3.2(3)):

$$t_{h2} = \frac{t_2}{2} \tag{3.42}$$

Mod b blir då $F_{D,k} = f_{h,2,k}\,(t_2/2)\,d$ per skjuvplan, det vill säga halva mittdelens bärförmåga i varje skjuvplan. Det formlerna ger är bärförmågan **per skjuvplan**. En förbindare i ett tvåskärigt förband bär det dubbla.

> **Notera:** I EC5:2004 och i äldre kursmaterial, bland annat kompendiet och föreläsningsbilderna, har de tvåskäriga moderna egna bokstäver, g–k, och mittdelens hela tjocklek t_2 står i formlerna med faktorn 0,5. EC5:2025 använder i stället samma bokstäver och formler som för enskäriga förband, med $t_{h2} = t_2/2$. Resultaten är desamma.

3.8.5 Linverkan

När förbindaren böjs och snedställs i moderna c–f (flytleder eller rotation) dras den också ut något ur träet. Om förbindaren har ett huvud, en gänga eller en bricka som förankrar den uppstår en dragkraft längs förbindaren. Dragkraften drar ihop virkesdelarna, så att friktion uppstår mellan dem, och dess komponent tvärs skjuvplanet hjälper till att bära lasten. Effekten kallas **linverkan** (*rope effect*). Den dimensionerande bärförmågan per skjuvplan är summan av dymlingsverkan och linverkan (EC5 11.2.3.1, formel (11.13)):

$$F_{v,d} = F_{D,d} + F_{rp,d} \tag{3.43}$$

där $F_{D,d}$ är det dimensionerande värdet av ekv. (3.38)–ekv. (3.41) (avsnitt 3.9.3). Linverkan begränsas av två villkor (EC5 11.2.3.8, formel (11.19)):

$$F_{rp,d} = \min\bigl\{k_{rp,1}\,F_{ax,t,d};\; k_{rp,2}\,F_{D,d}\bigr\} \tag{3.44}$$

Den första termen är en andel av förbindarens dimensionerande axiella bärförmåga $F_{ax,t,d}$, det minsta av vad förbindaren kan föra över i sin längdriktning till var och en av virkesdelarna (genom huvudet, brickan eller utdrag av skaftet) och stålets draghållfasthet (EC5 11.2.2.1). Faktorn $k_{rp,1}$ är 0,40 för profilerad spik och 0,25 för övriga förbindare (EC5 tabell 11.8). Den andra termen begränsar linverkan till en andel av dymlingsverkan enligt tabell 3.8.

Tabell 3.8 Gränsfaktorn krp,2 för linverkan enligt EC5 tabell 11.9

Förbindare	$k_{rp,2}$
Dymlingar	0
Slät rund spik	0,15
Slät kvadratisk spik och skruv med mutter	0,25
Profilerad spik	0,50
Träskruv och gängstänger	1,00

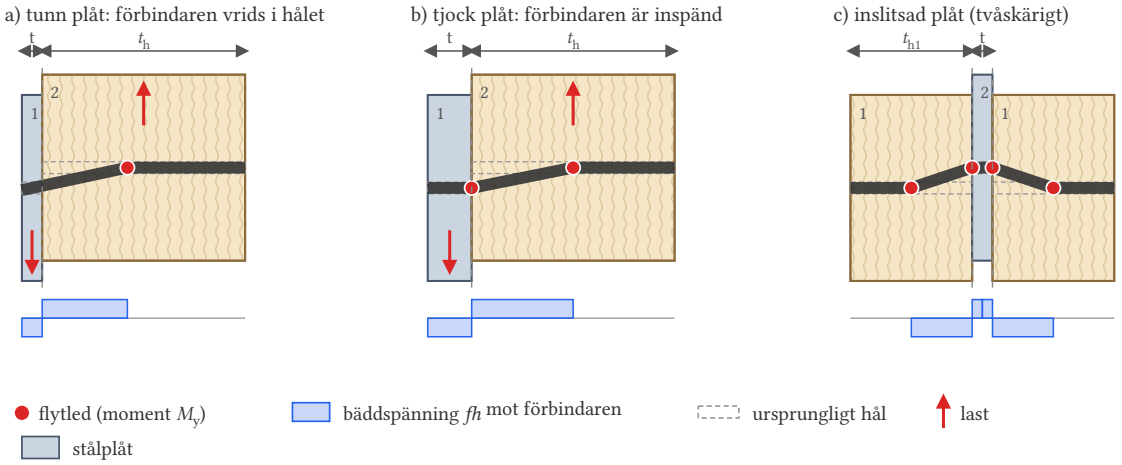
Linverkan får bara räknas i moderna c–f, **aldrig i moderna a och b**, där förbindaren förblir rak (EC5 11.2.3.8(2)). Dymlingar har ingen förankring och får därför ingen linverkan, medan träskruvar, som förankras väl längs gängan, kan få upp till dubbla bärförmågan. Linverkan förutsätter dessutom att det inte finns glipor mellan virkesdelarna. Att bortse från linverkan är alltid på säkra sidan, och exemplen i boken gör så.

3.8.6 Stål–träförband

Stålplåtar är mycket vanliga i träförband: som utvändiga plåtar, som spikningsplåtar eller som inslitsade plåtar mellan två trädelar. I äldre regler och kursmaterial behandlades stål–träförband med egna formler, beroende på om plåten var tunn eller tjock (figur 3.43):

- **Tunn plåt:** förbindaren kan vridas fritt i hålet; plåten ger ingen inspänning.

- **Tjock plåt:** förbindaren är **inspänd** i plåten, så att en flytled kan bildas precis vid plåtens yta.



Figur 3.43 Stål–träförband. a) Tunn utvändig plåt: förbindaren vrids i plåten och bildar en flytled i träet. b) Tjock plåt: förbindaren är inspänd och bildar flytleder vid plåtens yta och i träet. c) Inslitsad plåt i ett tvåskärigt förband (mod f): flytleder vid plåten och i sidodelarna. Omritad efter kompendiet *Bärande konstruktioner del 2*, figur T8.17–T8.21.

I EC5:2025 räknas en stålplåt i stället som **en virkesdel bland andra**, med en egen bäddhållfasthet i formlerna ekv. (3.38)–ekv. (3.41) (EC5 tabell 11.6, rad A):

$$f_{h,k} = k_{plt} \cdot 600 \text{ MPa} \tag{3.45}$$

där $k_{plt} = 1{,}0$ för inslitsade (inre) plåtar och för utvändiga plåtar med $t > d$, $k_{plt} = 0{,}5$ för utvändiga plåtar med $t \le 0{,}5d$, och däremellan rätlinjig interpolering. Värdet 600 MPa används oavsett stålsort; själva plåten kontrolleras enligt EC3. Eftersom stålets bäddhållfasthet är mer än 20 gånger träets blir β stort när plåten är del 2. I mod f går då $\sqrt{2\beta/(1+\beta)}$ mot $\sqrt{2}$, och formeln övergår i den tidigare formeln för tjock plåt.

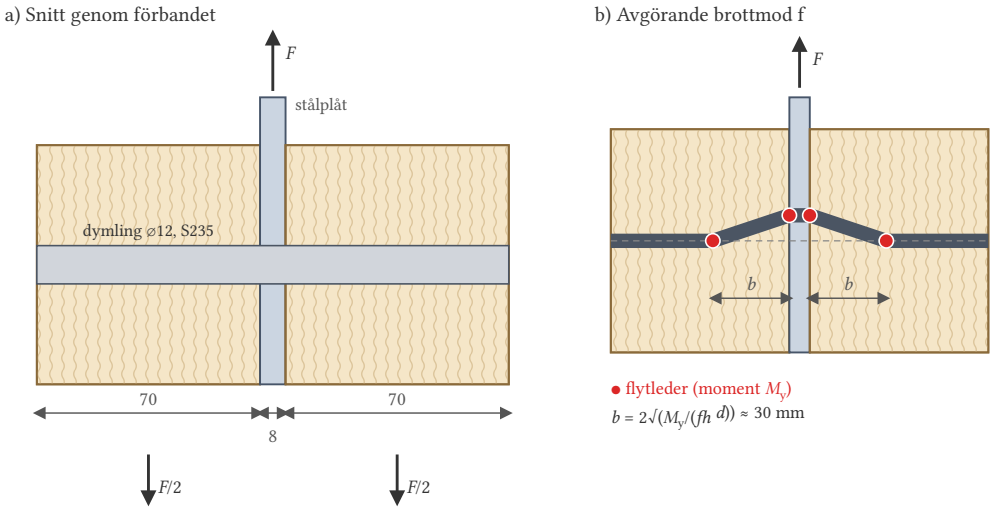
För en förbindare som är **inspänd** i en stålplåt finns en förenklad metod (EC5 11.2.3.3(4), formel (11.17)–(11.18)):

$$\begin{aligned} F_{D,k} &= 2{,}3\sqrt{M_{y,k}\, f_{h,k}\, d}\cdot \min\left\{\frac{t_{h1}}{t_{h,req}};\, 1\right\} \\ t_{h,req} &= 4{,}6\sqrt{\frac{M_{y,k}}{f_{h,k}\, d}} \end{aligned} \tag{3.46}$$

där $f_{h,k}$ och t_{h1} avser trädelen och $2{,}3 = 1{,}15 \cdot 2$ och $4{,}6 = 1{,}15 \cdot 4$. Förbindaren räknas som inspänd om plåten är minst $1d$ tjock och förbindaren sitter i ett passande hål med glapp enligt EN 1090-2, eller om brickor eller brickhuvuden används (EC5 11.2.3.2(8)). Är trädelen tunnare än $t_{h,req}$ hinner inte två flytleder bildas, och bärförmågan minskas i proportion till tjockleken. På samma sätt finns en förenklad metod för trä–träförband, där mod f reduceras med $\min\{t_{h1}/t_{h1,req};\, t_{h2}/t_{h2,req};\, 1\}$ med de erforderliga inbäddningsdjupen i EC5 tabell 11.4 (formel (11.16)).

Exempel 3.8 Inslitsad stålplåt med dymlingar

Ett dragförband består av en inslitsad stålplåt $t = 8$ mm mellan två sidodelar av C24 med tjockleken 70 mm, förbundna med dymlingar ⌀12 av S235 ($f_{u,k} = 360$ MPa, EC5 tabell 11.3), se figur 3.44. Kraften är parallell med fibrerna. Bestäm den karakteristiska bärförmågan per skjuvplan och dymling, dels med den allmänna metoden, dels med den förenklade metoden för inspänd förbindare.



Figur 3.44 a) Inslitsad stålplåt 8 mm mellan två sidodelar 70 mm, dymling ⌀12. Förbandet är tvåskärigt med plåten som mittdel: plåten dras med F och varje sidodel tar $F/2$. b) Den avgörande brottmoden f: i varje skjuvplan bildas en flytled vid plåten och en i träet, på avståndet b från plåten.

Bäddhållfasthet och flytmoment. För träet ger ekv. (3.49) med $\alpha = 0$ och $\rho_k = 350$ kg/m³

$$f_{h,1,k} = 0{,}082\,(1 - 0{,}01 \cdot 12) \cdot 350 = 25{,}26 \text{ MPa}$$

Plåten är inre, så $k_{plt} = 1{,}0$ och $f_{h,2,k} = 600$ MPa (ekv. (3.45)). Kvoten blir $\beta = 600/25{,}26 = 23{,}76$. Flytmomentet enligt ekv. (3.31) är

$$M_{y,k} = 0{,}3 \cdot 360 \cdot 12^{2{,}6} = 69\,070 \text{ Nmm}$$

Brottmoder. Förbandet är tvåskärigt, med $t_{h1} = 70$ mm och $t_{h2} = 8/2 = 4$ mm (ekv. (3.42)). Moderna a och b ger

$$F_a = 25{,}26 \cdot 70 \cdot 12 = 21\,220 \text{ N}$$
$$F_b = 600 \cdot 4 \cdot 12 = 28\,800 \text{ N}$$

Mod d, med $2\beta(1+\beta) = 1\,176$ och $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 113{,}8$:

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{21\,220}{25{,}76}\left[\sqrt{1\,176 + 113{,}8} - 23{,}76\right] = 10\,520 \text{ N}$$

Mod f, med $\sqrt{2\beta/(1+\beta)} = 1{,}385$:

$$F_f = 1{,}15 \cdot 1{,}385 \cdot \sqrt{2 \cdot 69\,070 \cdot 25{,}26 \cdot 12} = 10\,310 \text{ N}$$

Allmän metod. Mod f är avgörande: $F_{D,k} = 10{,}3$ kN per skjuvplan.

Förenklad metod. Plåten är inre och dymlingen symmetriskt fasthållen, så den räknas som inspänd. Ekv. (3.46) ger först det erforderliga inbäddningsdjupet

$$t_{h,req} = 4{,}6\sqrt{\frac{69\,070}{25{,}26 \cdot 12}} = 69{,}4 \text{ mm} \le t_{h1} = 70 \text{ mm}$$

så ingen reduktion behövs, och

$$F_{D,k} = 2{,}3\sqrt{69\,070 \cdot 25{,}26 \cdot 12} = 10\,520 \text{ N}$$

Kontroll. De två metoderna skiljer sig med 2 %. Den förenklade metoden förutsätter full inspänning, medan den allmänna metoden räknar med plåtens verkliga, ändliga bäddhållfasthet och därför ger något

lägre värde. Sidodelarna är precis så tjocka att mod f hinner bildas; med tunnare sidodelar hade mod d blivit avgörande.

Med en enda dymling bär förbandet alltså omkring 2 · 10,3 = 20,6 kN karakteristiskt. Dimensionerande värden, effektivt antal och avstånd behandlas i avsnitt 3.9.

3.8.7 Fler än två skjuvplan

Förband med flera inslitsade plåtar eller flera trädelar har fler än två skjuvplan. Bärförmågan per förbindare är då summan av bärförmågorna i de enskilda skjuvplanen (EC5 11.2.3.7). De inre delarna räknas som mittdelar i ett tvåskärigt förband, med halva tjockleken som inbäddningsdjup. Förutsättningen är att brottmoderna i de olika skjuvplanen är **förenliga** (kompatibla): förbindarens deformationer i angränsande skjuvplan måste kunna uppträda samtidigt.

Det är fallet om alla skjuvplan går till brott antingen genom hålkantbrott (moderna a och b) eller genom flytleder (moderna d och f). Andra kombinationer, där förbindaren förblir rak i ett skjuvplan men bildar flytleder i nästa, bör undvikas: deformationerna passar inte ihop, och den beräknade summan nås inte. För förband med fyra eller fler skjuvplan anger EC5 11.2.3.7(4) tjocklekskrav på de inre och yttre delarna som säkerställer att alla skjuvplan bildar flytleder.

3.9 Dimensionering av förband med stavformiga förbindare

Johansens modell i avsnitt 3.8 ger bärförmågan per skjuvplan för en förbindare, givet träets bäddhållfasthet och förbindarens flytmoment. Det här avsnittet ger de materialvärden som behövs, visar hur man går från en förbindare till hela förbandet och vilka avstånd förbindarna måste ha, och avslutas med en dimensioneringsgång och två fullständiga exempel. Hänvisningarna gäller SS-EN 1995-1-1:2025 (EC5), kapitel 11.

3.9.1 Bäddhållfasthet

Bäddhållfastheten $f_{h,k}$, träets hållfasthet mot hålkanttryck (Bäddhållfasthet), beror på förbindartyp, diameter, träets densitet och, för grova förbindare, vinkeln mellan kraften och fibrerna. Värdena gäller konstruktionsvirke och limträ (EC5 tabell 11.6). Densiteten ρ_k sätts in i kg/m³ och diametern d i mm, och $f_{h,k}$ fås i MPa.

Spik utan förborrning:

$$f_{h,k} = 0{,}082\,\rho_k\,d^{-0{,}3} \tag{3.47}$$

Värdet är oberoende av kraftens riktning i förhållande till fibrerna. En tunn spik tränger undan fibrerna i stället för att klyva dem och får därför hög bäddhållfasthet.

Förborrad spik samt **skruv med mutter och dymlingar** belastade parallellt med fibrerna:

$$f_{h,0,k} = 0{,}082\,(1 - 0{,}01\,d)\,\rho_k \tag{3.48}$$

För **skruv med mutter och dymlingar** ($d > 8$ mm) beror bäddhållfastheten på vinkeln α mellan kraften och fibrerna:

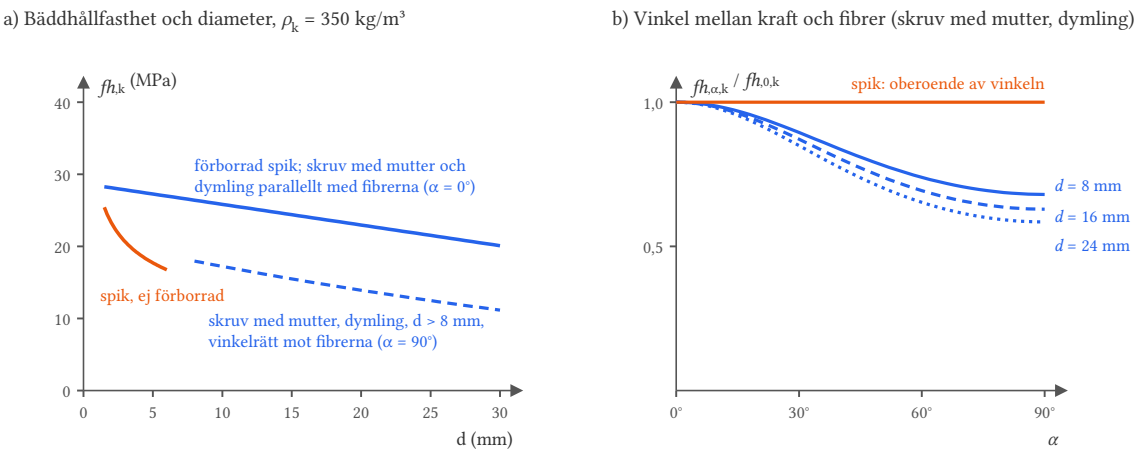
$$f_{h,\alpha,k} = \frac{f_{h,0,k}}{k_{90}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \quad \text{med} \quad k_{90} = 1{,}35 + 0{,}015\,d \tag{3.49}$$

där k_{90} gäller barrträ (konstruktionsvirke och limträ). Uttrycket är en variant av Hankinsons formel: vinkelrätt mot fibrerna är bäddhållfastheten $1/k_{90}$ av värdet parallellt med fibrerna, för $d = 16$ mm alltså 63 %. Grova förbindare med $d \le 8$ mm räknas som förborrad spik.

Träskruv räknas som spik, men bäddhållfastheten divideras dessutom med $2{,}5\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon$, där ε är vinkeln mellan skruvens axel och fibrerna. En skruv vinkelrätt mot fibrerna ($\varepsilon = 90°$) får samma värde som en spik; i ändträ blir värdet 2,5 gånger lägre.

Stålplåtar räknas med $f_{h,k} = k_{plt} \cdot 600$ MPa enligt ekv. (3.45).

Figur 3.45 visar hur bäddhållfastheten beror på diametern och på vinkeln mot fibrerna.



Figur 3.45 a) Karakteristisk bäddhållfasthet som funktion av diametern för $\rho_k = 350$ kg/m³, enligt ekv. (3.47)–(3.49). Vinkelberoendet gäller skruv med mutter och dymlingar med $d > 8$ mm; tunnare dymlingar räknas som förborrad spik. b) Bäddhållfasthetens minskning med vinkeln mellan kraft och fibrer för skruv med mutter och dymling med olika diameter; för spik är den oberoende av vinkeln.

Inbäddningsdjup

Inbäddningsdjupet t_{hi} är den längd av förbindaren som bär mot del i (EC5 figur 11.1). För skruv med mutter och dymlingar är det virkesdelens tjocklek, för mittdelen i ett tvåskärigt förband halva tjockleken (ekv. (3.42)). För spik är t_{h1} tjockleken på delen under huvudet, och t_{h2} är inträngningen i spetsdelen **minus spetsen**, vars längd kan antas vara $l_p = 2{,}5d$ för spik och $1{,}0d$ för skruv (EC5 11.2.2.3(7)–(8)). För att spikens bärförmåga ska få räknas måste dessutom inträngningen (utan spets) vara minst $8d$ för slät spik och $6d$ för profilerad spik (EC5 tabell 11.15). Räfflad trådspik räknas som slät.

3.9.2 Flytmoment

Flytmomentet ges av ekv. (3.31), $M_{y,k} = 0{,}3\, f_{u,k}\, d^{2,6}$ (EC5 tabell 11.7). För kvadratisk spik, dit räfflad trådspik räknas, får värdet multipliceras med 1,5, med d lika med sidmåttet. För träskruv används gängans innerdiameter d_1 i stället för d. Draghållfastheten $f_{u,k}$ hämtas ur EC5 tabell 11.3; några vanliga värden finns i tabell 3.9.

Tabell 3.9 Karakteristisk draghållfasthet fu,k för några förbindare, enligt EC5 tabell 11.3 (urval)

Förbindare	$f_{u,k}$ **(MPa)**
Spik	600
Dymling S235 / S355	360 / 490
Skruv med mutter, hållfasthetsklass 4.6 / 5.6 / 8.8	400 / 500 / 800

3.9.3 Dimensionerande bärförmåga

Den dimensionerande dymlingsverkan per skjuvplan fås ur den karakteristiska på samma sätt som för andra bärförmågor i trä (EC5 4.5, formel (4.7)):

$$F_{D,d} = k_{mod} \cdot \frac{F_{D,k}}{\gamma_R}, \qquad \gamma_R = 1{,}30 \tag{3.50}$$

Partialkoefficienten för förband med stavformiga förbindare är $\gamma_R = 1{,}30$ (EC5 tabell 4.4). Faktorn k_{mod} beror på klimatklass och lastvaraktighet och hämtas ur tabell 1.6 i avsnitt 1.2 den beskriver att träets bäddhållfasthet, precis som dess övriga hållfasthet, sjunker med ökande fuktkvot och lång lastvaraktighet. Förbinds två material med olika tidsberoende egenskaper används $k_{mod} = \sqrt{k_{mod,1}\, k_{mod,2}}$ (EC5 5.2.1, formel (5.1)). Med linverkan blir den dimensionerande bärförmågan per skjuvplan $F_{v,d} = F_{D,d} + F_{rp,d}$ enligt ekv. (3.43).

> **Notera:** Boverkets EKS (BFS 2024:6) hänvisar ännu till EC5:2004. Där är partialkoefficienten för förband $\gamma_M = 1{,}3$, alltså samma värde som $\gamma_R = 1{,}30$ i EC5:2025, men formlerna har en annan uppställning: de tvåskäriga moderna har egna bokstäver, stålplåtar behandlas med egna formler för tunn och tjock plåt, och linverkan läggs till direkt i den karakteristiska bärförmågan. Boken följer EC5:2025 med rekommenderade värden.

3.9.4 Förbandets bärförmåga

Ett förband med n förbindare i en rad parallellt med fibrerna bär mindre än n gånger en förbindares bärförmåga. Förbindarna tar inte lika stor del av lasten, och träet kan klyvas längs raden innan alla förbindare nått sin fulla bärförmåga. Det beaktas med ett **effektivt antal** n_{ef} förbindare. Bärförmågan för förbandet är summan över raderna (EC5 11.3.3, formel (11.21)):

$$F_{v,Rd} = \sum_{rader} n_{ef} \cdot n_s \cdot F_{v,d} \tag{3.51}$$

där n_s är antalet skjuvplan per förbindare (1 för enskäriga och 2 för tvåskäriga förband) och $F_{v,d}$ bärförmågan per skjuvplan. Villkoret är $F_{v,Ed} \le F_{v,Rd}$.

För **skruv med mutter och dymlingar** i en rad parallellt med fibrerna är (EC5 tabell 11.10, formel (6))

$$n_{ef} = \min\left\{ n;\; n^{0{,}9}\sqrt[4]{\frac{a_1}{13\,d}} \right\} \tag{3.52}$$

där a_1 är avståndet mellan förbindarna i raden. Med $a_1 = 13d$ blir $n_{ef} = n^{0{,}9}$, och först med $a_1 \ge 13 \cdot n^{0{,}4}\,d$ räknas alla förbindare fullt ut.

För **spik** och klen träskruv beror reduktionen på avståndet a_1 genom faktorn k_{ef} (EC5 tabell 11.10): $k_{ef} = 1$ för $a_1 \ge 14d$, 0,85 för $a_1 = 10d$ och 0,7 för $a_1 = 7d$, med interpolering emellan. Med $a_1 \ge 14d$ räknas alla spikar fullt ut, $n_{ef} = n$, och det utnyttjas i exemplen nedan.

Förbindare i en rad **vinkelrätt** mot fibrerna räknas fullt ut, $n_{ef} = n$. För vinklar mellan 0° och 90° interpoleras rätlinjigt.

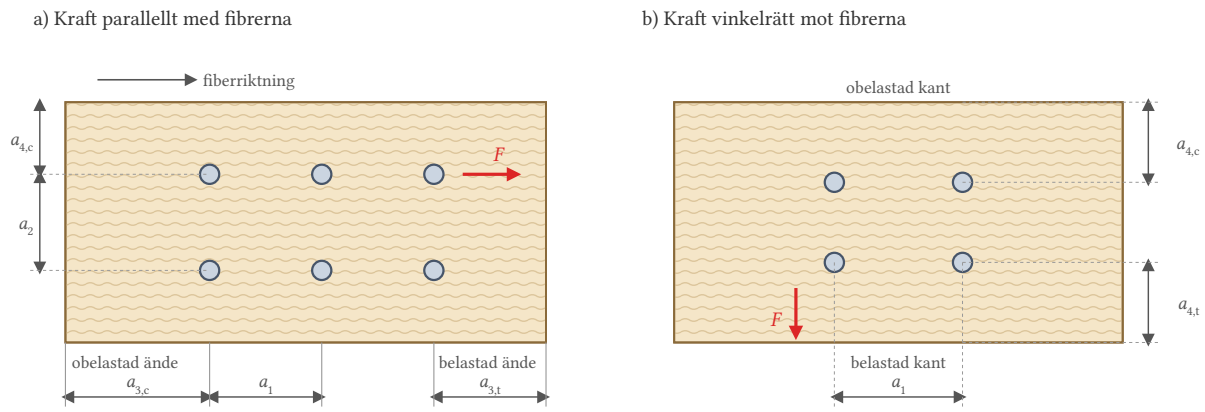
Dessutom gäller några regler för antalet förbindare (EC5 11.3.9.1): ett spikförband ska ha minst två spikar, ett förband med en enda skruv får bara räknas med halva bärförmågan, och ett dymlingsförband ska ha minst fyra skjuvplan. Utöver förbindarnas bärförmåga ska de spröda brottformerna kontrolleras: klyvning längs en rad, blockskjuvning, pluggskjuvning och dragbrott i nettotvärsnittet (EC5 11.5), samt klyvning när kraften verkar vinkelrätt mot fibrerna (EC5 11.6).

3.9.5 Avstånd

Förbindarna måste sitta tillräckligt långt från varandra och från virkets ändar och kanter, annars spricker träet innan förbindarna når sin bärförmåga. Avstånden definieras i figur 3.46:

- a_1: avstånd mellan förbindare **parallellt** med fibrerna,
- a_2: avstånd mellan förbindare **vinkelrätt** mot fibrerna,
- $a_{3,t}$ och $a_{3,c}$: avstånd till **belastad** respektive **obelastad ände**,
- $a_{4,t}$ och $a_{4,c}$: avstånd till **belastad** respektive **obelastad kant**.

En ände eller kant är belastad när förbindarens kraft på träet är riktad mot den, så att träet mellan förbindaren och änden riskerar att skjuvas eller klyvas ut. Belastade ändar och kanter kräver därför större avstånd.



Figur 3.46 Avstånd mellan förbindare och till ändar och kanter. a) Kraft parallellt med fibrerna: belastad ände ($a_{3,t}$) och obelastad ände ($a_{3,c}$). b) Kraft vinkelrätt mot fibrerna: belastad kant ($a_{4,t}$) och obelastad kant ($a_{4,c}$). Omritad efter EC5 figur 11.21.

Minsta avstånd för konstruktionsvirke och limträ finns i EC5 tabell 11.16; tabell 3.10 återger raderna för de vanligaste förbindarna.

Tabell 3.10 Minsta avstånd för skjuvbelastade förbindare i konstruktionsvirke och limträ enligt EC5 tabell 11.16 (urval)

Förbindare	a_1	a_2	$a_{3,t}$	$a_{3,c}$	$a_{4,t}$	$a_{4,c}$
Spik, ej förborrad, $\rho_k \leq 430$	$10d$	$5d$	$15d$	$10d$	$7d$	$5d$
Spik, förborrad	$5d$	$4d$	$12d$	$7d$	$7d$	$3d$
Skruv med mutter	$5d$	$4d$	$\max\{7d; 80\}$	$4d$	$4d$	$3d$
Dymling	$5d$	$3d$	$\max\{7d; 80\}$	$4d$	$4d$	$3d$

Avstånd i mm. I ett stål–träförband med spik eller klen skruv får avstånden multipliceras med 0,7 (EC5 11.4.2(5)); det är därför spikningsplåtar och spikbeslag kan spikas tätt. Till skillnad från EC5:2004 beror avstånden i tabellen inte längre på vinkeln mellan kraften och fibrerna.

3.9.6 Inverkan av yttre parametrar

Bärförmågan hos ett skjuvbelastat förband påverkas av flera faktorer utöver måtten:

- **Densitet.** Bäddhållfastheten ökar i stort sett linjärt med densiteten, ekv. (3.47)–ekv. (3.48). Ett förband i C14 ($\rho_k = 290$ kg/m³) har 17 % lägre bäddhållfasthet än i C24 ($\rho_k = 350$ kg/m³).
- **Vinkel mellan kraft och fibrer.** För grova förbindare är bäddhållfastheten lägre vinkelrätt mot fibrerna än parallellt med dem (figur 3.45b). Fibrerna är svagare när de trycks ihop på tvären än när de trycks i längdriktningen.
- **Diameter.** Bäddhållfastheten avtar med diametern (figur 3.45a), eftersom en grov förbindare lättare klyver träet. Bärförmågan per förbindare ökar ändå med diametern, men förbandet blir mindre segt.
- **Friktion mellan förbindare och trä.** En ojämn eller limmad yta på förbindaren minskar risken att träet klyvs och höjer bäddhållfastheten. Det är en orsak till att räfflad och profilerad spik bär mer än slät.
- **Fuktkvot och lastvaraktighet.** Högre fuktkvot och längre lastvaraktighet ger lägre bäddhållfasthet, precis som för träets övriga hållfasthet. Det beaktas med k_{mod} i ekv. (3.50).

3.9.7 Dimensioneringsgång

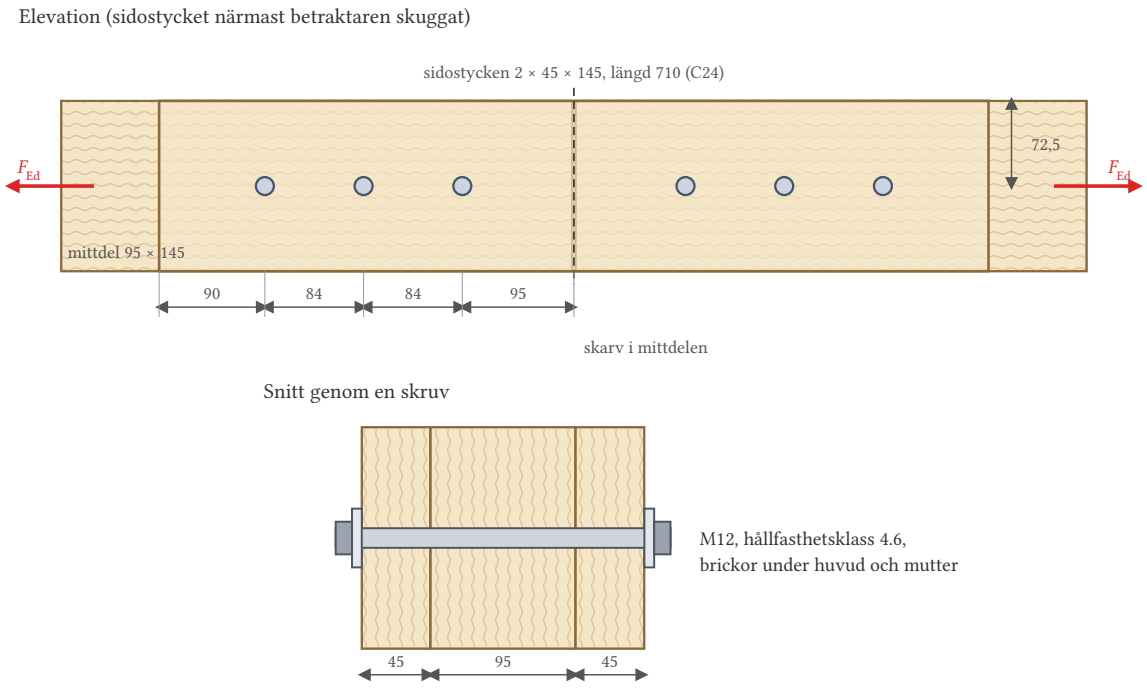
Ett förband med stavformiga förbindare dimensioneras i följande steg:

1. **Lasteffekt.** Bestäm den dimensionerande kraften $F_{v,Ed}$ i förbandet och dess vinkel mot fibrerna i varje virkesdel.

2. **Materialvärden.** Beräkna bäddhållfastheten $f_{h,i,k}$ i varje del med ekv. (3.47)–ekv. (3.49) eller ekv. (3.45), och förbindarens flytmoment $M_{y,k}$ med ekv. (3.31). Beräkna β med ekv. (3.32).
3. **Inbäddningsdjup.** Bestäm t_{h1} och t_{h2} (halva mittdelen i tvåskäriga förband, utan spetsen för spik) och kontrollera minsta inträngningen.
4. **Bärförmåga per skjuvplan.** Beräkna $F_{D,k}$ för alla möjliga brottmoder, ekv. (3.38)–ekv. (3.41), och ta det minsta värdet. Notera vilken brottmod som avgör.
5. **Dimensionerande värde.** $F_{D,d}$ enligt ekv. (3.50), eventuellt med tillägg för linverkan enligt ekv. (3.44).
6. **Effektivt antal.** Bestäm n_{ef} för varje rad, ekv. (3.52) för skruv och dymlingar och k_{ef} för spik.
7. **Förbandets bärförmåga.** Beräkna $F_{v,Rd}$ med ekv. (3.51) och kontrollera $F_{v,Ed} \leq F_{v,Rd}$.
8. **Utformning.** Placera förbindarna så att avstånden i tabell 3.10 uppfylls, och kontrollera spröda brott och virkesdelarnas nettotvärsnitt.

Exempel 3.9 Skarv med genomgående skruvar i tvåskärig skjuvning

En dragen stång av konstruktionsvirke C24, 95 × 145 mm, skarvas med två sidostycken 45 × 145 mm av C24 och genomgående skruvar M12 av hållfasthetsklass 4.6 med brickor (figur 3.47). På var sida om skarven sitter tre skruvar i en rad i mitten av höjden, med avståndet $a_1 = 84$ mm. Förbandet sitter i klimatklass 2 och den dimensionerande lasten är av medellång varaktighet. Bestäm den dragkraft F_{Ed} som skarven kan bära och kontrollera avstånden.



Figur 3.47 Dragskarv med sidostycken och tre skruvar M12 på var sida om skarven. Måtten i mm. Efter Exempelsamlingen, uppgift TF2.

Material. Kraften är parallell med fibrerna i alla delar ($\alpha = 0$). Med $\rho_k = 350$ kg/m³ (tabell 1.2) ger ekv. (3.48)

$$f_{h,1,k} = f_{h,2,k} = 0{,}082 \cdot (1 - 0{,}01 \cdot 12) \cdot 350 = 25{,}26 \text{ MPa}$$

så $\beta = 1$. Med $f_{u,k} = 400$ MPa (tabell 3.9) ger ekv. (3.31)

$$M_{y,k} = 0{,}3 \cdot 400 \cdot 12^{2{,}6} = 76\,750 \text{ Nmm}$$

Inbäddningsdjup. Förbandet är tvåskärigt: $t_{h1} = 45$ mm och $t_{h2} = 95/2 = 47{,}5$ mm (ekv. (3.42)).

Brottmoder. För tvåskäriga förband gäller moderna a, b, d och f. Hålkantbrott, ekv. (3.38):

$$F_a = 25{,}26 \cdot 45 \cdot 12 = 13\,640 \text{ N}$$
$$F_b = 25{,}26 \cdot 47{,}5 \cdot 12 = 14\,400 \text{ N}$$

Mod d, första raden i ekv. (3.40) med $\beta = 1$ och $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 12 \cdot 76\,750/(25{,}26 \cdot 12 \cdot 45^2) = 1{,}501$:

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{13\,640}{3}\left[\sqrt{4 + 1{,}501} - 1\right] = 6\,420 \text{ N}$$

Mod f, ekv. (3.41):

$$F_f = 1{,}15 \cdot \sqrt{2 \cdot 76\,750 \cdot 25{,}26 \cdot 12} = 7\,840 \text{ N}$$

Mod d är avgörande: $F_{D,k} = 6{,}42$ kN per skjuvplan. Skruven bildar flytleder i mittdelen och vrids i de tunna sidostyckena.

Dimensionerande bärförmåga per skjuvplan. Klimatklass 2 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6). Linverkan försummas, vilket är på säkra sidan. Ekv. (3.50) ger

$$F_{v,d} = 0{,}80 \cdot \frac{6\,420}{1{,}30} = 3\,950 \text{ N}$$

Effektivt antal. Tre skruvar i rad med $a_1 = 84$ mm $= 7d$ ger enligt ekv. (3.52)

$$n_{ef} = \min\left\{3;\, 3^{0{,}9} \cdot \sqrt[4]{\frac{84}{13 \cdot 12}}\right\}$$
$$= \min\{3;\, 2{,}688 \cdot 0{,}857\} = 2{,}30$$

Skarvens bärförmåga. Varje skruv har två skjuvplan, och ekv. (3.51) ger

$$F_{v,Rd} = n_{ef} \cdot n_s \cdot F_{v,d} = 2{,}30 \cdot 2 \cdot 3\,950 = 18\,200 \text{ N} = 18{,}2 \text{ kN}$$

Kontroll av avstånden. Enligt tabell 3.10 gäller för skruv med $d = 12$ mm:

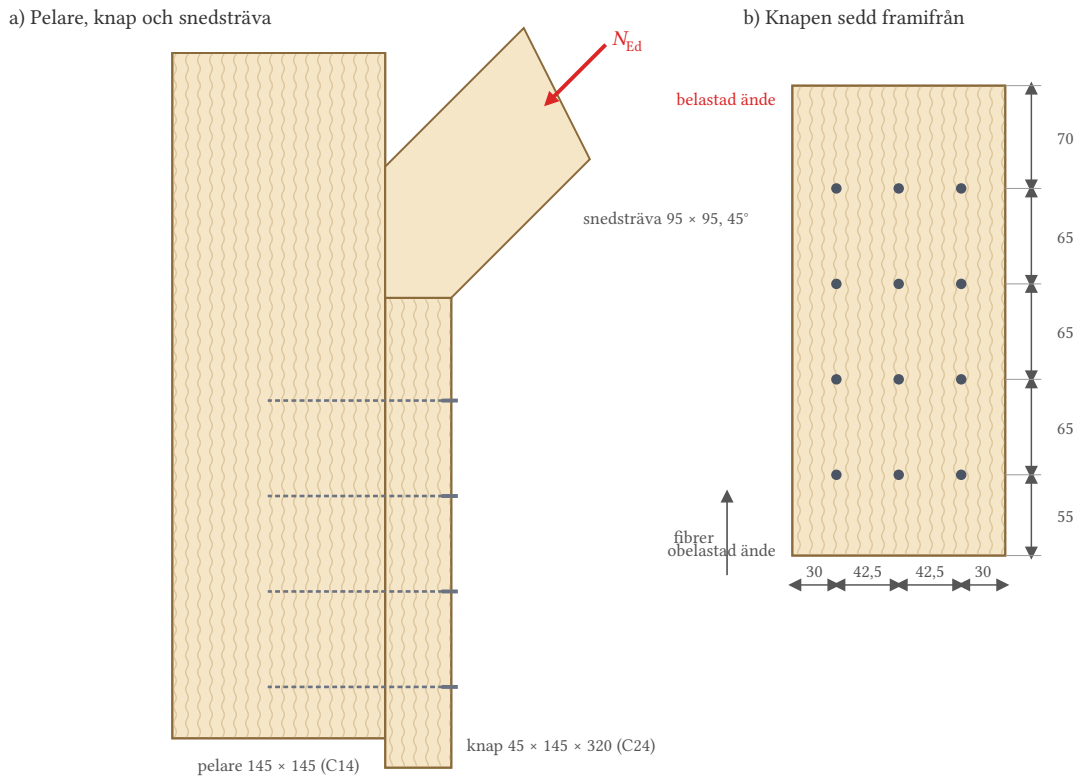
- $a_1 = 84 \geq 5d = 60$ mm,
- belastad ände $a_{3,t} = 90 \geq \max\{7d; 80\} = 84$ mm, både i mittdelen (avståndet till skarven, där mittdelen dras bort från skruvarna) och i sidostyckena (avståndet till deras ändar),
- obelastad kant $a_{4,c} = 72{,}5 \geq 3d = 36$ mm (kraften är parallell med fibrerna, så kanterna är obelastade).

Alla avstånd är uppfyllda. Sidostyckena blir $2 \cdot (90 + 84 + 84 + 95) = 706$ mm, avrundat 710 mm.

Tolkning. Skarven bär $F_{Ed} = 18{,}2$ kN. Det effektiva antalet minskar bärförmågan med nästan en fjärdedel jämfört med tre fullt verksamma skruvar. Med $a_1 = 13d = 156$ mm skulle $n_{ef} = 2{,}69$, men skarven blir då betydligt längre. Mod d visar att sidostyckena är tunna i förhållande till skruven; med sidostycken av 70 mm blir mod f avgörande och förbandet segare, vilket kan prövas i figur 3.41.

Exempel 3.10 Spikad knap som bär en snedsträva

En snedsträva 95 × 95 mm med lutningen 45° vilar med ett hak på en knap av C24, 45 × 145 × 320 mm, som är spikad på en pelare 145 × 145 mm av C14 med 12 räfflade trådspikar 125 × 4,3, utan förborrning (figur 3.48). Strävans vertikala kraftkomposant förs över till pelaren genom spikarna; den horisontella tas av kontakttryck mot pelaren. Spikarna sitter i tre rader parallellt med fibrerna, fyra i varje rad. Konstruktionen är i klimatklass 2 och lasten av medellång varaktighet. Bestäm den största tryckkraft N_{Ed} som strävan får ha med hänsyn till spikförbandet.



Figur 3.48 a) Pelare, knap och snedsträva. Spikarna går genom knapen in i pelaren. b) Spikarnas placering i knapen, mått i mm. Efter Exempelsamlingen, uppgift TF4.

Material. Del 1 är knapen (C24, $\rho_k = 350$ kg/m³) och del 2 pelaren (C14, $\rho_k = 290$ kg/m³, tabell 1.2). Spik utan förborrning, ekv. (3.47):

$$f_{h,1,k} = 0{,}082 \cdot 350 \cdot 4{,}3^{-0{,}3} = 18{,}53 \text{ MPa}$$

$$f_{h,2,k} = 0{,}082 \cdot 290 \cdot 4{,}3^{-0{,}3} = 15{,}35 \text{ MPa}$$

så $\beta = 15{,}35/18{,}53 = 0{,}829$ (ekv. (3.32)). Räfflad trådspik räknas som kvadratisk, så flytmomentet enligt ekv. (3.31) multipliceras med 1,5:

$$M_{y,k} = 1{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 600 \cdot 4{,}3^{2{,}6} = 11\,980 \text{ Nmm}$$

Inbäddningsdjup. $t_{h1} = 45$ mm. I pelaren räknas inträngningen utan spetsen $l_p = 2{,}5 \cdot 4{,}3 = 10{,}75$ mm:

$$t_{h2} = 125 - 45 - 10{,}75 = 69{,}25 \text{ mm} \geq 8d = 34{,}4 \text{ mm}$$

Kravet på minsta inträngning för slät spik är uppfyllt.

Brottmoder. Enskärigt förband, alla sex moderna. Hålkantbrott, ekv. (3.38):

$$F_a = 18{,}53 \cdot 45 \cdot 4{,}3 = 3\,585 \text{ N}$$

$$F_b = 15{,}35 \cdot 69{,}25 \cdot 4{,}3 = 4\,572 \text{ N}$$

Mod c, ekv. (3.39) med $\tau = 69{,}25/45 = 1{,}539$, ger $F_c = 1\,729$ N. Mod d, första raden i ekv. (3.40), med $2\beta(1+\beta) = 3{,}030$ och $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 0{,}696$:

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{3\,585}{2{,}829}\left[\sqrt{3{,}030 + 0{,}696} - 0{,}829\right] = 1\,466 \text{ N}$$

Mod e, andra raden, ger $F_e = 1\,833$ N, och mod f, ekv. (3.41):

$$F_f = 1{,}15 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}829}{1{,}829}} \cdot \sqrt{2 \cdot 11\,980 \cdot 18{,}53 \cdot 4{,}3} = 1\,513 \text{ N}$$

Mod d är avgörande, $F_{D,k} = 1{,}47$ kN per spik: flytleden bildas i pelaren, medan spiken vrids i knapen.

Dimensionerande bärförmåga per spik. $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6), och linverkan försummas:

$$F_{v,d} = 0{,}80 \cdot \frac{1\,466}{1{,}30} = 902 \text{ N}$$

Effektivt antal. Avståndet i raderna är $a_1 = 65$ mm $\geq 14d = 60{,}2$ mm, så alla spikar räknas fullt ut: $n_{ef} = n = 12$.

Förbandets bärförmåga. ekv. (3.51) med $n_s = 1$:

$$F_{v,Rd} = 12 \cdot 1 \cdot 902 = 10\,820 \text{ N} = 10{,}8 \text{ kN}$$

Största kraft i strävan. Spikarna bär strävans vertikala komposant, $N_{Ed} \sin 45° \leq F_{v,Rd}$:

$$N_{Ed} \leq \frac{F_{v,Rd}}{\sin 45°} = \frac{10{,}82}{0{,}707} = 15{,}3 \text{ kN}$$

Kontroll av avstånden. Spik utan förborrning med $d = 4{,}3$ mm och $\rho_k \leq 430$ kg/m³ (tabell 3.10):

- $a_1 = 65 \geq 10d = 43$ mm och $a_2 = 42{,}5 \geq 5d = 21{,}5$ mm,
- belastad ände (knapens överände, eftersom spikarna trycker knapen uppåt) $a_{3,t} = 70 \geq 15d = 64{,}5$ mm,
- obelastad ände (knapens underände) $a_{3,c} = 55 \geq 10d = 43$ mm,
- obelastade kanter $a_{4,c} = 30 \geq 5d = 21{,}5$ mm.

I pelaren ligger spikarna långt från ändarna och med samma kantavstånd. Alla krav är uppfyllda, och eftersom $d < 6$ mm och virket inte är sprickbenäget behövs ingen förborrning.

Tolkning. Strävan får ha tryckkraften 15,3 kN. Den svagare pelaren (C14) är den del där flytleden bildas; i C24 skulle bärförmågan öka med några procent. Mod d, f och c ligger inom 20 % av varandra, så förbandet är ganska väl balanserat. Linverkan, som här försummats, skulle för slät kvadratisk spik kunna höja bärförmågan med upp till 25 % (tabell 3.8), men kräver att spikens utdragsbärförmåga beräknas.

Betong – förankring

3.10 Dragkraftsbehov i längsarmeringen

Ett förband i en betongkonstruktion är för det mesta inte en skruv eller en svets, utan armeringens **förankring**: kraften i en armeringsstång måste föras över till betongen, eller till en annan stång, innan stången tar slut. De tre följande avsnitten handlar om det. Här bestäms först hur stor dragkraft längsarmeringen måste kunna bära i varje snitt längs en balk, **dragkraftsbehovet**. I avsnitt 3.11 behandlas hur kraften förs över mellan stål och betong och hur lång förankringslängd som behövs, och i avsnitt 3.12 hur armeringen avkortas, förankras vid stöd och skarvas så att kapaciteten räcker överallt.

3.10.1 Dragkraftsbehov och dragkraftskapacitet

I ett böjsprucket tvärsnitt bärs momentet av ett kraftpar: en tryckkraft i betongens tryckzon och en dragkraft i armeringen, med den inre hävarmen z mellan dem (avsnitt 1.7, ekv. (1.27)). Utan andra effekter är dragkraften i armeringen alltså

$$F_{td} = \frac{M_{Ed}}{z} \tag{3.53}$$

Det är **dragkraftsbehovet** (en lasteffekt). Armeringen dimensioneras i snittet med störst moment, men längre ut mot stöden avtar momentet och därmed behovet. Där kan en del av stängerna avslutas, vilket kallas **avkortning**.

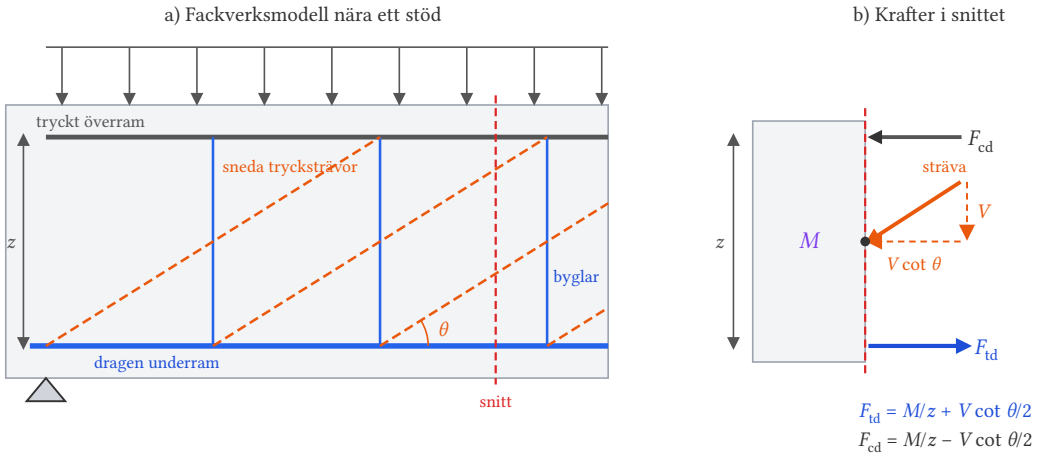
Armeringens **dragkraftskapacitet** är $f_{yd}A_s$ där stängerna är fullt förankrade. Närmare en stångände är kapaciteten mindre, eftersom kraften i stången är noll vid änden och bara kan växa i den takt som vidhäftningen mot betongen tillåter (avsnitt 3.11). Dimensioneringsvillkoret är att kapaciteten i **varje** snitt ska vara minst lika stor som behovet:

$$F_{Rd}(x) \geq F_{td}(x) \tag{3.54}$$

Ekv. (3.53) räcker inte som behov. Nära stöden, där tvärkraften är stor, spricker balken snett, och då blir dragkraften i armeringen större än M_{Ed}/z.

3.10.2 Inverkan av sneda sprickor

När sneda skjuvsprickor har bildats i livet bärs tvärkraften av sneda trycksträvor av betong mellan sprickorna, som i fackverksmodellen för tvärkraft i avsnitt 1.8.3. Figur 3.49a visar modellen nära ett stöd: tryckzonen är överram, längsarmeringen underram, byglarna dragna vertikaler och betongen mellan sprickorna sneda strävor med lutningen θ.



Figur 3.49 a) Fackverksmodell för en balkände med vertikala byglar. b) Krafter i ett vertikalt snitt: strävorna som skärs av snittet ger tvärkraften V, men också en horisontell tryckkraft $V \cot \theta$ som drag- och tryckramen måste balansera.

Skär balken med ett vertikalt snitt mellan två byglar, figur 3.49b. Snittet skär överramen, underramen och de sneda strävorna. Strävorna är jämnt fördelade över höjden z, så deras resultant angriper mitt emellan ramarna. Den är riktad längs strävorna, och dess vertikala komponent är tvärkraften V_{Ed}. Då måste den också ha en **horisontell komponent**:

$$N_{Vd} = |V_{Ed}| \cdot \cot \theta \tag{3.55}$$

(EC2 8.2.3(8), formel (8.50)). Den är en tryckkraft i livet. Det finns ingen yttre normalkraft i snittet, så ramarna måste tillsammans ta upp lika mycket drag: $F_{td} - F_{cd} = N_{Vd}$. Momentjämvikt kring strävresultantens angreppspunkt, mitt mellan ramarna, ger $M_{Ed} = (F_{td} + F_{cd})\, z/2$. De två villkoren ger ramkrafterna

$$F_{td} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{N_{Vd} + N_{Ed}}{2} \tag{3.56}$$

$$F_{cd} = \frac{M_{Ed}}{z} - \frac{N_{Vd} + N_{Ed}}{2} \tag{3.57}$$

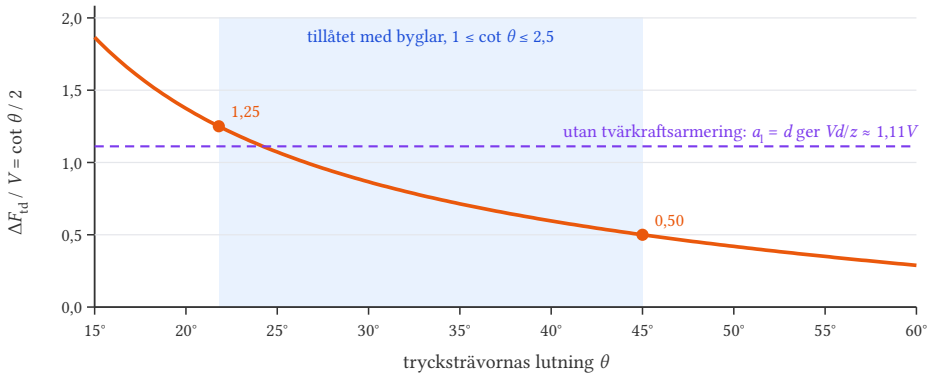
(EC2 formel (8.51)–(8.52)), där en eventuell yttre normalkraft N_{Ed} (drag positivt, i livets mitt) har tagits med på samma sätt. Den sneda sprickbildningen **ökar** alltså dragkraften i underramen med $N_{Vd}/2 = V_{Ed} \cot \theta/2$

och **minskar** tryckkraften i överramen lika mycket. Halva tillskottet hamnar i varje ram eftersom strävornas resultant angriper mitt emellan dem.

Samma resultat fås om man i stället frilägger balkdelen längs en sned spricka. Sprickan börjar vid armeringen i snittet x och når tryckzonen längre in, vid $x + z\cot\theta$. Armeringskraften i x måste därför balansera momentet vid sprickans övre ände, minskat med momentet från byglarna som korsar sprickan. Byglarnas resultant V_{Ed} angriper mitt på sprickans längd, och det ger återigen $F_{td} = M_{Ed}/z + V_{Ed}\cot\theta/2$. Dragkraften i armeringen bestäms alltså av momentet en bit **in** mot fältet, där momentet är större.

Spricklutningens inverkan

Tillskottet $\Delta F_{td} = V_{Ed}\cot\theta/2$ beror bara på strävornas lutning, se figur 3.50. Med strävor i 45° ($\cot\theta = 1$) är tillskottet $0{,}5V_{Ed}$, och med den flackaste tillåtna lutningen ($\cot\theta = 2{,}5$, ekv. (1.39)) är det $1{,}25V_{Ed}$. **Ju flackare strävor, desto större dragkraftsbehov.**



Figur 3.50 Dragkraftstillskottet på grund av sneda sprickor som funktion av strävornas lutning θ. Det skuggade området är det tillåtna intervallet för balkar med tvärkraftsarmering, och den streckade linjen motsvarar regeln $a_l = d$ för balkar utan tvärkraftsarmering.

Lutningen är inte en materialegenskap utan väljs av konstruktören inom gränserna i ekv. (1.39), och samma θ ska användas i alla kontroller: byglar, strävor och ramkrafter. Det ger ett utbyte mellan bygel- och längsarmering. Byglarna som korsar en sprickas horisontella längd $z\cot\theta$ måste tillsammans bära tvärkraften. Med bygelarean A_{sw} och avståndet s blir det villkoret $V_{Ed} = (z\cot\theta/s)\,A_{sw}f_{ywd}$, och den minsta lutning som de inlagda byglarna kan bära är

$$\cot\theta = \frac{V_{Ed}\cdot s}{z\cdot A_{sw}\cdot f_{ywd}} = \frac{\tau_{Ed}}{\rho_w\cdot f_{ywd}}, \qquad 1 \le \cot\theta \le 2{,}5 \tag{3.58}$$

Det är ekv. (1.40) löst för $\cot\theta$ med $\tau_{Rd,sy} = \tau_{Ed}$. **Fler eller grövre byglar ger brantare strävor och ett mindre dragkraftsbehov**: tvärkraften lyfts upp av byglarna på en kortare sträcka. Med få byglar måste strävorna bli flacka för att varje snedspricka ska korsa tillräckligt många byglar, och då ökar dragkraften i längsarmeringen. Byglarna nära ett stöd är därför ett verktyg när förankringen vid stödet är svår (avsnitt 3.12.3). Lutningen får dock aldrig antas brantare än 45°.

Med lutande tvärkraftsarmering

Lutar byglarna eller uppbockade stänger med vinkeln α mot balkaxeln har de själva en horisontell komponent, som motverkar strävornas. Tillskottet minskar då till (EC2 formel (8.61))

$$N_{Vd} = |\,V_{Ed}|\cdot(\cot\theta - \cot\alpha) \tag{3.59}$$

Med vertikala byglar är $\cot\alpha = 0$ och uttrycket övergår i ekv. (3.55).

Utan tvärkraftsarmering

En balk eller platta utan byglar bär tvärkraften genom friktion i sprickytorna, dymlingsverkan och tryckzonen (avsnitt 1.8.2). Det finns ingen fackverksmodell att räkna med, men frilagd längs en sned spricka finns

inte heller några byglar som avlastar armeringen: dragkraften i början av sprickan bestäms av momentet vid sprickans övre ände, ungefär en sträcka d längre in. EC2 tar hänsyn till det genom att förskjuta momentkurvan sträckan d (8.2.2(10) och 12.3.2(1)), se nästa avsnitt. Omräknat till ett tillskott blir det $\Delta F_{td} \approx V_{Ed}\, d/z \approx 1{,}11 V_{Ed}$ med $z = 0{,}9d$, vilket motsvarar en mycket flack spricka ($\cot\theta \approx 2{,}2$), se figur 3.50.

3.10.3 Förskjutning av momentkurvan

Eftersom $V_{Ed} = \mathrm{d}M_{Ed}/\mathrm{d}x$ är tillskottet $V_{Ed}\cot\theta/2$ ungefär lika med den ökning av M_{Ed}/z som fås om man flyttar sig sträckan $z\cot\theta/2$ mot större moment: $M_{Ed}(x+a) \approx M_{Ed}(x) + V_{Ed}\,a$. I stället för att addera tillskottet kan man därför **förskjuta momentkurvan** sträckan a_l i ogynnsam riktning, det vill säga mot stöden eller momentets nollpunkter, och räkna dragkraftsbehovet som M_{Ed}/z ur den förskjutna kurvan. Förskjutningen är (EC2 12.3.2(1), formel (12.5)–(12.6))

$$a_l = \frac{z\,(\cot\theta - \cot\alpha)}{2} \tag{3.60}$$

med tvärkraftsarmering, och

$$a_l = d \tag{3.61}$$

utan tvärkraftsarmering. Med vertikala byglar ligger a_l mellan $0{,}45d$ ($\cot\theta = 1$) och $1{,}13d$ ($\cot\theta = 2{,}5$) när $z = 0{,}9d$.

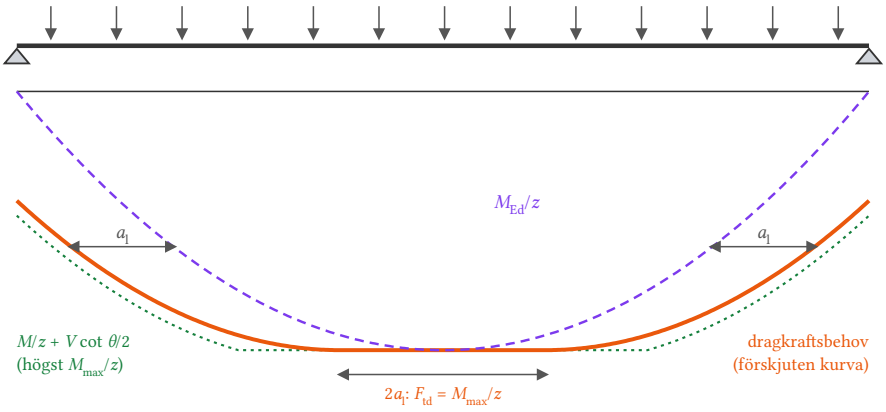
De två metoderna ger nästan samma resultat, men inte exakt: med jämnt utbredd last är skillnaden $qa_l^2/(2z)$, och förskjutningen ger det något mindre värdet. Tillskottsmetoden passar bäst för att beräkna behovet i ett bestämt snitt, till exempel vid en stödkant. Förskjutningen är bekvämast när hela behovskurvan ska ritas, eftersom den kan konstrueras grafiskt direkt ur momentkurvan.

Begränsning till största momentet

I snittet med störst moment är tvärkraften noll (eller byter tecken), och strävorna på ömse sidor lutar åt olika håll. Dragkraften kan där inte bli större än $M_{Ed,max}/z$, och inte heller i närliggande snitt. EC2 tillåter därför att dragkraftsbehovet begränsas till (formel (8.53))

$$F_{td} \le \frac{M_{Ed,max}}{z} + \frac{N_{Ed}}{2} \tag{3.62}$$

vid direkt upplagda mellanstöd och under koncentrerade laster. Med förskjutningsmetoden följer gränsen av sig själv: den förskjutna kurvan får en platå med bredden $2a_l$ runt maxmomentet. Med tillskottsmetoden måste gränsen läggas på för hand, eftersom $M_{Ed}/z + V_{Ed}\cot\theta/2$ annars blir något större än $M_{Ed,max}/z$ strax intill maxmomentsnittet. Figur 3.51 visar båda metoderna för en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last.



Figur 3.51 Dragkraftsbehovet längs en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last, ritat nedåt. Momentkurvan delad med z förskjuts sträckan a_l mot stöden och får en platå med bredden $2a_l$ vid M_{max}/z. Den prickade kurvan är tillskottsmetoden, begränsad till M_{max}/z.

3.10.4 Behovskurva längs en balk

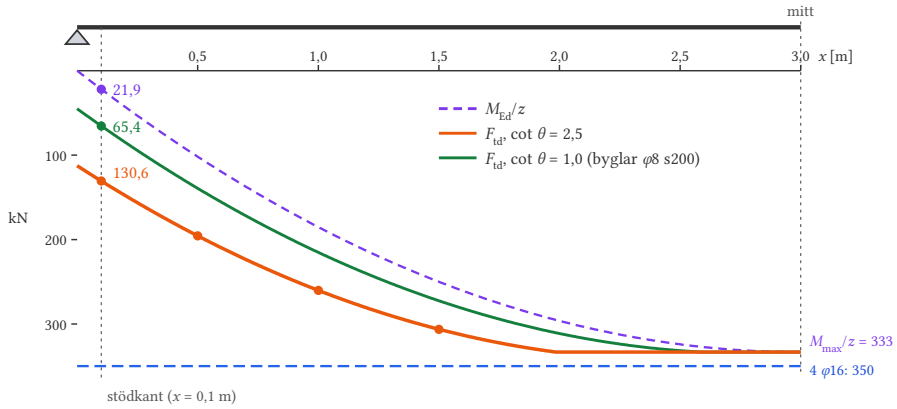
För att kunna avkorta armeringen behövs dragkraftsbehovet längs hela balken, en **behovskurva**. Gången är:

1. Rita momentkurvan $M_{Ed}(x)$ för den dimensionerande lasten och dela med z.
2. Bestäm $\cot\theta$, antingen det värde som tvärkraftsarmeringen dimensionerades för eller det som de inlagda byglarna ger enligt ekv. (3.58), och därmed a_l enligt ekv. (3.60) (eller $a_l = d$ utan byglar).
3. Förskjut kurvan sträckan a_l mot stöden och momentnollpunkterna, så att platåer bildas vid maxmomenten. Ändras bygelavståndet längs balken kan a_l ändras i motsvarande delar.
4. I enstaka snitt, till exempel vid stödkanten där förankringen ska kontrolleras, beräknas behovet hellre med ekv. (3.56).

I avsnitt 3.12 jämförs behovskurvan med armeringens kapacitet.

Exempel 3.11 Dragkraftsbehov för en fritt upplagd balk

Balken i avsnitt 2.9 är fritt upplagd med spännvidden $L = 6{,}0$ m mellan stödens mitt och vilar på 200 mm breda stöd. Tvärsnittet är 300×500 mm med 4 $\phi16$ B500B i underkant, $d = 450$ mm, C30/37. I brottgränstillståndet bär den den jämnt utbredda lasten $q_d = 30$ kN/m (inklusive egentyngd). Byglarna är tvåskäriga $\phi8$ s200 B500B. Bestäm dragkraftsbehovet längs balken med $\cot\theta = 2{,}5$, och jämför med det behov som fås med den spricklutning som byglarna medger.



Figur 3.52 Dragkraftsbehovet längs halva balken i exemplet (ritat nedåt), med $\cot\theta = 2{,}5$ och med $\cot\theta = 1{,}0$, jämfört med M_{Ed}/z och kapaciteten hos 4 $\phi16$.

Hävarm och maxmoment. Med $z = 0{,}9d = 405$ mm är

$$\frac{M_{Ed,max}}{z} = \frac{q_d L^2/8}{z} = \frac{30 \cdot 6{,}0^2/8}{0{,}405} = \frac{135}{0{,}405} = 333 \text{ kN}$$

vilket 4 $\phi16$ klarar: $f_{yd}A_s = 435 \cdot 804 = 350$ kN.

Snittkrafter vid stödkanten. Stödkanten ligger $x = 0{,}1$ m från stödets mitt:

$$V_{Ed} = q_d\left(\frac{L}{2} - x\right) = 30 \cdot (3{,}0 - 0{,}1) = 87{,}0 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = \frac{q_d\, x(L-x)}{2} = \frac{30 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}9}{2} = 8{,}85 \text{ kNm}$$

Dragkraftsbehov med cot θ = 2,5. ekv. (3.55) och ekv. (3.56) ger

$$F_{td} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed}\cot\theta}{2} = \frac{8{,}85}{0{,}405} + \frac{87{,}0 \cdot 2{,}5}{2} = 21{,}9 + 108{,}8 = 130{,}6 \text{ kN}$$

Behovet vid stödkanten är alltså sex gånger större än M_{Ed}/z. Samma beräkning i fler snitt ger tabell 3.11. Från $x \approx 2{,}0$ m blir $M_{Ed}/z + V_{Ed}\cot\theta/2$ större än 333 kN och begränsas enligt ekv. (3.62).

Spricklutning som byglarna medger. Med $A_{sw} = 2 \cdot 50{,}3 = 101$ mm² och $V_{Ed} = 87{,}0$ kN ger ekv. (3.58)

$$\cot\theta = \frac{V_{Ed}\, s}{z\, A_{sw}\, f_{ywd}} = \frac{87{,}0 \cdot 10^3 \cdot 200}{405 \cdot 101 \cdot 435} = 0{,}98 \Rightarrow \cot\theta = 1{,}0$$

Byglarna klarar alltså tvärkraften redan med strävor i 45°, och längre in i balken, där tvärkraften är mindre, gäller samma sak.

Dragkraftsbehov med cot θ = 1,0.

$$F_{td} = 21{,}9 + \frac{87{,}0 \cdot 1{,}0}{2} = 21{,}9 + 43{,}5 = 65{,}4 \text{ kN}$$

Tabell 3.11 Dragkraftsbehov längs balken i exemplet (kN). Värden över 333 kN är begränsade till $M_{Ed,max}/z$.

x [m]	M_{Ed} [kNm]	V_{Ed} [kN]	M_{Ed}/z	F_{td}, $\cot\theta = 2{,}5$	F_{td}, $\cot\theta = 1{,}0$
0,1	8,85	87,0	21,9	130,6	65,4
0,5	41,3	75,0	101,9	195,6	139,4
1,0	75,0	60,0	185,2	260,2	215,2
1,5	101,3	45,0	250,0	306,3	272,5
2,0	120,0	30,0	296,3	333,3	311,3
2,5	131,3	15,0	324,1	333,3	331,6
3,0	135,0	0	333,3	333,3	333,3

Kontroll med förskjutning. Med $\cot\theta = 2{,}5$ är förskjutningen enligt ekv. (3.60)

$$a_l = \frac{z\cot\theta}{2} = \frac{405 \cdot 2{,}5}{2} = 506 \text{ mm}$$

och den förskjutna kurvan ger vid stödkanten $M_{Ed}(0{,}606)/z = 121{,}1$ kN. Det är 9,5 kN mindre än tillskottsmetoden, vilket stämmer med skillnaden $q_d a_l^2/(2z) = 30 \cdot 0{,}506^2/(2 \cdot 0{,}405) = 9{,}5$ kN.

Vid stödkanten, där förankringen ska ske, halverar de inlagda byglarna alltså dragkraftsbehovet (65 i stället för 131 kN), medan behovet i fältets mitt är detsamma, se figur 3.52. Utan byglar skulle $a_l = d$ ge $21{,}9 + 87{,}0 \cdot 450/405 = 118{,}5$ kN. Förankringen vid stödet kontrolleras i exempel 3.12.

3.11 Vidhäftning och förankring av armering

En armeringsstång kan bara bära den kraft som har förts in i den från betongen. Vid stångänden är kraften noll, och den växer längs stången i den takt som **vidhäftningen** (*bond*) mellan stål och betong tillåter. Den sträcka som behövs för att föra in en viss kraft är **förankringslängden** (*anchorage length*). Det här avsnittet beskriver hur kraften förs över mellan en kamstång och betongen, hur en förankring kan gå till brott och hur förankringslängden beräknas enligt EC2:2023. Hur förankringen används vid stöd och vid avkortning behandlas i avsnitt 3.12.

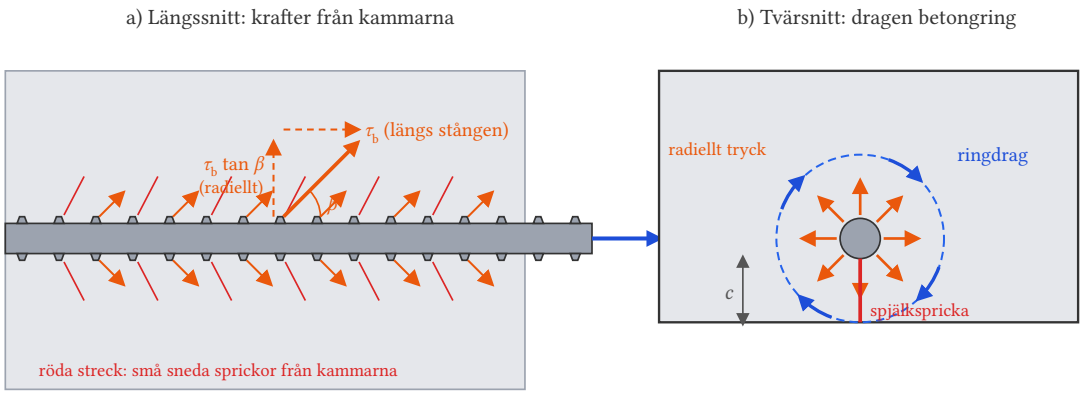
3.11.1 Kraftöverföring mellan kamstång och betong

Kraftöverföringen längs en stång beskrivs med en **vidhäftningsspänning** τ_b, en skjuvspänning på stångens mantelyta. Hur den fördelar sig längs en dragen stång, och hur den ger upphov till överföringssträckan, visas för en dragen stav i avsnitt 2.4.1 och figur 2.27. Bakom spänningen ligger tre mekanismer som verkar efter varandra när kraften ökar:

1. **Adhesion**, en kemisk bindning mellan stål och cementpasta. Den bär bara små krafter och bryts vid mycket liten glidning.

2. **Kammarnas tryck mot betongen** (förtagningseffekt). Kammarna trycker på betongen framför sig, ungefär som små konsoler. Det är den dominerande mekanismen för kamstänger.
3. **Friktion**, när betongen mellan kammarna har krossats eller skjuvats av och stången glider i sitt hål.

Kontaktkraften från en kam är inte parallell med stången utan riktad snett utåt, med vinkeln β mot stångaxeln, se figur 3.53a. Den kan delas upp i en längsgående komponent, som är vidhäftningsspänningen τ_b, och en **radiell komponent** $\tau_b \tan\beta$ som trycker betongen utåt. De sneda tryckkrafterna ger dragspänningar i betongen alldeles intill stången, och redan vid måttlig last uppstår små sneda sprickor från kammarnas toppar. Mellan sprickorna bildas koniska tryckskal kring stången.



Figur 3.53 a) Kammarnas kontaktkrafter på betongen är riktade snett utåt: den längsgående komponenten är vidhäftningsspänningen, den radiella komponenten trycker betongen utåt. b) Det radiella trycket hålls emot av ringdrag i betongen runt stången. När ringdraget betongens draghållfasthet spricker täckskiktet (spjälkspricka). Omritad efter kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B10.17–B10.19.

Spjälkning

Det radiella trycket verkar som ett inre tryck i ett rör: det måste balanseras av dragspänningar i ringriktningen i betongen runt stången (figur 3.53b). Den svagaste delen av ringen är den tunnaste, det vill säga täckskiktet c eller halva avståndet till närmaste stång. Ett enkelt mått på hur mycket ringen tål fås om dragspänningen antas vara f_{ct} över två snitt med tjockleken c: jämvikt för en halv ring med längden $\mathrm{d}l$ ger $\tau_b \tan\beta \cdot \phi\,\mathrm{d}l = 2cf_{ct}\,\mathrm{d}l$, och därmed den vidhäftningsspänning som ger spjälkning:

$$\tau_{b,spj} \approx \frac{2c}{\phi} \cdot \frac{f_{ct}}{\tan\beta} \tag{3.63}$$

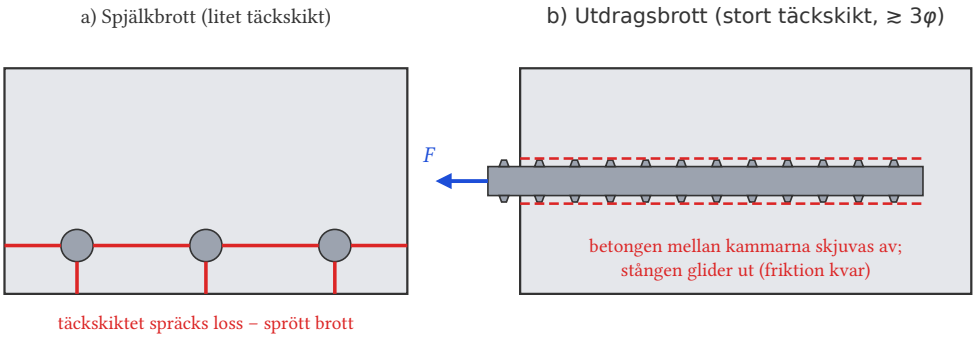
Modellen överskattar kapaciteten eftersom dragspänningen inte är jämnt fördelad i ringen, men den visar vad som styr: **förhållandet c/ϕ och betongens draghållfasthet**. När ringen brister uppstår en **spjälkspricka** (*splitting crack*) längs stången genom täckskiktet eller mellan stängerna. Byglar eller annan tvärarmering som korsar sprickan kan ta över ringens uppgift, och ett yttre tryck tvärs stången, till exempel från ett stöd, motverkar sprickan.

3.11.2 Förankringsbrott

Beroende på hur väl stången är innesluten i betongen kan förankringen gå till brott på två principiellt olika sätt, se figur 3.54:

- **Spjälkbrott** (*splitting failure*). Vid litet täckskikt eller tätt liggande stänger, utan tillräcklig tvärarmering, sprider sig spjälksprickorna genom täckskiktet och mellan stängerna tills täckskiktet lossnar och stången släpper. Brottet är plötsligt och sprött. I balkar och plattor är detta den normala brottypen.
- **Utdragsbrott** (*pull-out failure*). Är stången väl innesluten (täckskikt större än ungefär 3ϕ och stångavstånd större än ungefär 6ϕ) uppstår inga genomgående spjälksprickor. I stället krossas eller skjuvas betongen mellan kammarna av längs en cylinderyta kring stången, och stången dras ut. Utdragsbrottet ger den **övre gränsen** för vad en förankring kan bära.

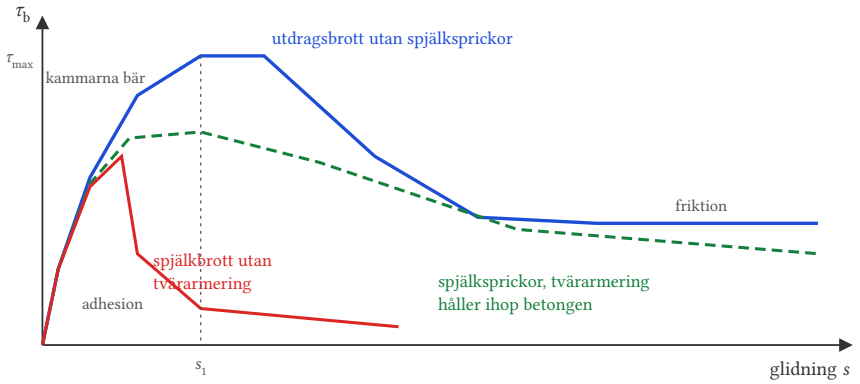
Mellan dem finns utdragsbrott i betong med spjälksprickor, där tvärarmering håller ihop betongen trots sprickorna. Det önskvärda är förstås att förankringen är så lång att stången flyter innan något av dessa brott inträffar.



Figur 3.54 Huvudtyper av förankringsbrott: a) spjälkbrott vid litet täckskikt, b) utdragsbrott när stången är väl innesluten. Omritad efter kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B10.22.

Vidhäftning och glidning

Vidhäftningen är alltid förknippad med en **glidning** s mellan stången och betongen. Figur 3.55 visar principiellt sambandet i ett snitt, som det mäts i utdragsförsök med kort ingjutningslängd. För en väl innesluten stång stiger spänningen brant så länge adhesionen och kammarna bär, når ett maximum när betongen framför kammarna börjar krossas, och sjunker sedan mot en friktionsnivå. Spjälkas täckskiktet sjunker kurvan tidigt och brant; med tvärarmering blir nedgången mjukare och nivån högre. Glidningen gör också att vidhäftningsspänningen inte är jämnt fördelad längs en förankring: den är störst nära den belastade änden, där glidningen är störst, och jämnas ut när betongen närmast stången spricker och mjuknar inför brottet.



Figur 3.55 Principiellt samband mellan vidhäftningsspänning och glidning i ett snitt vid olika brottyper. Omritad efter kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B10.24 och B10.26.

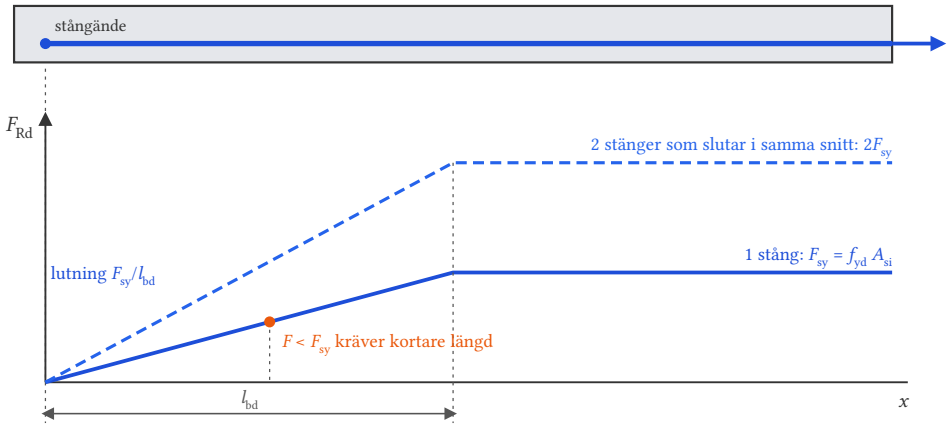
3.11.3 Dragkapacitet längs en stång

Antag för enkelhets skull att vidhäftningsspänningen är jämnt fördelad med medelvärdet τ_{bm} längs förankringen. Jämvikt för stången över längden l_b ger då, precis som för överföringssträckan i ekv. (2.53),

$$\tau_{bm} \cdot \pi\phi \cdot l_b = \frac{\pi\phi^2}{4} \cdot \sigma_{sd} \quad \Rightarrow \quad l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{\sigma_{sd}}{\tau_{bm}} \tag{3.64}$$

Kraften i stången kan alltså från stångänden växa högst med lutningen $\tau_{bm}\pi\phi$, den **möjliga krafttillväxten** per längdenhet. Dragkapaciteten längs stången ser därför ut som i figur 3.56: den är noll vid stångänden, växer längs en rät **kapacitetslinje** och når flytkraften $F_{sy} = f_{yd}A_{si}$ efter förankringslängden l_{bd}. Därefter

är det stålets hållfasthet som begränsar. Slutar flera stänger i samma snitt växer gruppens kapacitet lika många gånger snabbare. En kraft som är mindre än flytkraften kräver en kortare längd.



Figur 3.56 Dragkapaciteten längs en stång från stångänden: den växer linjärt över förankringslängden l_{bd} till flytkraften. Två stänger som slutar i samma snitt ger dubbelt så brant kapacitetslinje.

EC2 tillåter att kapaciteten inom förankringslängden antas variera linjärt på detta sätt (12.3.2(2)). Det används vid avkortning i avsnitt 3.12.

3.11.4 Förankringslängd enligt EC2:2023

EC2:2023 ger inte någon vidhäftningshållfasthet att sätta in i ekv. (3.64), utan en formel direkt för den **dimensionerande förankringslängden** för raka stänger (11.4.2(3), formel (11.3)):

$$l_{bd} = k_{lb}\, k_{cp}\, \phi \cdot \left(\frac{\sigma_{sd}}{435}\right)^{3/2} \left(\frac{25}{f_{ck}}\right)^{1/2} \left(\frac{\phi}{20}\right)^{1/3} \left(\frac{1{,}5\phi}{c_d}\right)^{1/2} \geq 10\phi \tag{3.65}$$

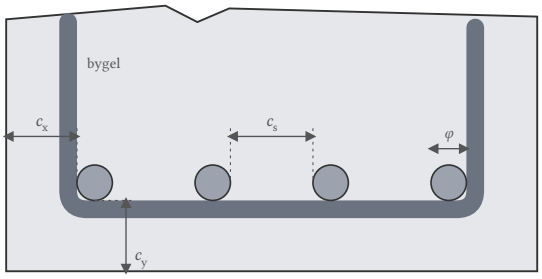
med σ_{sd} och f_{ck} i MPa och ϕ och c_d i mm. Formeln är anpassad till ett stort antal försök, och varje faktor har en fysikalisk förklaring:

- $k_{lb} = 50$ är en kalibreringskonstant för varaktiga och tillfälliga dimensioneringssituationer ($k_{lb} = 35$ för olyckslast). Med alla parentesuttryck lika med 1 blir förankringslängden alltså 50ϕ.
- k_{cp} beaktar **gjutläget**: 1,0 vid goda och 1,2 vid dåliga vidhäftningsförhållanden, se nedan.
- $(\sigma_{sd}/435)^{3/2}$: σ_{sd} är den dimensionerande spänningen i stången där förankringen börjar. Den behöver bara förankras för den kraft som verkligen finns där. Exponenten är större än 1: halva spänningen kräver bara 35 % av längden. Skrivs formeln om blir $\sigma_{sd} \propto l_{bd}^{2/3}$, och enligt ekv. (3.64) är då medelvidhäftningen $\tau_{bm} \propto l_{bd}^{-1/3}$. **Medelvidhäftningen är större i korta förankringar** än i långa, eftersom spänningen är koncentrerad till den belastade änden (figur 3.55) och en kort förankring därför utnyttjas jämnare.
- $(25/f_{ck})^{1/2}$: vidhäftningen styrs av betongens draghållfasthet, som växer ungefär med $\sqrt{f_{ck}}$. Kvoten får inte sättas mindre än 0,3.
- $(\phi/20)^{1/3}$: **storlekseffekt**. Grova stänger behöver en något längre förankring även räknat i antal diametrar, eftersom vidhäftningen inte växer i takt med stångens area. Kvoten får inte sättas mindre än 0,6.
- $(1{,}5\phi/c_d)^{1/2}$: **täckskikt och stångavstånd**. Ett tjockare täckskikt eller större avstånd mellan stängerna ger en starkare ring mot spjälkning, jämför ekv. (3.63). Med $c_d = 1{,}5\phi$ är faktorn 1.

Det **nominella täckskiktet** c_d är den kortaste väg som en spjälkspricka måste gå, se figur 3.57:

$$c_d = \min\{0{,}5c_s;\, c_x;\, c_y;\, 3{,}75\phi\} \tag{3.66}$$

där c_x och c_y är täckskikten till stången i sidled och nedåt (inklusive byglarna) och c_s är det fria avståndet mellan stängerna. Övre gränsen $3{,}75\phi$ motsvarar utdragsbrott: när stången är så väl innesluten hjälper inte mer betong.



Figur 3.57 Nedre delen av ett balktvärsnitt med bygel och fyra huvudstänger. Täckskikten c_x och c_y, mätta till den förankrade stångens yta, och det fria stångavståndet c_s bestämmer måttet c_d i ekv. (3.65) för raka stänger. Omritad efter EC2 figur 11.3c.

Minimivärdet 10ϕ gäller alltid, även om formeln ger en kortare längd för en liten kraft.

Tabellvärden

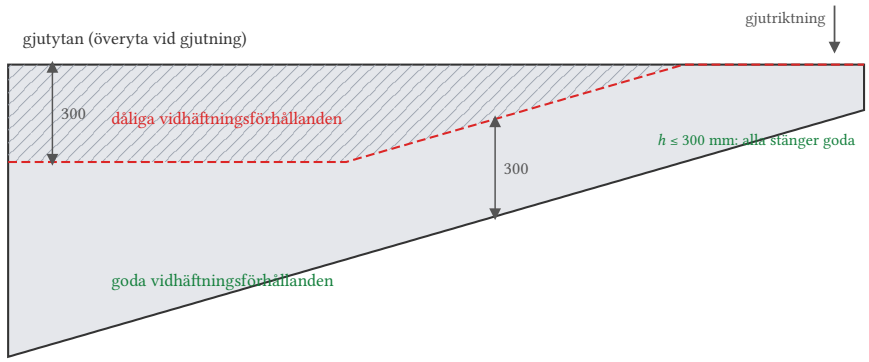
För kamstänger med $\phi \leq 32$ mm, $c_d \geq 1{,}5\phi$, full spänning $\sigma_{sd} = 435$ MPa och goda vidhäftningsförhållanden ger ekv. (3.65) värdena i tabell 3.12. Vid dåliga vidhäftningsförhållanden multipliceras de med 1,2. Med mindre spänning eller större täckskikt ger formeln kortare längder.

Tabell 3.12 Förankringslängd för raka stänger, l_{bd}/ϕ, vid $c_d \ge 1{,}5\phi$, σ_{sd} = 435$ MPa och goda vidhäftningsförhållanden. Ur SS-EN 1992-1-1:2023 tabell 11.1 (rekommenderade värden).

ϕ [mm]	$f_{ck} = 20$	25	30	35	40	45	50	60
≤ 12	47	42	38	36	33	31	30	27
14	50	44	41	38	35	33	31	29
16	52	46	42	39	37	35	33	30
20	56	50	46	42	40	37	35	32
25	60	54	49	46	43	40	38	35
28	63	56	51	47	44	42	40	36
32	65	58	53	49	46	44	41	38

Vidhäftningsförhållanden

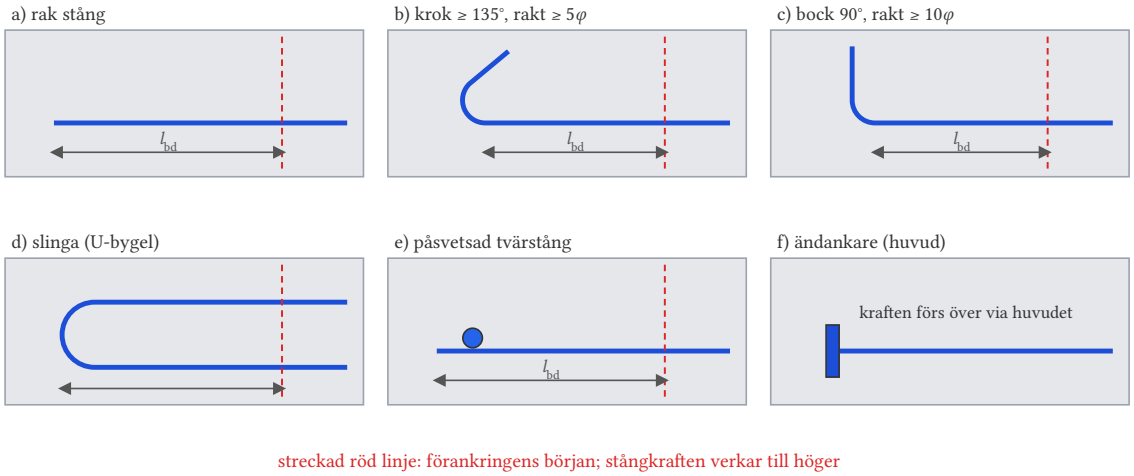
Vidhäftningen beror på var stången ligger när betongen gjuts. Under horisontella stänger i den övre delen av en gjutning samlas vattenseparation och luft, och den färska betongen sätter sig och lämnar en svag zon under stången. Betongen närmast gjutytan är dessutom porösare. EC2 räknar därför med **goda vidhäftningsförhållanden** för stänger som lutar 45–90° mot horisontalplanet under gjutningen, och för flackare stänger som ligger högst 300 mm över formens botten eller minst 300 mm under gjutytan (11.4.2(4)). Övriga stänger har **dåliga vidhäftningsförhållanden**, se figur 3.58. I en balk med höjden 500 mm har alltså underkantsarmeringen goda och överkantsarmeringen dåliga förhållanden.



Figur 3.58 Zonen med dåliga vidhäftningsförhållanden (skrafferad) för stänger som lutar mindre än 45° under gjutningen, i ett element med varierande tjocklek. Omritad efter EC2 figur 11.4.

Krokar, bockar, påsvetsade tvärstänger och slingor

En stång kan också förankras genom att kraft förs över lokalt, via ett tryck mot betongen innanför en bock eller framför en påsvetsad tvärstång eller ett huvud. Den lokala förankringen tillgodoräknas genom att den raka förankringslängden enligt ekv. (3.65) minskas, se figur 3.59 och tabell 3.13. För bockar och krokar räknas c_d som för raka stänger, men även täckskiktet c_{yb} vinkelrätt mot bockens plan ingår (EC2 figur 11.6c). En godtycklig bock kan också räknas med hela längden längs stångens centrumlinje som förankringslängd (11.4.4(2)).



Figur 3.59 Förankringstyper: a) rak stång, b) standardkrok, c) 90° bock, d) slinga, e) påsvetsad tvärstång, f) ändankare. Förankringslängden räknas från förankringens början (streckad linje) till bockens början. Omritad efter EC2 figur 11.2 och 11.6.

Tabell 3.13 Reduktion av förankringslängden för andra förankringstyper än raka stänger (EC2 11.4.2(6) och 11.4.4–11.4.7).

Förankringstyp	Villkor	Förankringslängd
Standardkrok eller 90° bock, drag	krok ≥ 135° med rak del ≥ 5ϕ, bock med rak del ≥ 10ϕ	$l_{bd} - 15\phi \geq 10\phi$
Påsvetsad tvärstång, drag och tryck	en tvärstång $\phi_t \geq 0{,}6\phi$ (annars två), minst 50 mm innanför stödkanten	$l_{bd} - 15\phi \geq 5\phi$

Förankringstyp	Villkor	Förankringslängd
Slinga (U-bygel), drag	minsta bockningsdiameter	$l_{bd} - 20\phi \geq 10\phi$
Ändankare (huvud), drag	huvud $\phi_h \geq 3\phi$, $f_{ck} \geq 25$ MPa, $\phi \leq 25$ mm och avstånd enligt 11.4.7	ingen extra längd för $\sigma_{sd} = 435$ MPa
Rak stång, tryck	minst 5ϕ från stångänden till en fri yta	$l_{bd} - 15\phi \geq 10\phi$

Bockar och krokar hjälper inte i tryck: där räknas bara den första raka delen (11.4.4(3)). En rak tryckt stång får däremot tillgodoräkna att stångänden trycker mot betongen, om änden ligger tillräckligt långt från en fri yta.

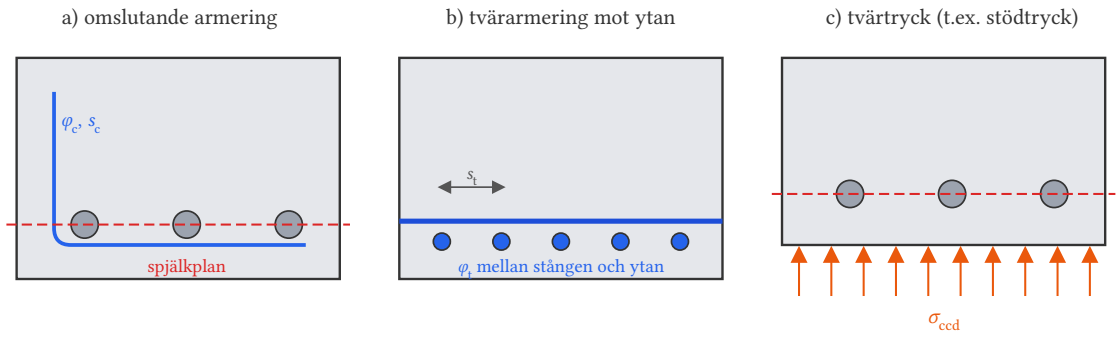
Omslutande armering och tvärtryck

Byglar som korsar det tänkta spjälkplanet, tvärstänger mellan stången och ytan, och ett tryck tvärs stången motverkar spjälkning, figur 3.60. I ekv. (3.65) beaktas det genom att c_d ersätts med ett större värde (11.4.2(5), formel (11.4)):

$$c_{d,conf} = \min\left\{ c_x;\, c_y + 25\,\frac{\phi_t^2}{s_t};\, \frac{c_s}{2};\, 3{,}75\phi \right\} + \Delta c_d \leq 6\phi \tag{3.67}$$

$$\Delta c_d = \left(70\,\rho_{conf} + \frac{12\,\sigma_{ccd}}{\sqrt{f_{ck}}} \right)\phi, \qquad \rho_{conf} = \frac{n_c\,\pi\phi_c^2}{4\,n_b\,\phi\,s_c} \tag{3.68}$$

Här är ϕ_t och s_t diameter och avstånd för tvärstänger mellan den förankrade stången och ytan, ϕ_c och s_c för omslutande armering som korsar spjälkplanet (högst 5ϕ från stången), n_c antalet skär genom spjälkplanet, n_b antalet förankrade stänger i planet och σ_{ccd} ett tryck vinkelrätt mot spjälkplanet. Den övre gränsen 6ϕ är utdragsbrottet: hur väl stången än hålls ihop kan inte betongen mellan kammarna bära mer.

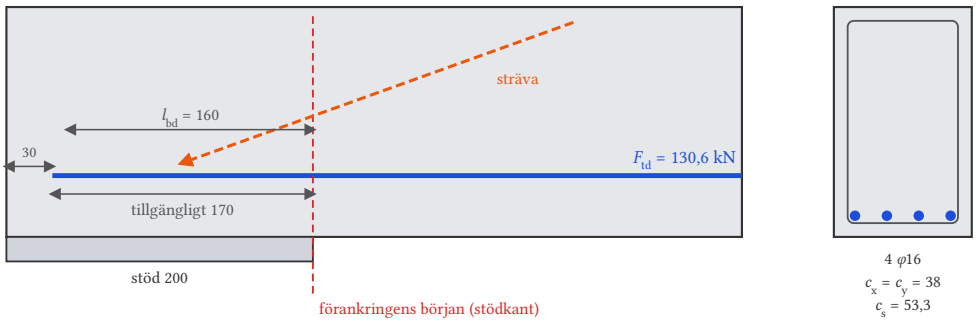


Figur 3.60 Fall där förankringslängden får minskas: a) omslutande armering som korsar spjälkplanet, b) tvärarmering mellan stången och ytan, c) tvärtryck, till exempel från ett stöd. Omritad efter EC2 figur 11.5.

Notera: Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar fortfarande till SS-EN 1992-1-1:2005 och gör inga val för förankringsreglerna i 2023-utgåvan; boken använder de rekommenderade värdena. Äldre kurslitteratur räknar enligt 2005-utgåvan med en vidhäftningshållfasthet $f_{bd} = 2{,}25\,\eta_1\eta_2 f_{ctd}$, ett grundvärde $l_{b,rqd} = (\phi/4)(\sigma_{sd}/f_{bd})$ enligt ekv. (3.64) och faktorerna α_1–α_5 för stångform, täckskikt, tvärarmering, påsvetsade stänger och tvärtryck. I 2023-utgåvan finns samma effekter kvar men i andra former: η_1 har blivit k_{cp}, α_2, α_3 och α_5 ingår i c_d och $c_{d,conf}$, och α_1 och α_4 har ersatts av avdragen i tabell 3.13.

Exempel 3.12 Förankringslängd vid ett ändstöd

Balken i exempel 3.11 har alla 4 ϕ16 dragna fram över stöden, och stängerna slutar 30 mm från balkens ände, som ligger i liv med stödets ytterkant. Stöden är 200 mm breda. Täckskiktet till byglarna är 30 mm och byglarna är ϕ8, se figur 3.61. Dragkraftsbehovet vid stödkanten är $F_{td} = 130{,}6$ kN (med $\cot\theta = 2{,}5$). Bestäm den förankringslängd som behövs bakom stödkanten och kontrollera om den ryms. Jämför med tabellvärdet.



Figur 3.61 Balkänden i exemplet: förankringen börjar vid stödets innerkant, där strävan från fältet möter armeringen. Till höger tvärsnittet med täckskikt och stångavstånd.

Förankringens början. Strävorna i fältet för ner tvärkraften till en nod över stödet, där den möter armeringen (EC2 8.5.4.3 och figur 8.28). Kraften F_{td} i stödkantens snitt måste vara förankrad bakom det snittet. Tillgänglig längd är stödbredden minus täckskiktet vid änden: $200 - 30 = 170$ mm.

Stålspänning. Kraften fördelas på fyra stänger med $A_s = 804$ mm²:

$$\sigma_{sd} = \frac{F_{td}}{A_s} = \frac{130{,}6 \cdot 10^3}{804} = 162 \text{ MPa}$$

Nominellt täckskikt. Täckskiktet till stängerna är $c_x = c_y = 30 + 8 = 38$ mm. Det fria avståndet mellan stängerna och ekv. (3.66) ger

$$c_s = \frac{300 - 2 \cdot 38 - 4 \cdot 16}{3} = 53{,}3 \text{ mm}$$

$$c_d = \min\{26{,}7;\ 38;\ 38;\ 60\} = 26{,}7 \text{ mm} = 1{,}67\phi$$

Vidhäftningsförhållanden. Stängerna ligger 46 mm över formens botten, alltså goda förhållanden: $k_{cp} = 1{,}0$.

Förankringslängd. ekv. (3.65) ger

$$l_{bd} = 50 \cdot 1{,}0 \cdot 16 \cdot \left(\frac{162}{435}\right)^{3/2} \left(\frac{25}{30}\right)^{1/2} \left(\frac{16}{20}\right)^{1/3} \left(\frac{24}{26{,}7}\right)^{1/2}$$

$$= 800 \cdot 0{,}228 \cdot 0{,}913 \cdot 0{,}928 \cdot 0{,}949 = 147 \text{ mm}$$

Det är mindre än minimivärdet $10\phi = 160$ mm, som därför gäller: $l_{bd} = 160$ mm.

Kontroll. $l_{bd} = 160 \text{ mm} \le 170$ mm, så raka stänger räcker, med liten marginal.

Jämförelse med tabellen. tabell 3.12 ger för ϕ16 i C30/37 $l_{bd} = 42\phi = 672$ mm, och formeln med det faktiska c_d och full spänning ger 643 mm. Tabellvärdet förutsätter att stången är fullt utnyttjad; här behöver bara 37 % av flytkraften förankras, och då räcker en fjärdedel av längden.

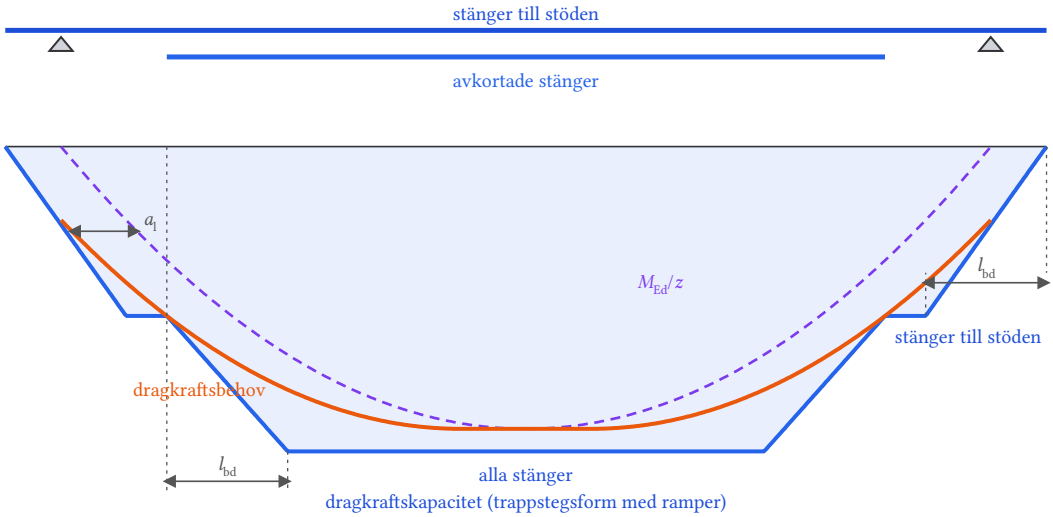
Med den spricklutning som byglarna medger ($\cot\theta = 1{,}0$, $F_{td} = 65{,}4$ kN) skulle formeln ge ännu kortare längd, men minimivärdet 10ϕ gäller ändå. Vid ändstöd blir det därför ofta 10ϕ som avgör när alla stänger dras fram till stödet. Avkortas hälften av stängerna räcker inte längre de 170 mm, se exempel 3.14.

3.12 Avkortning, förankring vid stöd och skarvning av armering

Med dragkraftsbehovet från avsnitt 3.10 och förankringslängden från avsnitt 3.11 kan armeringen nu läggas ut längs balken. Avsnittet visar hur kapaciteten anpassas till behovet genom avkortning, hur armeringen förankras vid ett ändstöd, vad man kan göra när förankringen inte får plats, och hur stänger skarvas.

3.12.1 Anpassning av dragkraftskapacitet till dragkraftsbehov

Dimensioneringsvillkoret ekv. (3.54) ska vara uppfyllt i varje snitt. Varje stånggrupp ger en kapacitet som är noll vid stängernas ände, växer linjärt över förankringslängden l_{bd} och därefter är konstant (figur 3.56). Summan över alla grupper ger en **trappstegsformad kapacitet med ramper**, som ska ligga utanför den förskjutna behovskurvan överallt, se figur 3.62 (EC2 12.3.2, figur 12.1). Rampernas längd är förankringslängden för full spänning, l_{bd} med $\sigma_{sd} = f_{yd}$ att kapaciteten antas variera linjärt inom den längden tillåts i 12.3.2(2).



Figur 3.62 Avkortning av underkantsarmering i en fritt upplagd balk. Kapaciteten (blå) växer över l_{bd} från varje stångände och ska täcka den förskjutna behovskurvan (orange) överallt. Omritad efter EC2 figur 12.1.

Var får de avkortade stängerna sluta? Låt F_{kvar} vara kapaciteten hos stängerna som fortsätter och F_{avk} den hos stängerna som avkortas. Där behovet $F_{td}(x)$ är större än F_{kvar} måste rampen från de avkortade stängernas ände räcka till: $F_{kvar} + F_{avk}(x - x_e)/l_{bd} \geq F_{td}(x)$. Stängerna får alltså sluta i

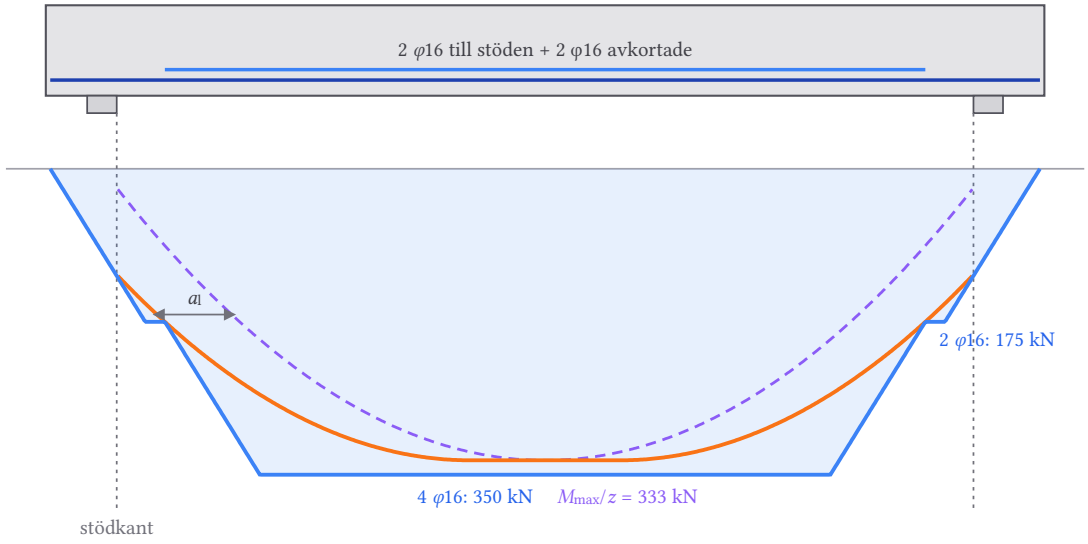
$$x_e = \min_x \left[x - l_{bd} \cdot \frac{F_{td}(x) - F_{kvar}}{F_{avk}} \right] \tag{3.69}$$

där minimum tas över de snitt där $F_{td}(x) > F_{kvar}$ och x räknas från stödet mot fältet. Två fall är vanliga:

- Är rampen brantare än behovskurvan, $F_{avk}/l_{bd} \geq \mathrm{d}F_{td}/\mathrm{d}x$, gäller minimum i den punkt där behovskurvan når F_{kvar}. Stängerna får då sluta **just där** den förskjutna behovskurvan skär nivån F_{kvar}, och full kapacitet nås l_{bd} längre in. Det är det vanliga fallet för en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last.
- Är behovskurvan brantare, till exempel nära ett mellanstöd, måste stängerna fortsätta längre. Ett enkelt och säkert alternativ är då att låta stängerna nå full kapacitet där behovet når sitt maximum.

Stänger avkortas helst parvis och symmetriskt i tvärsnittet, och hörnstängerna, som byglarna ska omsluta, förs alltid hela vägen. Förankringsområden för olika grupper får överlappa; i ett snitt där flera grupper är under förankring adderas deras ramper. Över mellanstöd görs samma sak för överkantsarmeringen: momentkurvan förskjuts mot momentnollpunkterna, och överkantsstängerna har dåliga vidhäftningsförhållanden, $k_{cp} = 1{,}2$.

Figur 3.63 visar avkortningen för balken i exempel 3.11. Prova att ändra antalet avkortade stänger och spricklutningen, och se hur avkortningssnittet och förankringen vid stödet påverkas.



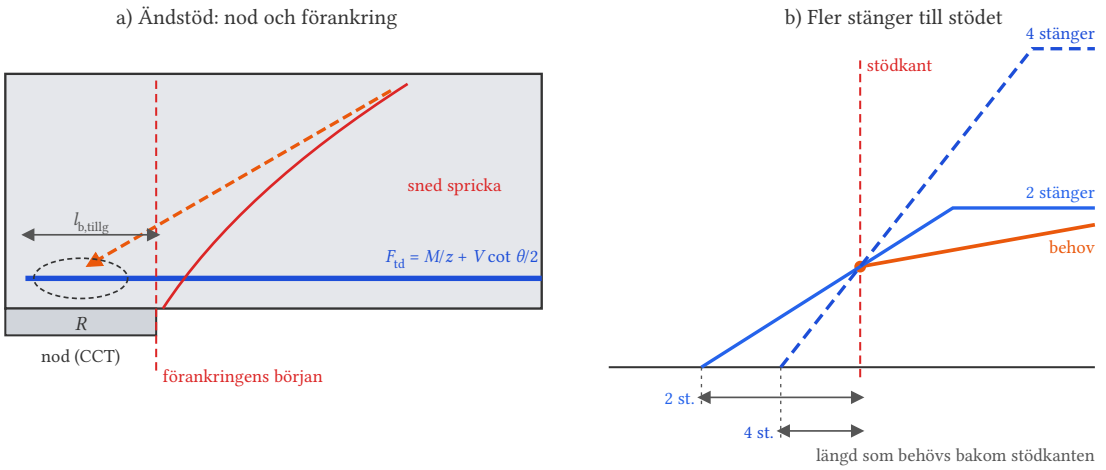
Figur 3.63 Avkortning av underkantsarmeringen i en fritt upplagd balk: dragkraftsbehov, trappstegsformad kapacitet med ramper över l_{bd}, och var kapaciteten inte räcker. Utgångsläget är exempel 3.14.

3.12.2 Förankring vid ändstöd

Vid ett fritt upplagt ändstöd är momentet litet, men dragkraftsbehovet är det inte. Den yttersta sneda sprickan börjar vid stödkanten, och strävorna för ner tvärkraften till en nod över stödet där de möter armeringen, figur 3.64a. Armeringen måste vara förankrad för kraften i stödkantens snitt, och förankringen räknas från **stödets innerkant** bakåt (EC2 11.4.1(6), 8.5.4.3, figur 8.28). Kraften är enligt ekv. (3.56)

$$F_E = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed}\cot\theta}{2} \approx \frac{V_{Ed}\cot\theta}{2} \tag{3.70}$$

där momentet vid stödkanten oftast är försumbart. Utan byglar används $V_{Ed}\,d/z$ i stället för den sista termen. Stängerna som dras fram till stödet ska förankras för F_E, antingen med den linjära kapacitetslinjen eller direkt med ekv. (3.65) och den spänning $\sigma_{sd} = F_E/A_s$ som F_E ger. Det senare ger en kortare längd, eftersom formeln tar hänsyn till att korta förankringar har högre medelvidhäftning; minimivärdet 10ϕ gäller i båda fallen.



Figur 3.64 a) Ändstöd: strävan möter armeringen i en nod över stödet, och förankringen räknas från stödets innerkant. b) Fler stänger fram till stödet ger en brantare kapacitetslinje och en kortare längd bakom stödkanten för samma dragkraft. Omritad efter EC2 figur 8.28 och kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B10.36.

Några regler till:

- Minst en fjärdedel av fältarmeringen, $0{,}25A_{s,fält}$, ska föras fram till ändstöd och till mellanstöd (EC2 tabell 12.1, rad 3–4). Vid mellanstöd ska underkantsarmeringen nå minst 10ϕ in över stödet (12.3.2(5)).
- En bock eller krok vid ett ändstöd får inte börja före nodens mitt, och bocken får inte ligga helt inom noden (8.5.4.3(2)).
- Antalet stänger som dras fram till stödet påverkar förankringen kraftigt, figur 3.64b: med dubbelt så många stänger halveras spänningen per stång, och med exponenten 3/2 i ekv. (3.65) minskar längden till drygt en tredjedel.

3.12.3 Åtgärder vid stora förankringsbehov

Vid ändstöd är det ofta trångt. Om den förankringslängd som behövs inte ryms finns två vägar: minska kraften som ska förankras, eller öka förankringskapaciteten. Tabell 3.14 sammanfattar åtgärderna och hur de kommer in i beräkningen enligt EC2:2023. Kolumnen längst till höger anger motsvarande faktor i den äldre metoden (avsnitt 3.11 Notera).

Tabell 3.14 Åtgärder när förankringen vid ett stöd inte ryms, och hur de beaktas.

Åtgärd	Verkan	EC2:2023	Äldre faktor
Fler byglar i fältet närmast stödet	brantare strävor, mindre F_E	cot θ ur ekv. (3.58), σ_{sd}	–
Fler stänger fram till stödet	lägre spänning per stång	σ_{sd} i ekv. (3.65)	–
Större täckskikt eller stångavstånd	starkare betongring mot spjälkning	c_d, ekv. (3.66)	α_2
Tvärarmering i förankringszonen	håller ihop betongen	$c_{d,conf}$, ekv. (3.67)	α_3
Stödtryck tvärs förankringen	motverkar spjälkning	σ_{ccd} i Δc_d	α_5
Påsvetsade tvärstänger	lokal förankring	-15ϕ, minst 5ϕ	α_4
Krok eller uppbockning	lokal förankring i bocken	-15ϕ, eller längd längs centrumlinjen	α_1
Slingor omlottskarvade med huvudarmeringen	lokal förankring i slingan	-20ϕ	α_1
Klenare stänger med samma area	kortare l_{bd}, som växer snabbare än ϕ	ϕ och $(\phi/20)^{1/3}$	–
Längre balkände eller bredare stöd	mer tillgänglig längd	–	–

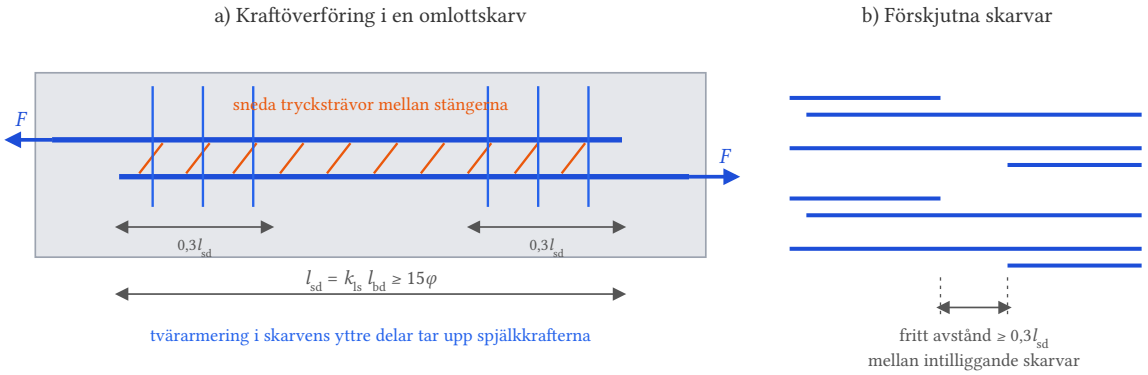
Observera att det är byglarna i fältet närmast stödet som bestämmer strävornas lutning vid stödkanten. När minimivärdet 10ϕ redan avgör hjälper varken fler byglar eller fler stänger; då återstår lokala förankringar, klenare stänger eller mer längd. Gynnsamma effekter av täckskikt, tvärarmering och tryck kan inte drivas hur långt som helst: $c_{d,conf} \le 6\phi$ motsvarar utdragsbrottet, den övre gränsen för all förankring.

3.12.4 Omlottskarvning

Armeringsstänger levereras i begränsade längder, så de behöver ofta skarvas. Kraften kan föras över mellan två stänger genom **omlottskarvning** (*lap*), mekaniska skarvdon eller svetsning (EC2 11.5.1). Omlottskarven är vanligast. I den förs kraften över från den ena stången till den andra via betongen: sneda trycksträvor mellan stängerna, figur 3.65a. Strävornas tvärgående komponent trycker isär stängerna och ger dragspänningar i betongen omkring dem, med risk för spjälksprickor längs skarven, precis som vid förankring men med två stänger som spjälkar samtidigt. Därför är skarvlängden längre än förankringslängden och tvärarmeringen viktigare:

$$l_{sd} = k_{ls} \cdot l_{bd} \geq 15\phi, \qquad k_{ls} = 1{,}2 \tag{3.71}$$

(EC2 11.5.2(2), tabell 11.3), där l_{bd} räknas enligt ekv. (3.65) för spänningen σ_{sd} i stängerna och c_s är det fria avståndet mellan skarvparen (EC2 figur 11.10). En skarv av ϕ16 i C30/37 med $c_d \geq 1{,}5\phi$ och full spänning behöver alltså $l_{sd} = 1{,}2 \cdot 42\phi = 50\phi = 810$ mm.



Figur 3.65 a) Kraftöverföring i en omlottskarv via sneda trycksträvor; tvärarmeringen placeras i skarvens yttre delar. b) Förskjutna skarvar. Omritad efter EC2 figur 11.11 och 11.12.

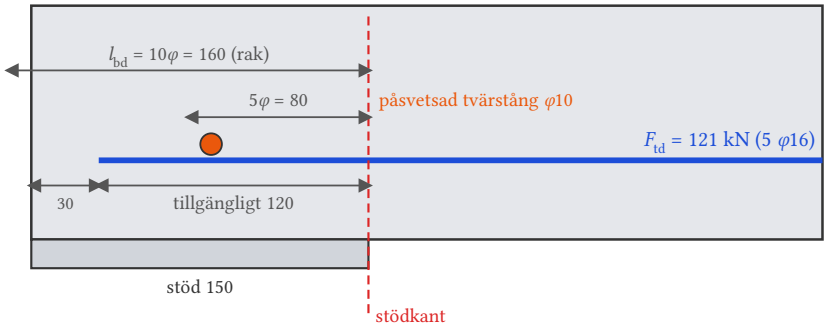
Reglerna för utformningen (EC2 11.5.2) i korthet:

- **Andel skarvade stänger.** Utanför områden som kan bli flytleder får alla dragna stänger skarvas i samma snitt, och skarvlängden räknas för σ_{sd}. Där flytleder kan uppstå krävs omslutande armering, eller förskjutna skarvar med högst 35 % av armeringen skarvad (50 % i plattor och väggar) och minst $0{,}3l_{sd}$ mellan skarvarna; annars räknas skarvlängden för $1{,}2\sigma_{sd}$. Tryckta stänger får alltid skarvas i samma snitt.
- **Avstånd.** Stängerna i en skarv bör ligga intill varandra. Är det fria avståndet större än $\min\{4\phi;\ 50\ \text{mm}\}$ ökas skarvlängden med centrumavståndet. Fritt avstånd mellan intilliggande skarvar ska vara minst $\max\{2\phi;\ 20\ \text{mm}\}$.
- **Tvärarmering.** För $\phi < 20$ mm, eller om mindre än 25 % av stängerna skarvas i snittet, räcker den tvär- eller bygelarmering som ändå krävs. Annars ska tvärarmering med sammanlagd area minst lika med en skarvad stångs area läggas vinkelrätt mot stängerna i skarvens yttre delar; skarvas mer än hälften av stängerna tätt intill varandra ska den utgöras av byglar som förankras i tvärsnittet. Vid tryckskarvar ska en tvärstång finnas nära vardera änden av skarven.

> **Obs:** Den äldre utgåvan av EC2 tillät att alla dragna stänger skarvades i samma snitt bara om de låg i ett lager, och högst hälften om de låg i flera lager. Enligt 2023-utgåvan är det i stället närheten till flytleder som avgör.

Exempel 3.13 Förankring vid ändstöd med kort upplag

En fritt upplagd balk med tvärsnittet 300 × 300 mm har spännvidden $L = 5{,}0$ m mellan stödens mitt och vilar på 150 mm breda stöd; balkänden ligger i liv med stödets ytterkant. Den bär $q_d = 32$ kN/m i brottgränstillståndet. Underkantsarmeringen är 5 ϕ16 B500B med $d = 256$ mm och täckskiktet 36 mm till stängerna i sidled och nedåt; stängerna slutar 30 mm från balkänden. Byglarna är tvåskäriga ϕ6 s180 B500B. Betongen är C20/25. Kontrollera om underkantsarmeringen kan förankras med raka stänger, och föreslå annars en åtgärd, se figur 3.66.



Figur 3.66 Balkänden i exemplet: 120 mm finns bakom stödkanten, men en rak stång behöver 160 mm. En påsvetsad tvärstång minskar behovet till 80 mm.

Böjning. Med $z = 0{,}9d = 230$ mm är $M_{Ed,max}/z = (32 \cdot 5{,}0^2/8)/0{,}230 = 434$ kN, och 5 ϕ16 ger $5 \cdot 201 \cdot 435 = 437$ kN. Alla stänger behövs i fältet och dras fram till stöden.

Snittkrafter vid stödkanten. Stödkanten ligger $x = 0{,}075$ m från stödets mitt:

$$V_{Ed} = 32 \cdot (2{,}5 - 0{,}075) = 77{,}6 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = \frac{32 \cdot 0{,}075 \cdot 4{,}925}{2} = 5{,}91 \text{ kNm}$$

Spricklutning. Med $A_{sw} = 2 \cdot 28{,}3 = 56{,}5$ mm² ger ekv. (3.58)

$$\cot\theta = \frac{V_{Ed}\, s}{z\, A_{sw}\, f_{ywd}} = \frac{77{,}6 \cdot 10^3 \cdot 180}{230 \cdot 56{,}5 \cdot 435} = 2{,}46$$

vilket ligger inom gränserna 1–2,5. Byglarna räcker alltså precis för tvärkraften.

Dragkraft vid stödkanten. ekv. (3.70) ger

$$F_E = \frac{5{,}91}{0{,}230} + \frac{77{,}6 \cdot 2{,}46}{2} = 25{,}7 + 95{,}6 = 121{,}3 \text{ kN}$$

$$\sigma_{sd} = \frac{121{,}3 \cdot 10^3}{5 \cdot 201} = 121 \text{ MPa}$$

Nominellt täckskikt. Det fria avståndet mellan stängerna är $c_s = (300 - 2 \cdot 36 - 5 \cdot 16)/4 = 37$ mm, och ekv. (3.66) ger $c_d = \min\{18{,}5;\ 36;\ 36;\ 60\} = 18{,}5$ mm. Det är det täta stångavståndet som avgör, inte täckskikten.

Förankringslängd. Goda vidhäftningsförhållanden, $k_{cp} = 1{,}0$. Ekv. (3.65) ger

$$l_{bd} = 50 \cdot 16 \cdot \left(\frac{121}{435}\right)^{3/2} \left(\frac{25}{20}\right)^{1/2} \left(\frac{16}{20}\right)^{1/3} \left(\frac{24}{18{,}5}\right)^{1/2}$$
$$= 800 \cdot 0{,}146 \cdot 1{,}118 \cdot 0{,}928 \cdot 1{,}139 = 138 \text{ mm} < 10\phi$$

så minimivärdet gäller: $l_{bd} = 10\phi = 160$ mm.

Kontroll. Bakom stödkanten finns $150 - 30 = 120$ mm < 160 mm. Raka stänger räcker inte.

Åtgärd. Eftersom minimivärdet 10ϕ avgör hjälper varken fler byglar eller lägre spänning. Välj en påsvetsad tvärstång ϕ10 under huvudstängerna ($\phi_t \geq 0{,}6\phi = 9{,}6$ mm), placerad 70 mm innanför stödkanten (minst 50 mm enligt EC2 11.4.5). Enligt tabell 3.13 blir då

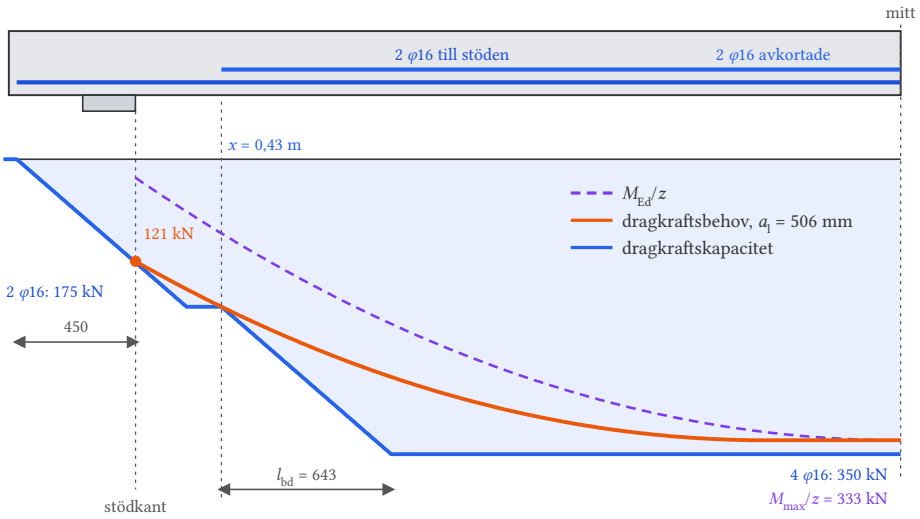
$$l_{bd} = \max\{138 - 15 \cdot 16;\ 5 \cdot 16\} = 80 \text{ mm} \leq 120 \text{ mm}$$

och förankringen ryms.

Alternativen är att förlänga balken 40 mm förbi stödet, eller att bocka upp stängerna i änden och räkna förankringslängden längs stångens centrumlinje (11.4.4(2)), förutsatt att bocken börjar bakom nodens mitt, 75 mm innanför stödkanten. Kompendiets lösning med den äldre metoden kom till samma slutsats: med raka stänger ryms inte förankringen.

Exempel 3.14 Avkortning av en stånggrupp

I balken i exempel 3.11 och exempel 3.12 ska 2 av de 4 $\phi16$ avkortas; de två hörnstängerna dras fram till stöden. Använd $\cot\theta = 2{,}5$, $z = 405$ mm och $c_d = 26{,}7$ mm. Bestäm hur nära stöden de avkortade stängerna får sluta, och hur långt bakom stödkanten de genomgående stängerna då måste förankras. Resultatet visas i figur 3.67.



Figur 3.67 Halva balken i exemplet: förskjuten behovskurva och trappstegsformad kapacitet när 2 $\phi16$ avkortas 0,43 m från stödets mitt och de genomgående stängerna förankras 450 mm bakom stödkanten.

Förankringslängd för full spänning. Från exempel 3.12, med $\sigma_{sd} = 435$ MPa: $l_{bd} = 643$ mm.

Kapaciteter. En stång bär $F_{sy} = 201 \cdot 435 = 87{,}5$ kN, så $F_{kvar} = F_{avk} = 2 \cdot 87{,}5 = 175$ kN.

Förskjutning. Från exempel 3.11: $a_l = 506$ mm.

Där behovet når de genomgående stängernas kapacitet. Den förskjutna behovskurvan är $M_{Ed}(x + a_l)/z$. Den når 175 kN där $M_{Ed}(\xi) = 175 \cdot 0{,}405 = 70{,}8$ kNm:

$$\frac{30\,\xi(6{,}0 - \xi)}{2} = 70{,}8 \Rightarrow \xi = 0{,}932 \text{ m}$$

$$x_1 = \xi - a_l = 0{,}932 - 0{,}506 = 0{,}426 \text{ m}$$

Rampens lutning. De avkortade stängernas kapacitet växer med $F_{avk}/l_{bd} = 175/0{,}643 = 272$ kN/m, medan behovskurvan i x_1 växer med

$$\frac{V_{Ed}(\xi)}{z} = \frac{30 \cdot (3{,}0 - 0{,}932)}{0{,}405} = 153 \text{ kN/m} < 272 \text{ kN/m}$$

Rampen är brantare än behovet, så enligt ekv. (3.69) får stängerna sluta i $x_e = x_1 = 0{,}43$ m från stödets mitt. De avkortade stängerna blir $6{,}0 - 2 \cdot 0{,}43 = 5{,}15$ m långa.

Förankring vid stödet. Med förskjutningsmetoden är behovet vid stödkanten $M_{Ed}(0{,}606)/z = 121$ kN, och det ska nu bäras av två stänger. Med den linjära kapacitetslinjen behövs bakom stödkanten

$$l = l_{bd} \cdot \frac{F_E}{F_{kvar}} = 643 \cdot \frac{121}{175} = 445 \text{ mm}$$

och direkt med ekv. (3.65) och $\sigma_{sd} = 121 \cdot 10^3 / 402 = 301$ MPa

$$l_{bd} = 643 \cdot \left(\frac{301}{435}\right)^{3/2} = 643 \cdot 0{,}576 = 370 \text{ mm}$$

Båda är mycket mer än de 170 mm som finns.

Åtgärd. Med standardkrokar eller 90° bockar i ändarna ger tabell 3.13 $l_{bd} = \max\{370 - 15 \cdot 16;\ 10 \cdot 16\} = 160 \text{ mm} \leq 170$ mm. Andelen stänger vid stöden är 50 %, mer än minimikravet 25 %.

Avkortningen sparar ungefär 2 m $\phi 16$ per balk, men kräver krokar på de genomgående stängerna, eftersom förankringen vid stödet blir kritisk när hälften av stängerna tas bort; med alla fyra stängerna raka till stöden räckte 160 mm (exempel 3.12). För en kort balk med jämnt utbredd last är vinsten liten, vilket är typiskt: avkortning lönar sig främst i långa balkar och i element som tillverkas i många exemplar. Samma fall kan studeras i figur 3.63.

4 Knäckning

Allmänt

4.1 Pelare och knäckning

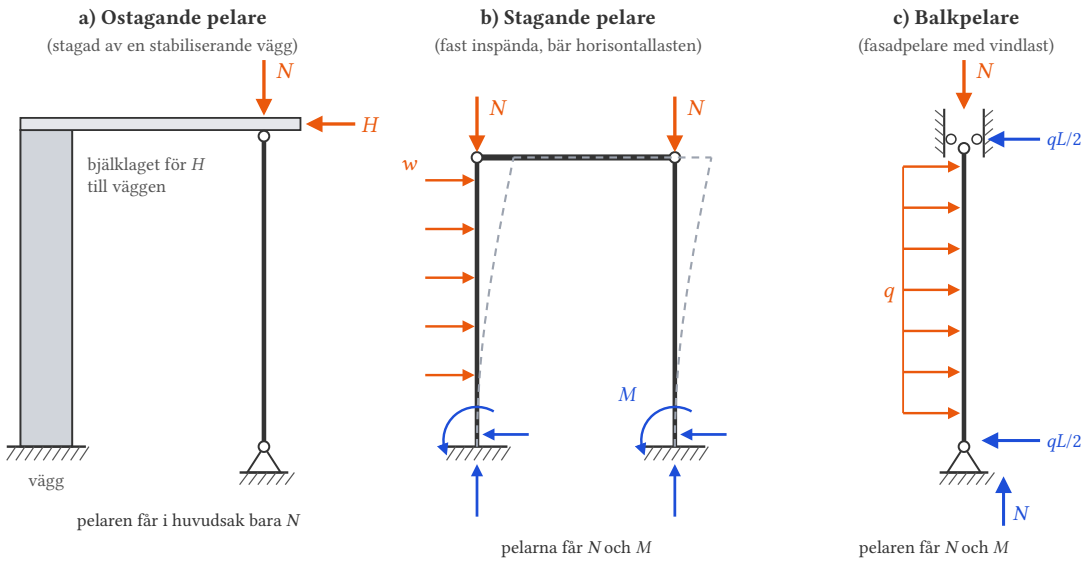
En pelare bär främst tryckande normalkraft. Är den slank kan den förlora stabiliteten och böja ut åt sidan, **knäcka** (*flexural buckling*), vid en last som är lägre än den som tvärsnittet själv klarar. Det här avsnittet är gemensamt för alla material: det beskriver olika typer av pelare, den ideala pelaren och Eulers knäcklast, hur randvillkoren påverkar knäcklängden, slankhet och knäckkurvan, och varför verkliga pelare bär mindre än den ideala. Hur utböjning och imperfektioner ger moment i pelaren behandlas i avsnitt 4.2, och hur moment och normalkraft samverkar i tvärsnittet i avsnitt 4.3. Materialavsnitten bygger sedan på dessa begrepp.

> **Notera:** Bokens teckenkonvention räknar drag som positivt, så en tryckande normalkraft är negativ. I knäckningskapitlet betecknar N (och N_{Ed}) i stället **tryckkraftens storlek**, eftersom alla formler gäller tryck. Kvoter som N/N_{cr} är därmed positiva.

4.1.1 Pelartyper

Hur en pelare belastas beror på dess roll i bärverket, se figur 4.1:

- **Ostagande pelare** (*braced member*) bidrar inte till byggnadens stabilitet. Horisontella laster förs via bjälklagen till stabiliserande väggar, trapphus eller hisschakt, och pelaren hålls i sidled av dem. Pelaren är alltså själv stagad; i äldre kurslitteratur kallas den *avstyvad*. Den är ofta ledad i båda ändar och får i huvudsak normalkraft.
- **Stagande pelare** (*bracing member*) bidrar till stabiliteten, till exempel fast inspända pelare i en hallbyggnad som tar vindlasten. De böjs ut i sidled (svajar) och får både normalkraft och moment. I äldre kurslitteratur kallas de *icke avstyvade*.
- **Balkpelare** (*beam-column*) bär både normalkraft och en tvärlast, till exempel en fasadpelare med vindlast. Den verkar samtidigt som balk och som pelare.



Figur 4.1 Pelartyper. a) Ostagande pelare: bjälklaget för horisontallasten H till en stabiliserande vägg, och den ledade pelaren får i huvudsak bara normalkraft. b) Stagande pelare: fast inspända pelare bär vindlasten w och svajar (streckat); vid foten verkar vertikal och horisontell reaktion och ett inspänningsmoment. c) Balkpelare: ledad fasadpelare med normalkraft och vindlast q, med reaktionerna $qL/2$ vid ändarna.

Även en pelare som är tänkt att bära enbart normalkraft får moment, eftersom den aldrig är helt rak och lasten aldrig angriper exakt i tyngdpunkten. Det är skälet till att knäckning och interaktion mellan normalkraft och moment hör ihop; se avsnitt 4.2.

4.1.2 Den ideala pelaren

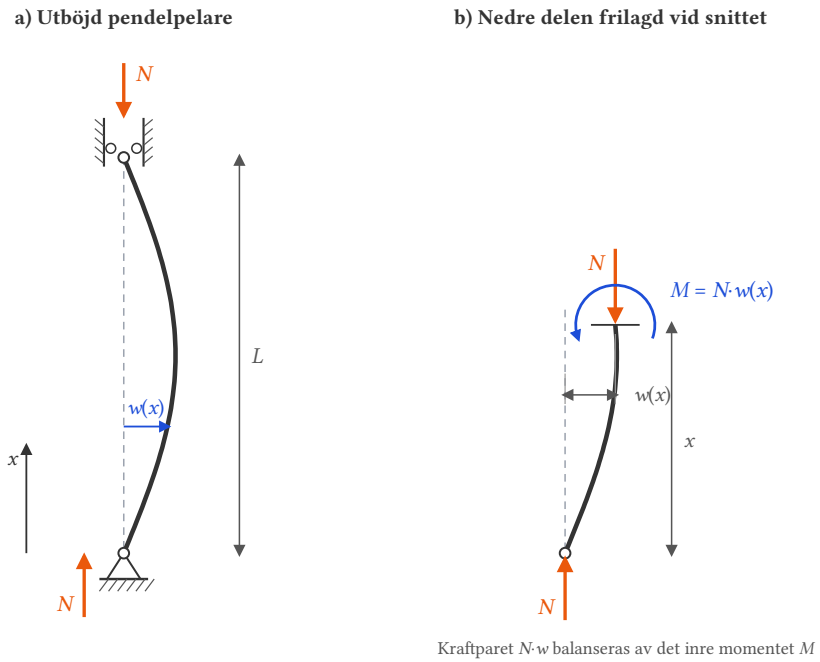
Knäckning beskrivs teoretiskt med en **ideal pelare**, som uppfyller följande antaganden:

1. Elasticitetsmodulen E är känd.
2. Materialet är ideal-elastiskt: spänningen är proportionell mot töjningen hur stor den än blir.
3. Pelaren är helt rak, utan imperfektioner.
4. Lasten angriper centriskt, i tvärsnittets tyngdpunkt.
5. Pelaren är spänningsfri i obelastat tillstånd (inga egenspänningar).

En sådan pelare finns inte i verkligheten, men den ger den kritiska last som verkliga pelare jämförs med, och den visar vilka storheter som styr knäckningen.

4.1.3 Eulers knäcklast

Betrakta en ideal, ledad pelare med längden L och böjstyvheten EI, en så kallad **pendelpelare**, som belastas av tryckkraften N, se figur 4.2. Den övre änden kan röra sig vertikalt men inte i sidled. Frågan är om pelaren kan vara i jämvikt i ett utböjt läge $w(x)$.



Figur 4.2 a) Ledad pelare (pendelpelare) i ett utböjt läge $w(x)$ under tryckkraften N. b) Pelarens nedre del frilagd vid snittet x: reaktionen N vid leden och normalkraften N i snittet bildar ett kraftpar med hävarmen $w(x)$, som balanseras av det inre momentet $M = N \cdot w(x)$.

Moment i ett snitt. Frilägg pelarens nedre del vid snittet x (figur 4.2b). Reaktionen vid leden och normalkraften i snittet är lika stora men förskjutna sidledes med $w(x)$. Momentjämvikt ger momentet i snittet:

$$M(x) = N \cdot w(x) \tag{4.1}$$

Elastiska linjens ekvation. Momentet krökar pelaren. Där pelaren böjer ut åt ena hållet är den krökt mot sin ursprungliga axel, så krökningen har motsatt tecken mot utböjningen:

$$EI \cdot w''(x) = -M(x) = -N \cdot w(x)$$

Med $k^2 = N/EI$ blir det en homogen differentialekvation:

$$w''(x) + k^2\, w(x) = 0, \qquad k^2 = \frac{N}{EI} \tag{4.2}$$

Lösning och randvillkor. Den allmänna lösningen är $w(x) = A \sin kx + B \cos kx$. Vid den nedre leden är $w(0) = 0$, vilket ger $B = 0$. Vid den övre leden är $w(L) = 0$:

$$A \sin kL = 0$$

Antingen är $A = 0$, och pelaren är rak, eller så är $\sin kL = 0$, det vill säga $kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Den minsta lasten för vilken ett utböjt läge är möjligt fås med $kL = \pi$.

Kritisk last. Med $k = \pi/L$ i ekv. (4.2) blir lasten $N = \pi^2 EI/L^2$. Allmänt, med knäcklängden L_{cr} (se nedan), är den kritiska lasten eller **Eulerlasten**

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} \tag{4.3}$$

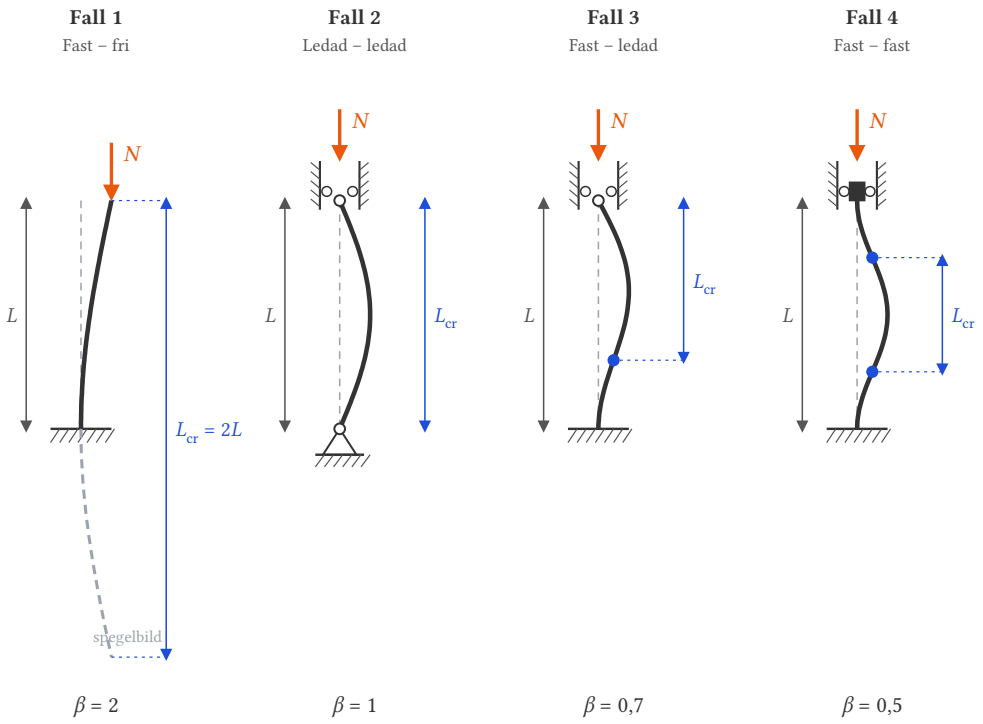
Vid $N < N_{cr}$ är det raka läget den enda jämviktsformen. Vid $N = N_{cr}$ är pelaren i jämvikt i en sinusformad utböjning $w = A \sin(\pi x/L)$ med godtycklig amplitud A: jämvikten är indifferent, och minsta störning får pelaren att böja ut. Det är knäckning. Teorin säger inte hur stor utböjningen blir; det kräver att imperfektionerna tas med, vilket görs i avsnitt 4.2.3. I EC3 och EC5 kallas N_{cr} den elastiska kritiska normalkraften (*elastic critical force*), EC3 8.3.1.2.

4.1.4 Knäcklängd och randvillkor

Härledningen gäller en ledad pelare. För andra randvillkor blir utböjningsformen en annan, men den innehåller alltid en del som ser ut som en halv sinusvåg mellan två **inflexionspunkter**, där krökningen och därmed momentet är noll. Avståndet mellan dem är **knäcklängden** L_{cr} (*buckling length* i äldre litteratur l_0), och ekv. (4.3) gäller med den. Knäcklängden skrivs

$$L_{cr} = \beta \cdot L \tag{4.4}$$

där β beror på randvillkoren. De fyra grundfallen, **Eulers knäckfall**, visas i figur 4.3. En pelare som är fast inspänd i foten och fri i toppen (fall 1) motsvarar halva en ledad pelare med längden $2L$, och knäcker därför vid en fjärdedel av den ledade pelarens last. En pelare som är fast inspänd i båda ändar (fall 4) har inflexionspunkter på $L/4$ från ändarna och klarar fyra gånger så mycket.



Figur 4.3 Eulers fyra knäckfall med utböjningsform, knäcklängd $L_{cr} = \beta L$ och teoretiskt värde på β. Övre ände med rullar mellan två väggar: fri att röra sig vertikalt men hållen i sidled; fylld kvadrat: dessutom hindrad att rotera. I fall 1 visar den streckade spegelbilden att pelaren är halva en ledad pelare med längden $2L$.

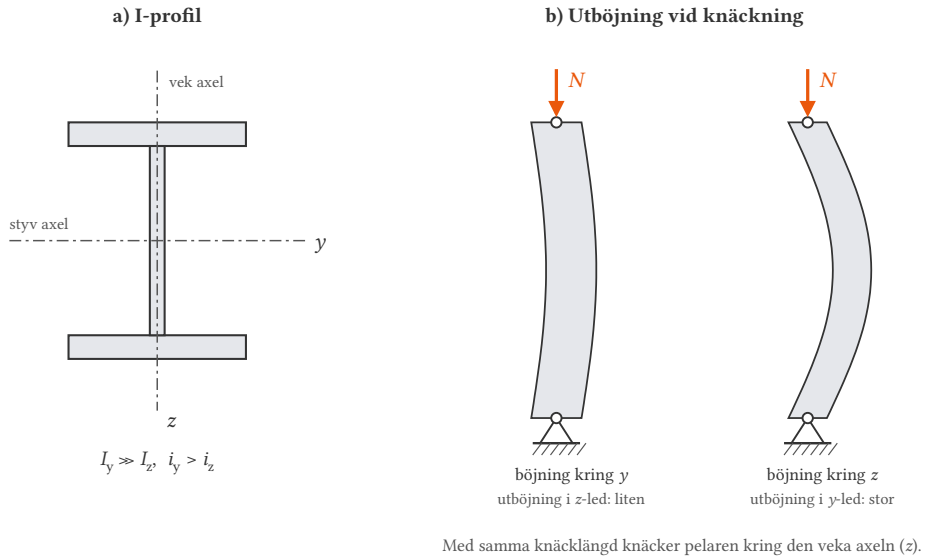
De teoretiska värdena i figur 4.3, $\beta = 2\ 1\ 0{,}7$ och $0{,}5$, förutsätter att en led inte har någon rotationsstyvhet alls och att en fast inspänning är oändligt styv. Verkliga upplag är aldrig helt fast inspända eller helt fria att rotera, och därför används för varje material praktiska värden som anges i materialavsnitten: för trä i Praktiska knäcklängder, för stål i avsnitt 4.6.5 och för betong i avsnitt 4.8.3, där EC2 ger knäcklängden ur inspänningarnas styvhet.

I ramar och andra system där pelarna samverkar beror knäcklängden på hela systemets styvhet. Allmänt kan den definieras från systemets kritiska last som $L_{cr} = \pi\sqrt{EI/N_{cr}}$: längden hos en ledad pelare med samma EI och samma kritiska last. Två tumregler: i en **stagad** ram (där pelarna hålls i sidled) är $L_{cr} \leq L$, så $L_{cr} = L$ ligger på säker sida. I en **ostagad** ram, där pelarnas toppar kan förskjutas i sidled, är $L_{cr} \geq L$ och kan bli större än $2L$ om förbanden är veka; då behövs en analys av ramen.

4.1.5 Böjstyvhet och vek riktning

Enligt ekv. (4.3) är knäcklasten proportionell mot böjstyvheten EI och omvänt proportionell mot knäcklängden i kvadrat. Ett styvare material, ett tvärsnitt med större tröghetsmoment eller en kortare knäcklängd ger högre knäcklast: en pelare med stor EI i förhållande till längden är **oslank**, en med liten är **slank**.

Ett tvärsnitt har två huvudaxlar, och tröghetsmomentet är olika stort kring dem, se figur 4.4. Med eurokodernas beteckningar är y den styva axeln och z den veka. Böjning kring y ger utböjning i z-led och tvärtom. En centriskt belastad pelare med samma knäcklängd i båda riktningarna knäcker kring den veka axeln, eftersom $N_{cr,z} < N_{cr,y}$. Båda riktningarna ska alltid kontrolleras, och knäcklängden kan vara olika: en pelare kan till exempel vara stagad i den veka riktningen av väggreglar men inte i den styva.



Figur 4.4 a) I-profil med styv axel y och vek axel z. b) Samma ledade pelare sedd i de två utböjningsplanen: böjning kring y ger liten utböjning i z-led, böjning kring z stor utböjning i y-led.

Pelare placeras därför normalt så att ett avsiktligt moment, till exempel från en excentrisk last, verkar kring den styva axeln. Den veka riktningen får då bara oavsiktliga moment, men kan ändå bli avgörande för knäckningen.

4.1.6 Slankhet

Geometrin samlas i ett enda tal. **Tröghetsradien** (*radius of gyration*) är

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

och **slankhetstalet** (*slenderness*)

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} \tag{4.5}$$

Med $I = Ai^2$ i ekv. (4.3) blir den kritiska tryckspänningen

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{4.6}$$

Den beror alltså bara på E och slankhetstalet, oavsett tvärsnittets form. Slankhetstalet tar hänsyn till både geometri och randvillkor (genom L_{cr}), men inte till materialets hållfasthet.

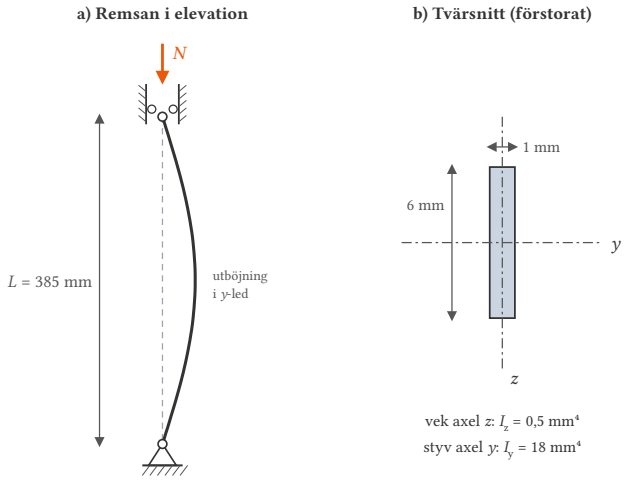
För att kunna jämföra pelare av olika material och hållfasthetsklasser används den **relativa slankheten**, som jämför tvärsnittets bärförmåga Af (för stål med $f = f_y$, för trä med tryckhållfastheten $f_{c,0,k}$) med Eulerlasten:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = \pi\sqrt{\frac{E}{f}} \tag{4.7}$$

Uttrycken är lika eftersom $Af/N_{cr} = f/\sigma_{cr} = f\lambda^2/(\pi^2 E) = (\lambda/\lambda_1)^2$. Talet λ_1 är det slankhetstal där Eulerspänningen precis når hållfastheten. Vid $\bar{\lambda} = 1$ är alltså Eulerlasten lika stor som tvärsnittets bärförmåga. EC3 skriver $\bar{\lambda}$ (EC3 8.3.1.2, ekv. (8.69)–(8.70)) och EC5 $\lambda_{c,rel}$ (EC5 8.2.2.2); för betong används i stället slankhetstalet λ direkt.

Exempel 4.1 Knäcklast för en tunn stålremsa

En tunn stålremsa med tvärsnittet 6×1 mm och längden $L = 385$ mm trycks ihop mellan två ändar som kan rotera fritt men inte förskjutas i sidled, se figur 4.5. Elasticitetsmodulen är $E = 200\,000$ MPa. Bestäm knäcklasten kring den veka och den styva axeln, den kritiska spänningen och slankhetstalet.



Figur 4.5 Remsan i exemplet: a) ledad i båda ändar, med knäckning i y-led (kring den veka axeln z), b) tvärsnittet 6×1 mm med tröghetsmomenten kring de två axlarna.

Tröghetsmoment. Vid böjning kring den veka axeln z är tvärsnittets höjd i böjningsplanet 1 mm, kring den styva axeln y är den 6 mm:

$$I_z = \frac{6 \cdot 1^3}{12} = 0{,}500\text{mm}^4, \qquad I_y = \frac{1 \cdot 6^3}{12} = 18{,}0\text{mm}^4$$

Knäcklängd. Båda ändarna är ledade (Eulerfall 2), så $\beta = 1$ och $L_{cr} = L = 385$ mm enligt ekv. (4.4).

Knäcklast kring den veka axeln. ekv. (4.3) ger

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200\,000 \cdot 0{,}500}{385^2} = 6{,}66 \text{ N}$$

Knäcklast kring den styva axeln.

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 200\,000 \cdot 18{,}0}{385^2} = 240 \text{ N}$$

Slankhet. Tröghetsradien kring den veka axeln är $i_z = \sqrt{0{,}500/6} = 0{,}2887$ mm, och ekv. (4.5) ger

$$\lambda_z = \frac{L_{cr}}{i_z} = \frac{385}{0{,}2887} = 1\,334$$

Kritisk spänning. Med ekv. (4.6):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200\,000}{1\,334^2} = 1{,}11 \text{ MPa}$$

vilket stämmer med $N_{cr,z}/A = 6{,}66/6 = 1{,}11$ MPa.

Kontroll av antagandet. Euler förutsätter att materialet är elastiskt. Den kritiska spänningen 1,11 MPa är mycket lägre än stålets sträckgräns (flera hundra MPa), så remsan knäcker långt innan materialet flyter, och ekv. (4.3) gäller.

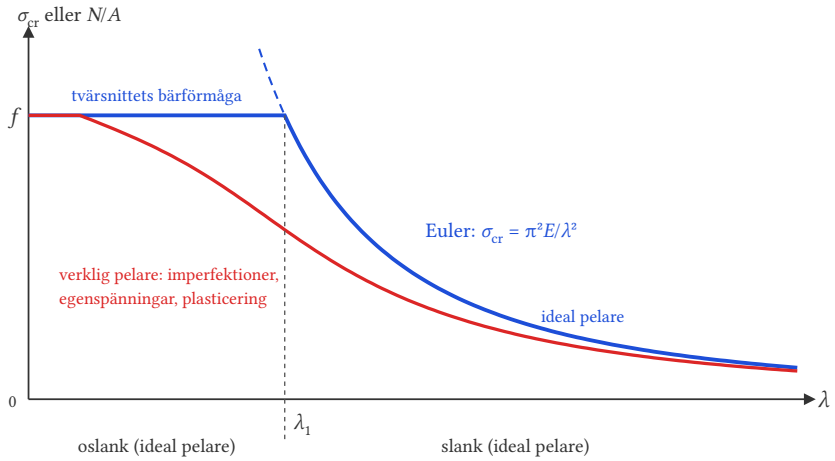
Remsan knäcker kring den veka axeln redan vid 6,7 N, motsvarande tyngden av knappt 0,7 kg; den kan alltså tryckas ut med fingrarna. Kring den styva axeln är lasten $(6/1)^2 = 36$ gånger större, eftersom tröghetsmomentet växer med tjockleken i kubik men arean bara linjärt.

4.1.7 Knäckkurva för den ideala pelaren

En ideal pelare kan inte bära mer än tvärsnittets bärförmåga Af, hur kort den än är. Dess bärförmåga är därför den minsta av Eulerlasten och Af, och uttryckt i spänning:

$$\frac{N_{max}}{A} = \min\left\{ f;\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \right\}$$

Det ger den **ideala knäckkurvan** i figur 4.6. För $\lambda < \lambda_1$ (relativ slankhet $\bar{\lambda} < 1$) avgör tvärsnittets bärförmåga, och pelaren är oslank; för $\lambda > \lambda_1$ avgör instabilitet, och bärförmågan avtar med slankheten i kvadrat. I normerad form, med $N_R = Af$, är kurvan $N_{max}/N_R = \min\{1;\ 1/\bar{\lambda}^2\}$, oberoende av material och hållfasthetsklass.



Figur 4.6 Knäckkurva: kritisk spänning som funktion av slankhetstalet λ. Ideal pelare (blått): tvärsnittets bärförmåga f upp till λ_1 och Eulers hyperbel $\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$ därefter. Verklig pelare (rött, schematiskt): lägre bärförmåga, mest nära λ_1. Indelningen i oslank och slank gäller den ideala pelaren.

4.1.8 Verkliga pelare

En verklig pelare uppfyller inte antagandena för den ideala pelaren:

- **Materialet är inte ideal-elastiskt.** Stål flyter vid f_y, och valsning och svetsning ger egenspänningar så att delar av tvärsnittet börjar flyta tidigare. Trä är inhomogent (kvistar, fiberstörningar) och icke-linjärt i tryck. Betong är icke-linjär, spricker i drag och kryper. Där materialet har flutit eller spruckit minskar styvheten, och därmed också den kritiska lasten.
- **Geometrin är inte perfekt.** Pelaren är något krokig (initialkrokighet) och något snedställd, och lasten angriper med en oavsiktlig excentricitet.

Följden är att pelaren börjar böja ut redan när lasten läggs på. Utböjningen ger moment, momenten ökar utböjningen, och brott inträffar vid en last som är lägre än både Eulerlasten och tvärsnittets bärförmåga. Skillnaden mot den ideala kurvan är störst nära $\bar{\lambda} = 1$, där både materialets hållfasthet och instabiliteten spelar in, och liten för mycket slanka pelare, där knäckningen i stort sett är elastisk.

Den verkliga bärförmågan beskrivs därför med en **reducerad knäckkurva**, den röda kurvan i figur 4.6. Den har tagits fram genom provning och beräkning för varje material och tvärsnittstyp och anges i eurokoderna: för trä som faktorn k_c (avsnitt 4.5) och för stål som reduktionsfaktorn χ (avsnitt 4.6). För betong används ingen knäckkurva; i stället beräknas momentet med andra ordningens effekter direkt (avsnitt 4.9). Hur imperfektionerna ger moment i pelaren, och varför det kan leda till instabilitet, visas i avsnitt 4.2.

4.2 Imperfektioner och andra ordningens moment

En verklig pelare är aldrig helt rak och lasten angriper aldrig exakt centriskt. Därför får även en pelare som bara belastas av normalkraft ett moment, och momentet växer när pelaren böjer ut. Det här avsnittet visar hur imperfektioner och utböjning ger första och andra ordningens moment, hur mycket momentet förstoras, och hur stabiliteten kan förstås som en jämvikt mellan ett yttre och ett inre moment. Avsnittet avslutas med de två metoder som används för att dimensionera pelare och vilken metod som används för vilket material.

4.2.1 Imperfektioner och excentricitet

En pelares axel avviker alltid något från den teoretiska: pelaren är lite krokig (**initialkrokighet**, *bow imperfection*), den står lite snett (**snedställning**, *inclination*) och lasten angriper en bit från tyngdpunkten (**oavsiktlig excentricitet**). Avvikelserna begränsas av utförandetoleranserna, och eurokoderna anger hur stora de ska antas vid dimensioneringen: EC2 7.2.1 som en snedställning θ_i och EC3 7.3.3 som en ekvivalent initialkrokighet e_0, som också ska täcka egenspänningar.

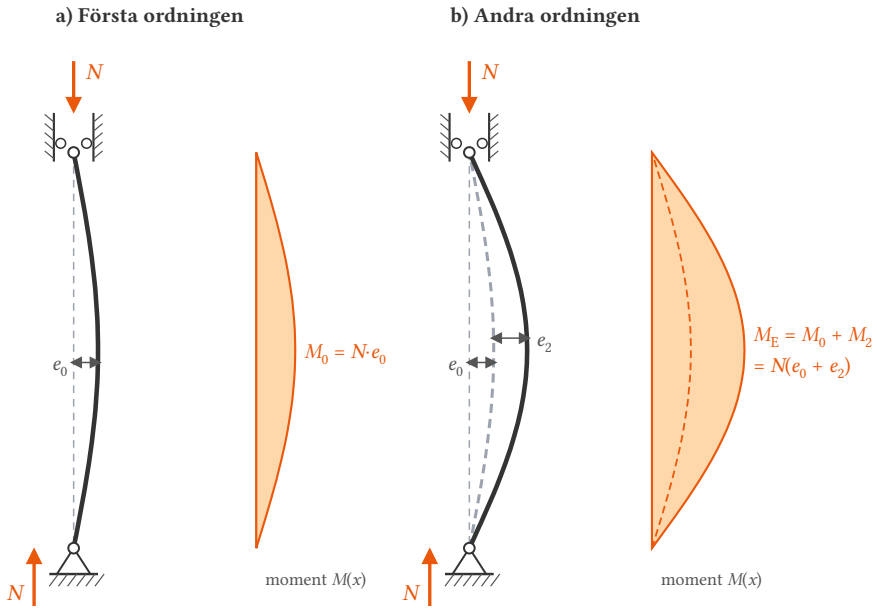
Till detta kommer **avsiktliga** moment: en last som läggs på en konsol med en excentricitet, ändmoment från en ram, eller en tvärlast på en balkpelare. För tvärsnittet spelar det ingen roll varifrån momentet kommer. Varje kombination av normalkraft N och moment M kan ersättas av normalkraften ensam, verkande med excentriciteten $e = M/N$.

I fortsättningen betecknar e_0 den **sammanlagda första ordningens excentriciteten** i pelarens kritiska snitt, alltså imperfektioner och eventuell avsiktlig excentricitet tillsammans. EC2 kallar imperfektionens bidrag e_i, liksom kursens bilder.

4.2.2 Första och andra ordningens moment

Momentet $N \cdot e_0$, beräknat på den odeformerade pelaren, är **första ordningens moment** M_0 (*first order moment*). När pelaren belastas böjer den ut ytterligare med **tillskottsutböjningen** e_2, och normalkraften får en större hävarm. Det tillskott till momentet som utböjningen ger är **andra ordningens moment** M_2 (*second order moment*), se figur 4.7. I pelarens kritiska snitt är det totala momentet

$$M_E = M_0 + M_2 = N \cdot e_0 + N \cdot e_2 = N\,(e_0 + e_2) \tag{4.8}$$



Streckat: rak systemlinje och, i b, den ursprungliga krokigheten och M_0.

Figur 4.7 Ledad pelare med initialkrokigheten e_0. a) Första ordningen: momentet räknas på den odeformerade pelaren, $M_0 = N \cdot e_0$ i mitten. b) Andra ordningen: lasten ger tillskottsutböjningen e_2, och momentet blir $M_E = N(e_0 + e_2)$ streckat i momentdiagrammet: M_0.

En beräkning där jämvikten ställs upp för den odeformerade konstruktionen kallas **första ordningens teori** när den ställs upp för den deformerade kallas den **andra ordningens teori**. För en oslank pelare är M_2 litet och kan försummas. För en slank pelare kan M_2 bli lika stort som M_0 eller större.

4.2.3 Förstoring av momentet

Tillskottsutböjningen beror på momentet, som i sin tur beror på utböjningen. För en ledad pelare med linjärt elastiskt material kan sambandet lösas exakt om både initialkrokigheten och tillskottsutböjningen antas vara sinusformade:

$$e_0(x) = e_0 \sin\frac{\pi x}{L}, \qquad e_2(x) = e_2 \sin\frac{\pi x}{L}$$

där e_0 och e_2 är värdena i mitten. Den krokiga pelaren antas vara spänningsfri innan den belastas.

Yttre moment. Lasten verkar på den totala excentriciteten, så det **yttre momentet** (lasteffekten) i mittsnittet är $M_E = N(e_0 + e_2)$ enligt ekv. (4.8).

Inre moment. Spänningarna i tvärsnittet beror bara på den krökning som lasten har gett, alltså på e_2, eftersom pelaren var spänningsfri i sin krokiga form. Krökningen i mitten är $e_2\pi^2/L^2$, och det **inre** (mothållande) momentet M_{in} blir

$$M_{in} = EI\,\frac{\pi^2}{L^2}\,e_2 = N_{cr} \cdot e_2 \tag{4.9}$$

med Eulerlasten N_{cr} från ekv. (4.3).

Jämvikt. Yttre och inre moment ska vara lika, $M_E = M_{in}$, det vill säga $N(e_0 + e_2) = N_{cr}\,e_2$. Det ger tillskottsutböjningen

$$e_2 = e_0 \cdot \frac{N/N_{cr}}{1 - N/N_{cr}} \tag{4.10}$$

Total excentricitet och moment. Summan $e_0 + e_2$ förenklas till

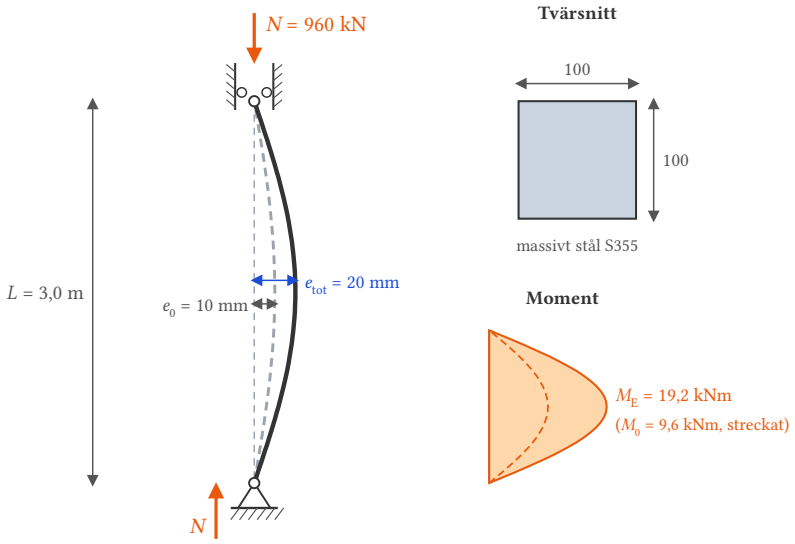
$$e_{tot} = \frac{e_0}{1 - N/N_{cr}}, \qquad M_E = \frac{M_0}{1 - N/N_{cr}} \tag{4.11}$$

Faktorn $1/(1 - N/N_{cr})$ är **förstoringsfaktorn** (*amplification factor*): den anger hur mycket andra ordningens effekter förstorar första ordningens excentricitet och moment. Vid $N = 0{,}5N_{cr}$ fördubblas momentet, och när N närmar sig N_{cr} växer det obegränsat, vilket stämmer med att den ideala pelaren knäcker vid N_{cr}.

Uttrycket är exakt för en ledad pelare med sinusformad initialkrokighet och en god approximation för en jämnt fördelad eller parabolisk momentkurva. För andra momentfördelningar, till exempel ett konstant ändmoment, ändras faktorn något; betongdelen använder en sådan justerad faktor (avsnitt 4.9).

Exempel 4.2 Förstoring av momentet i en ledad stålpelare

En ledad pelare med längden $L = 3{,}0$ m har ett massivt kvadratiskt tvärsnitt 100×100 mm av stål S355 ($f_y = 355$ MPa, $E = 210\,000$ MPa). Pelaren har en initialkrokighet $e_0 = L/300$ i mitten och belastas av den centriska tryckkraften $N = 960$ kN, se figur 4.8. Bestäm den totala excentriciteten och momentet i mittsnittet med andra ordningens effekter.



Figur 4.8 Pelaren i exemplet: ledad, $L = 3{,}0$ m, tvärsnitt 100×100 mm, initialkrokighet $e_0 = 10$ mm (streckad) och total utböjning $e_{tot} = 20$ mm vid $N = 960$ kN. Momentet i mitten fördubblas från $M_0 = 9{,}6$ kNm till $M_E = 19{,}2$ kNm.

Tvärsnitt. $A = 100^2 = 10\,000$ mm² och $I = 100^4/12 = 8{,}33 \cdot 10^6$ mm⁴. Initialkrokigheten är $e_0 = 3\,000/300 = 10$ mm.

Eulerlast. Ledad pelare ger $L_{cr} = L$, och ekv. (4.3) ger

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 8{,}33 \cdot 10^6}{3\,000^2} = 1\,919 \cdot 10^3 \text{ N} = 1\,919 \text{ kN}$$

Förstoringsfaktor. $N/N_{cr} = 960/1\,919 = 0{,}500$, så

$$\frac{1}{1 - N/N_{cr}} = \frac{1}{1 - 0{,}500} = 2{,}00$$

Total excentricitet. ekv. (4.11) ger

$$e_{tot} = \frac{e_0}{1 - N/N_{cr}} = 2{,}00 \cdot 10 = 20{,}0 \text{ mm}$$

och tillskottsutböjningen är $e_2 = 20{,}0 - 10 = 10{,}0$ mm, som ekv. (4.10) också ger.

Moment. Första ordningens moment är $M_0 = N\,e_0 = 960 \cdot 0{,}010 = 9{,}60$ kNm. Med ekv. (4.8):

$$M_E = N\,e_{tot} = 960 \cdot 0{,}0200 = 19{,}2 \text{ kNm}$$

varav andra ordningens moment är $M_2 = 9{,}60$ kNm.

Kontroll av antagandet. Förstoringsfaktorn förutsätter linjärt elastiskt material. Den största tryckspänningen, med $W_{el} = 100^3/6 = 166\,667$ mm³, är

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{N}{A} + \frac{M_E}{W_{el}} = \frac{960 \cdot 10^3}{10\,000} + \frac{19{,}2 \cdot 10^6}{166\,667} \\ &= 96{,}0 + 115 = 211 \text{ MPa} < 355 \text{ MPa}\end{aligned}$$

så tvärsnittet är elastiskt, och antagandet håller.

Vid halva Eulerlasten är andra ordningens moment lika stort som första ordningens. Initialkrokigheten $L/300$ är av samma storleksordning som de ekvivalenta imperfektioner som eurokoderna anger. Om tvärsnittet klarar kombinationen $N = 960$ kN och $M_E = 19{,}2$ kNm även med plastisk spänningsfördelning undersöks i exempel 4.3.

4.2.4 Stabilitet: yttre och inre moment

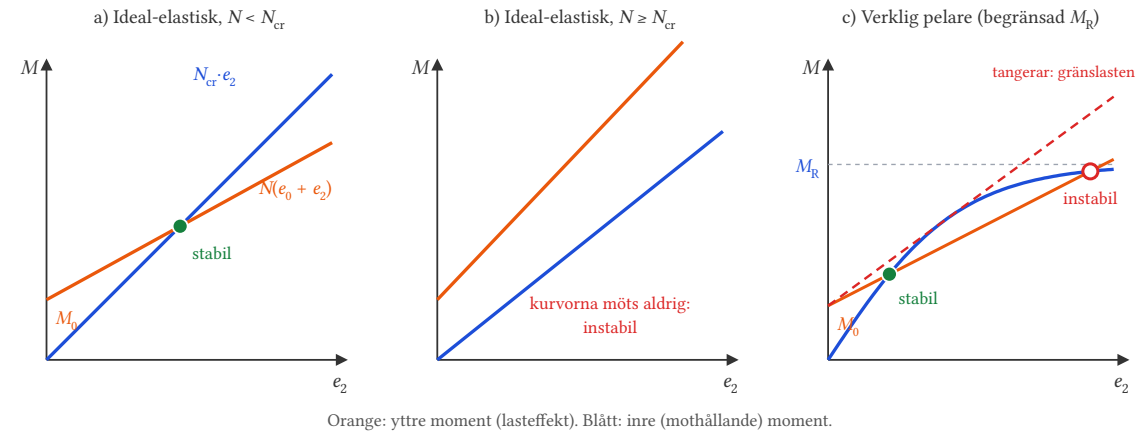
Sambanden ovan kan ses som en jämvikt mellan två moment i det kritiska snittet, båda som funktion av tillskottsutböjningen e_2:

- **Yttre moment** (lasteffekt), $M_E = N(e_0 + e_2)$: en rät linje som börjar i $M_0 = Ne_0$ och har lutningen N.
- **Inre moment** (mothållande moment), det moment som spänningarna i tvärsnittet ger för den krökning som utböjningen e_2 motsvarar.

Pelaren är i jämvikt där kurvorna möts. Jämvikten är **stabil** om det inre momentet växer snabbare än det yttre när utböjningen ökar ytterligare: en liten extra utböjning ger då ett överskott av mothållande moment som för pelaren tillbaka. Den är **instabil** om det yttre momentet växer snabbast. En pelare är alltså instabil om lasteffekten, med andra ordningens effekter, i varje utböjt läge är minst lika stor som den mothållande förmågan.

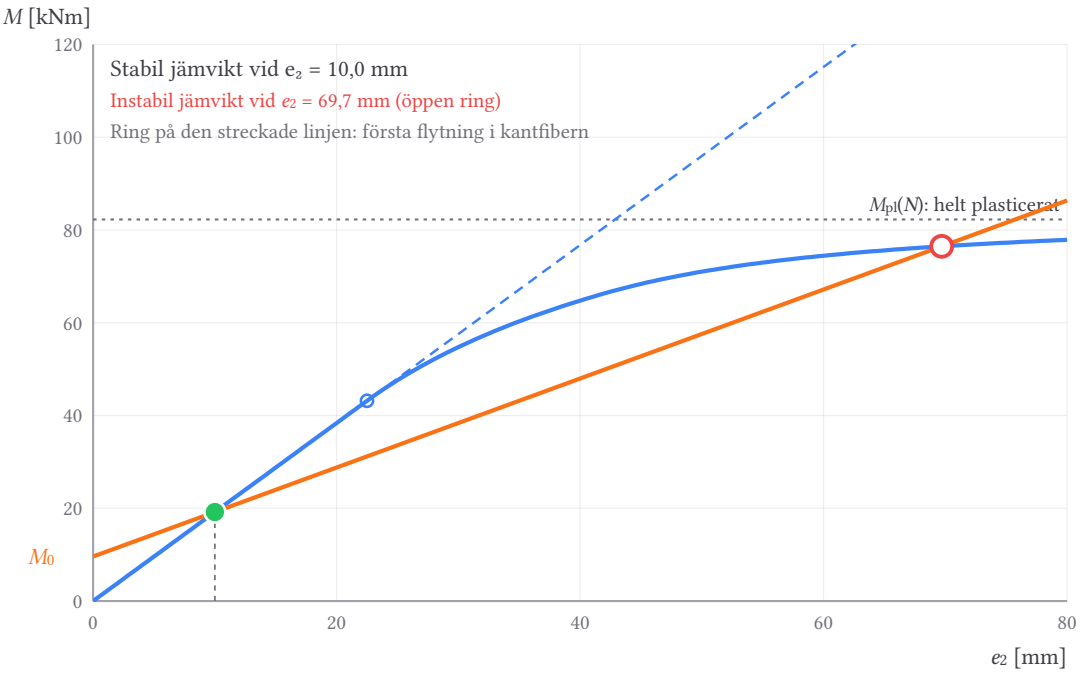
Ideal-elastisk pelare. Med linjärt elastiskt material är det inre momentet en rät linje genom origo med lutningen N_{cr} (ekv. (4.9)), se figur 4.9a–b. Så länge $N < N_{cr}$ är den brantare än lastlinjen, kurvorna möts i en stabil jämvikt, och skärningen ger ekv. (4.10). När N ökar mot N_{cr} flyttas skärningen allt längre ut, och vid $N \geq N_{cr}$ möts kurvorna aldrig: pelaren är instabil. För en helt rak pelare ($e_0 = 0$) sammanfaller linjerna vid $N = N_{cr}$, vilket är Eulers indifferenta jämvikt.

Verklig pelare. Tvärsnittets mothållande moment är begränsat. När kantfibrerna börjar flyta, eller betongen spricker, växer det inre momentet långsammare och närmar sig tvärsnittets momentkapacitet M_R, som dessutom minskar med normalkraften (avsnitt 4.3). Kurvorna kan då skära varandra två gånger, se figur 4.9c: den första skärningen är stabil, den andra instabil. Den största last för vilken en stabil jämvikt finns är den där lastlinjen precis tangerar den inre kurvan. Det är pelarens verkliga bärförmåga N_u, och den är lägre än både N_{cr} och tvärsnittets bärförmåga vid centriskt tryck.



Figur 4.9 Yttre moment (orange) och inre moment (blått) som funktion av tillskottsutböjningen e_2. a) Ideal-elastisk pelare med $N < N_{cr}$: linjerna möts i en stabil jämvikt. b) $N \geq N_{cr}$: det yttre momentet växer alltid snabbare, och pelaren är instabil. c) Verklig pelare med begränsat mothållande moment: en stabil och en instabil jämvikt; den streckade lastlinjen tangerar den inre kurvan och svarar mot pelarens bärförmåga.

Den interaktiva figur 4.10 räknar ut kurvorna för pelaren i exempel 4.2. Med ideal-elastiskt material finns en jämvikt ända upp till N_{cr}. Med elastiskt–idealplastiskt material (stål) planar den inre kurvan ut mot $M_{pl}(N)$, och för $e_0 = 10$ mm försvinner jämvikten vid $N_u \approx 1\,320$ kN, ungefär $0{,}69N_{cr}$ och $0{,}37Af_y$. Det ligger nära vad stålets reducerade knäckkurva ger för ett massivt tvärsnitt (avsnitt 4.6).



Figur 4.10 Yttre och inre moment i mittsnittet för pelaren i exempel 4.2. Ändra normalkraften, initialkrokigheten och materialmodellen och se när den stabila jämvikten (fylld punkt) försvinner. Den öppna ringen är den instabila jämvikten.

4.2.5 Två dimensioneringsmetoder

Andra ordningens effekter hanteras på ett av två sätt:

- **Förenklad metod med knäckkurva.** Bärförmågan vid centriskt tryck, Af, reduceras med en faktor som läses ur en knäckkurva som funktion av den relativa slankheten $\bar{\lambda}$ (ekv. (4.7)). Kurvan är kalibrerad mot provningar och beräkningar och innehåller imperfektioner, egenspänningar och andra ordningens

effekter indirekt; något moment M_2 beräknas aldrig. Finns även ett första ordningens moment, kontrolleras normalkraften (med reducerad bärförmåga) och momentet tillsammans i ett interaktionsvillkor.
- **Snittkraftsmetod** (andra ordningens teori). Det totala momentet $M_{Ed} = M_0 + M_2$ i det kritiska snittet beräknas uttryckligen, med en antagen imperfektion och en böjstyvhet som är rimlig för materialet (för betong reducerad för sprickbildning och krypning), till exempel med ekv. (4.11). Därefter kontrolleras att tvärsnittet klarar N_{Ed} tillsammans med M_{Ed}, se avsnitt 4.3.

I kursen används metoderna enligt tabell 4.1. För stål ger EC3 även en interaktionsmetod med faktorer k_{yy}, k_{yz} med flera (EC3 8.3.3), men den ingår inte i kursen.

Tabell 4.1 Dimensioneringsmetoder för pelare i kursen.

Material	Endast normalkraft	Normalkraft och moment	Avsnitt
Trä	knäckkurva (k_c)	knäckkurva (k_c) och interaktionsvillkor	Avsnitt 4.5
Stål	knäckkurva (χ)	snittkraftsmetod: M_{Ed} med andra ordningens moment, interaktion i tvärsnittet	Avsnitt 4.6, avsnitt 4.7
Betong	snittkraftsmetod	snittkraftsmetod: $M_{Ed} \le M_{Rd}$ vid N_{Ed}	Avsnitt 4.8, avsnitt 4.9

Oavsett metod gäller samma **dimensioneringsvillkor**: pelarens kritiska snitt ska klara det totala momentet, första plus andra ordningens, tillsammans med den samtidigt verkande normalkraften. Med knäckkurvan görs det indirekt, med snittkraftsmetoden direkt. Hur tvärsnittets förmåga att bära normalkraft och moment samtidigt ser ut för olika material visas i avsnitt 4.3.

> **Notera:** Kapitlet följer den nya generationen eurokoder: EN 1992-1-1:2023, EN 1993-1-1:2022 och EN 1995-1-1:2025, med rekommenderade värden. Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar ännu till de äldre utgåvorna, där samma metoder finns under andra avsnittsnummer: knäckning av stålpelare i EN 1993-1-1:2005 avsnitt 6.3, träpelare i EN 1995-1-1:2004 avsnitt 6.3 och andra ordningens effekter i betong i EN 1992-1-1:2004 avsnitt 5.8. Nationella val som påverkar pelare, till exempel partialkoefficienter, tas upp i materialavsnitten och i tabell 1.1.

4.3 Interaktion mellan normalkraft och moment

Pelarens kritiska snitt bär alltid normalkraft och moment samtidigt, och andra ordningens moment växer med normalkraften (avsnitt 4.2). Hur mycket moment tvärsnittet klarar beror därför på hur stor normalkraft som verkar samtidigt. Det här avsnittet beskriver sambandet med **interaktionsdiagram** och visar hur de skiljer sig för linjärt elastiskt material, elastiskt–idealplastiskt material och armerad betong. Skillnaderna förklarar varför materialavsnitten kontrollerar pelare på olika sätt.

4.3.1 Dimensioneringsvillkor

En pelare ska klara den dimensionerande normalkraften N_{Ed} tillsammans med det totala momentet i det kritiska snittet, första plus andra ordningens:

$$M_{Ed} = M_0 + M_2$$

Ett tvärsnitts förmåga att bära olika kombinationer av N och M beskrivs av ett **interaktionsdiagram** (*interaction diagram*): kurvan av alla kombinationer som precis ger brott. Kurvans ändpunkter är bärförmågan vid centriskt tryck, N_R, och vid ren böjning, M_R. Kombinationer innanför kurvan kan bäras; kombinationer utanför kan det inte. Momentkapaciteten är alltså ingen fast egenskap hos tvärsnittet, utan beror på den normalkraft som verkar samtidigt.

För en pelare med en given första ordningens excentricitet e_0 växer momentet med normalkraften. Utan andra ordningens effekter är lastvägen en rät linje, $M = Ne_0$. Med andra ordningens effekter växer momentet snabbare, enligt ekv. (4.11), och lastvägen böjer av mot momentaxeln. Den når därför interaktionskurvan vid en lägre normalkraft. Hur mycket lägre beror både på pelarens slankhet och på kurvans form, och formen beror på materialet.

4.3.2 Linjärt elastiskt material

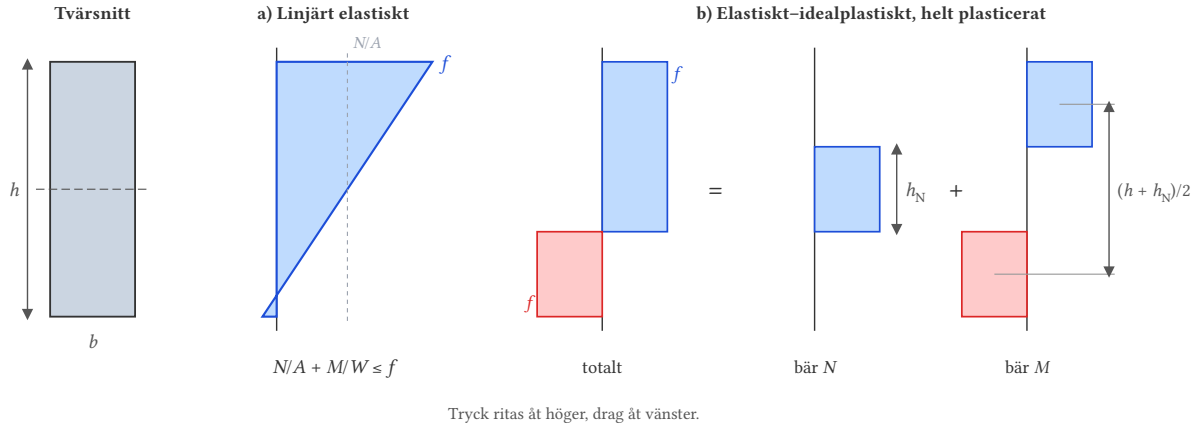
Om materialet är linjärt elastiskt och brott definieras som att den mest tryckta fibern når hållfastheten f, är spänningsfördelningen vid brott linjär, se figur 4.11a. Naviers formel ger kantspänningen, och villkoret blir

$$\frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq f$$

med N som tryckkraftens storlek. Division med f och $N_R = Af$, $M_R = Wf$ ger

$$\frac{N}{N_R} + \frac{M}{M_R} \leq 1 \tag{4.12}$$

Interaktionskurvan är en rät linje mellan N_R och M_R. Villkoret används till exempel för stål i tvärsnittsklass 3, där spänningen inte får överstiga f_y i någon fiber (EC3 8.2.9.2, ekv. (8.57)), och det är utgångspunkten för träets interaktionsvillkor (avsnitt 4.5).



Figur 4.11 Spänningsfördelning i ett rektangulärt tvärsnitt med tryckkraft och moment vid brott. a) Linjärt elastiskt material: den mest tryckta kanten når f. b) Elastiskt–idealplastiskt material, helt plasticerat: fördelningen delas upp i ett band med höjden h_N kring tyngdpunkten som bär normalkraften och två lika stora yttre band som bildar ett kraftpar med hävarmen $(h + h_N)/2$ och bär momentet. Tryck ritas åt höger, drag åt vänster.

4.3.3 Elastiskt–idealplastiskt material

Ett segt material som stål kan plasticeras helt innan det går till brott. Vid brott flyter då hela tvärsnittet, i tryck på ena sidan och i drag på den andra, se figur 4.11b. För ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h kan fördelningen delas upp i två delar:

Normalkraft. Ett tryckt band med höjden h_N kring tyngdpunkten bär normalkraften:

$$N = b\,h_N f \quad \Rightarrow \quad \frac{h_N}{h} = \frac{N}{bhf} = \frac{N}{N_{pl}}$$

Moment. De två yttre banden har vardera höjden $(h - h_N)/2$, det övre tryckt och det undre draget. Deras krafter är lika stora och bildar ett kraftpar med hävarmen $(h + h_N)/2$:

$$M = b\,\frac{h - h_N}{2}\,f \cdot \frac{h + h_N}{2} = \frac{bh^2 f}{4}\left(1 - \frac{h_N^2}{h^2}\right)$$

Interaktion. Med $M_{pl} = bh^2 f/4$ (se ekv. (1.9)) och $N_{pl} = bhf$ blir villkoret

$$\left(\frac{N}{N_{pl}}\right)^2 + \frac{M}{M_{pl}} \leq 1 \tag{4.13}$$

Det är samma uttryck som EC3 ger för ett massivt rektangulärt tvärsnitt i klass 1 och 2 (EC3 8.2.9.1, ekv. (8.44)). Kurvan är en parabel som ligger utanför den räta linjen: ett litet tryck minskar momentkapaciteten mycket lite, eftersom det tas av ett tunt band nära tyngdpunkten, där materialet bidrar lite till momentet.

För en I-profil böjd kring den styva axeln är effekten ännu tydligare, eftersom livet kan ta en stor del av normalkraften medan flänsarna bär momentet. EC3 ger en approximation för dubbelsymmetriska I- och H-profiler (EC3 8.2.9.1, ekv. (8.48)):

$$M_{N,y,Rd} = M_{pl,y,Rd}\,\frac{1-n}{1-0{,}5a} \le M_{pl,y,Rd}$$
$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}}, \qquad a = \frac{A-2bt_f}{A} \le 0{,}5 \tag{4.14}$$

där a är livets andel av arean. För små normalkrafter är momentkapaciteten oreducerad. Plastiska villkor förutsätter att tvärsnittet kan plasticeras utan att buckla lokalt, alltså tvärsnittsklass 1 eller 2 (avsnitt 1.4).

4.3.4 Armerad betong

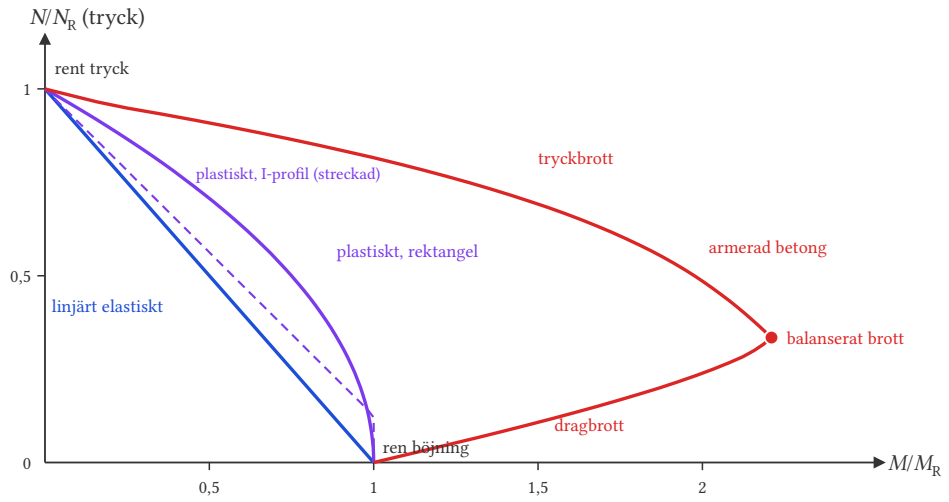
Ett armerat betongtvärsnitt har en icke-linjär interaktionskurva, eftersom betongen inte tål drag och armeringen bara verkar effektivt i drag när den flyter. Kurvan beräknas med samma tvärsnittsmodell som för böjning, men med normalkraften i jämviktsvillkoret (avsnitt 1.7.7): för en vald höjd på tryckzonen ger jämvikten ett par (N, M), och genom att variera tryckzonens höjd fås hela kurvan. Kurvan har tre delar:

- **Tryckbrott** (stora normalkrafter): betongen krossas på den tryckta sidan innan armeringen på den andra sidan flyter. Normalkraften är här ogynnsam; mer tryck ger lägre momentkapacitet.
- **Balanserat brott**: betongen krossas samtidigt som den dragna armeringen börjar flyta. Här är momentkapaciteten störst.
- **Dragbrott** (små normalkrafter): armeringen flyter innan betongen krossas. Tryckkraften är här gynnsam: den minskar den dragkraft som armeringen behöver ta, så tvärsnittet klarar ett större moment än vid ren böjning.

Att en tryckkraft kan öka momentkapaciteten innebär att en för stor antagen normalkraft kan ligga på osäker sida i dragbrottsområdet. Där bör den minsta normalkraft som samtidigt kan verka användas.

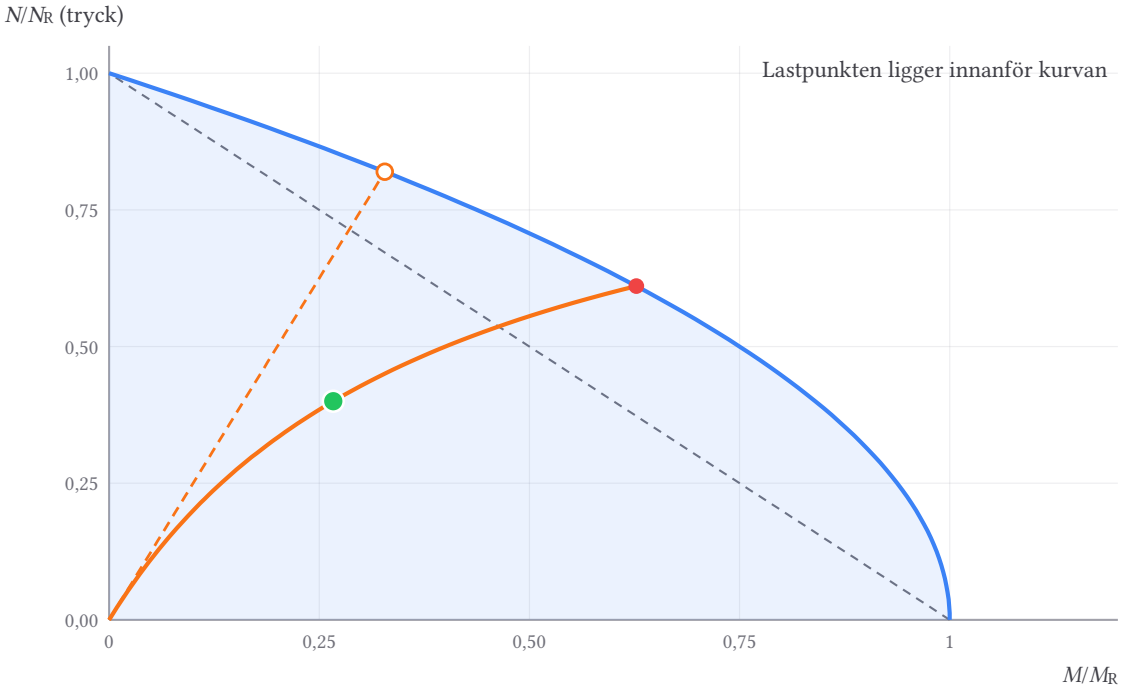
4.3.5 Jämförelse mellan materialen

Figur 4.12 visar de tre typerna av interaktionskurvor i normerad form, var och en med sitt eget tvärsnitts N_R och M_R. Den linjärt elastiska kurvan ligger innerst. Den plastiska ligger utanför och är nästan horisontell vid små normalkrafter för en I-profil. Betongens kurva buktar ut långt förbi M_R kring det balanserade brottet.



Figur 4.12 Normerade interaktionsdiagram: tryckkraft N/N_R mot moment M/M_R. Linjärt elastiskt material (ekv. (4.12)), elastiskt–idealplastiskt material för ett rektangulärt tvärsnitt (ekv. (4.13)) och för en I-profil med $a = 0{,}25$ (ekv. (4.14), streckad), samt armerad betong (300 × 300 mm, C30/37, 2 ϕ16 vid varje sida, beräknad med spänningsblocket).

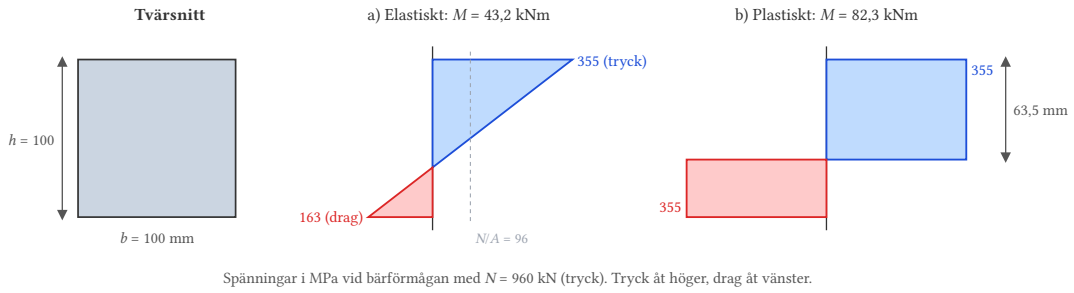
Formen påverkar hur andra ordningens moment slår igenom. I den interaktiva figur 4.13 kan lastvägen för en pelare med excentriciteten e_0 följas. I normerad form, med $n = N/N_R$ och $\bar{\lambda}^2 = N_R/N_{cr}$ (ekv. (4.7)), är förstoringsfaktorn $1/(1 - n\bar{\lambda}^2)$. Med $e_0 = 0{,}1h$ och $\bar{\lambda} = 1$ når lastvägen det plastiska rektangulära tvärsnittets kurva vid $n = 0{,}61$, mot 0,82 om andra ordningens moment försummas.



Figur 4.13 Interaktionsdiagram och lastväg för en pelare med första ordningens excentricitet e_0. Välj material, excentricitet, relativ slankhet $\bar{\lambda}$ och normalkraft. Den streckade lastvägen saknar andra ordningens moment; den heldragna har förstoringen $1/(1 - N/N_{cr})$. Ringen och den fyllda röda punkten markerar största normalkraft utan respektive med andra ordningens moment.

Exempel 4.3 Elastisk och plastisk interaktion för ett rektangulärt stålsnitt

Pelaren i exempel 4.2 har tvärsnittet 100 × 100 mm av stål S355 och belastas av $N_{Ed} = 960$ kN. Andra ordningens analys gav momentet $M_{Ed} = 19{,}2$ kNm i mittsnittet. Partialkoefficienten är $\gamma_{M0} = 1{,}0$ (tabell 1.1), så $f_{yd} = 355$ MPa. Bestäm det största moment som tvärsnittet kan bära tillsammans med N_{Ed}, dels med elastisk (ekv. (4.12)), dels med plastisk (ekv. (4.13)) interaktion, och kontrollera tvärsnittet.



Figur 4.14 Spänningar i tvärsnittet 100 × 100 mm vid bärförmågan med $N = 960$ kN. a) Elastiskt: kantspänningen når 355 MPa i tryck vid $M = 43{,}2$ kNm. b) Plastiskt: hela tvärsnittet flyter, tryckzonen är 63,5 mm hög och $M = 82{,}3$ kNm.

Bärförmåga vid rent tryck och ren böjning. Med $A = 10\,000$ mm², $W_{el} = 100^3/6 = 166\,667$ mm³ och $W_{pl} = 100^3/4 = 250\,000$ mm³ (ekv. (1.9)):

$$N_R = A f_{yd} = 10\,000 \cdot 355 = 3\,550 \text{ kN}$$

$$M_{R,el} = W_{el} f_{yd} = 59{,}2 \text{ kNm}, \qquad M_{pl} = W_{pl} f_{yd} = 88{,}8 \text{ kNm}$$

Relativ normalkraft.

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_R} = \frac{960}{3\,550} = 0{,}270$$

Elastisk interaktion. ekv. (4.12) löst för momentet:

$$M_{max,el} = M_{R,el}\,(1 - n) = 59{,}2 \cdot (1 - 0{,}270) = 43{,}2 \text{ kNm}$$

Plastisk interaktion. ekv. (4.13) löst för momentet:

$$M_{max,pl} = M_{pl}\,(1 - n^2) = 88{,}8 \cdot (1 - 0{,}270^2) = 82{,}3 \text{ kNm}$$

Det centrala bandet som bär normalkraften är $h_N = N_{Ed}/(b f_{yd}) = 960 \cdot 10^3/(100 \cdot 355) = 27{,}0$ mm, så tryckzonen är $(100 + 27{,}0)/2 = 63{,}5$ mm hög, se figur 4.14b.

Kontroll av antagandet. Plastisk interaktion kräver tvärsnittsklass 1 eller 2. Ett massivt tvärsnitt har inga tunna delar som kan buckla lokalt och kan räknas som klass 1, så båda villkoren får användas.

Kontroll. Utnyttjandegraden är

$$\frac{M_{Ed}}{M_{max,el}} = \frac{19{,}2}{43{,}2} = 0{,}44, \qquad \frac{M_{Ed}}{M_{max,pl}} = \frac{19{,}2}{82{,}3} = 0{,}23$$

och tvärsnittet klarar kombinationen med god marginal.

Vid denna normalkraft är den plastiska momentkapaciteten 1,9 gånger den elastiska; skillnaden består av formfaktorn $W_{pl}/W_{el} = 1{,}5$ och av att normalkraften reducerar den plastiska kapaciteten mindre ($1 - n^2$ mot $1 - n$). Hela pelarens bärförmåga avgörs ändå av stabiliteten, och vilken imperfektion som ska användas tillsammans med elastisk respektive plastisk kontroll anges i avsnitt 4.7.

Trä

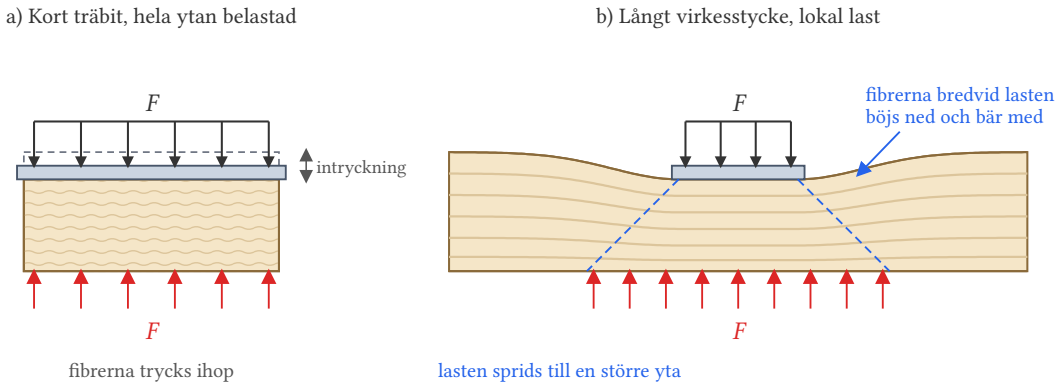
4.4 Trä: tryck vinkelrätt mot fibrerna (stämpeltryck)

En tryckkraft i en träkonstruktion förs nästan alltid vidare genom kontakt mellan två delar: en balk vilar på ett upplag, en pelare står på en syll eller ett hammarband, en regel trycker mot en syll. I kontaktytan belastas den ena delen **vinkelrätt mot fibrerna**, och där är träets tryckhållfasthet bara en tiondel av den längs fibrerna (tabell 1.2). Därför är det ofta kontakttrycket och inte själva pelaren som begränsar hur stor kraft som kan föras ned. Det här avsnittet visar hur trä beter sig i lokalt tryck vinkelrätt mot fibrerna (i kursen kallat **stämpeltryck**) och hur det kontrolleras enligt EC5 8.1.6. Tryck längs fibrerna och knäckning behandlas i avsnitt 4.5.

> **Notera:** Avsnitten om trä i det här kapitlet följer EN 1995-1-1:2025 (EC5) med rekommenderade värden. Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar ännu till EC5:2004. Partialkoefficienterna är desamma ($\gamma_M = 1{,}3$ för konstruktionsvirke och 1,25 för limträ, se tabell 1.1), men tre regler har ändrats. Tryck vinkelrätt mot fibrerna räknas med en ny spridningsmodell, se Obs-rutan i Faktorn kmat. Imperfektionsfaktorn för knäckning, β_c, beräknas nu ur imperfektionen i stället för att vara 0,2 respektive 0,1. Den faktor som tidigare hette k_m i interaktionen mellan tryck och böjning heter nu k_{red}, och k_m betecknar i stället vippningsfaktorn (avsnitt 4.5.4).

4.4.1 Verkningssätt

Trä kan beskrivas som ett knippe rör (fibrer) som löper längs stammen. Trycks en liten träbit vinkelrätt mot fibrerna över hela ytan, plattas rören till, se figur 4.15a. Det sker inget tydligt brott: först är sambandet mellan spänning och töjning ungefär linjärt, sedan börjar cellväggarna knäckas och deformationen växer snabbt, och när rören är helt hoptryckta blir materialet styvare igen. Hållfastheten vinkelrätt mot fibrerna, $f_{c,90,k}$, är därför definierad vid en viss töjning och inte vid ett brott.



Figur 4.15 Tryck vinkelrätt mot fibrerna. a) En kort träbit som belastas över hela ytan trycks ihop. b) I ett långt virkesstycke med en lokal last böjs även fibrerna bredvid lasten ned och bär med; lasten sprids till en större yta (stämpeltryckseffekt). Reaktionen från underlaget är ritad med röda pilar.

Belastas i stället bara en del av ett längre virkesstycke, som i figur 4.15b, kan fibrerna under lasten inte tryckas ned utan att dra med sig fibrerna bredvid. De obelastade fibrerna böjs ned och bär en del av lasten, ungefär som när en stämpel trycks ned i en stämpeldyna. Kraften sprids alltså ut i virket, och den lokala bärförmågan blir större än kontaktytan gånger hållfastheten. Det kallas **stämpeltryckseffekten**. Hur mycket den ger beror på hur långt kraften kan spridas: åt båda hållen längs fibrerna mitt i en balk, bara åt ett håll vid en ände och inte alls om hela virkesstycket är belastat.

4.4.2 Dimensionering enligt EC5

EC5 8.1.6.1, formel (8.5)–(8.6), kräver att tryckspänningen i den verkliga kontaktytan inte överskrider en förhöjd hållfasthet:

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{F_{c,90,d}}{A} \leq k_{mat} \cdot k_{c,90} \cdot f_{c,90,d} \tag{4.15}$$

där $F_{c,90,d}$ är den dimensionerande tryckkraften och $A = b_{90,c} \cdot l_{90,c}$ den yta som kraften verkar på: kontaktlängden $l_{90,c}$ längs fibrerna gånger kontaktbredden $b_{90,c}$ tvärs fibrerna. Är upplagsplåten bredare än balken är $b_{90,c}$ lika med balkens bredd b. Den dimensionerande hållfastheten $f_{c,90,d} = k_{mod} f_{c,90,k} / \gamma_M$ fås ur ekv. (1.4) med $f_{c,90,k}$ från tabell 1.2 eller tabell 1.3. De två faktorerna beskriver var sin effekt: $k_{c,90}$ den geometriska spridningen av kraften och k_{mat} hur stor intryckning som kan accepteras.

Kontaktarea och spridningsfaktor

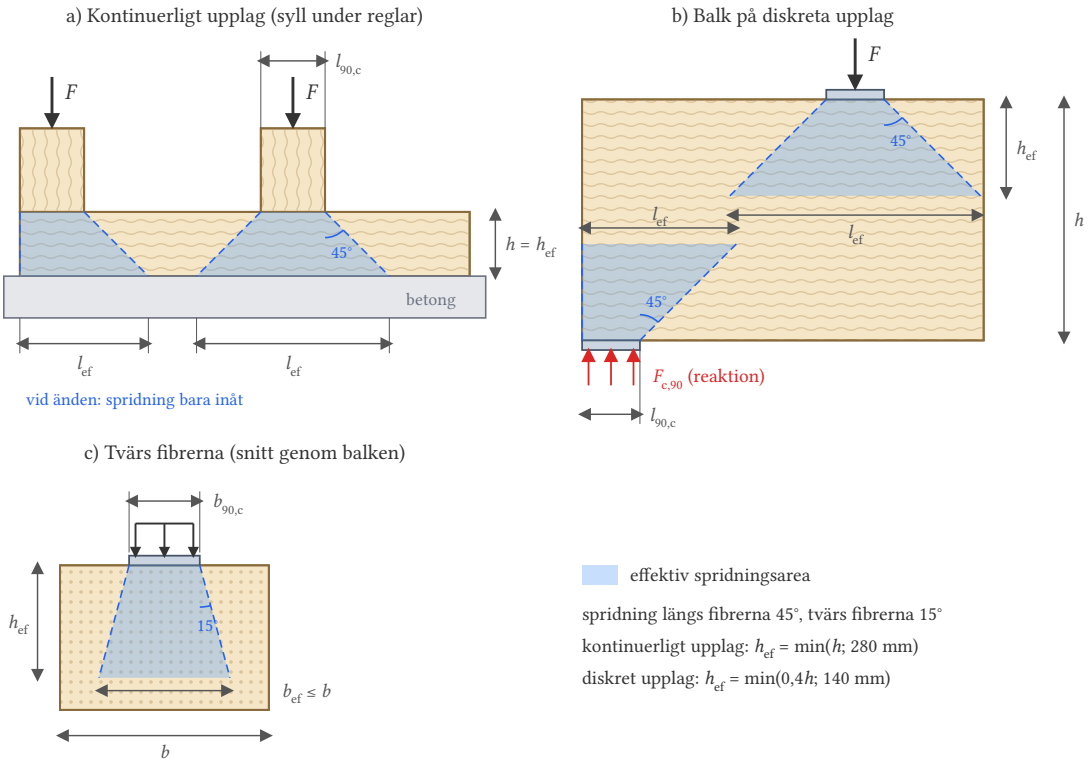
Spridningsfaktorn ges av förhållandet mellan den effektiva spridningsarean A_{ef} och kontaktarean (EC5 formel (8.7)–(8.8)):

$$k_{c,90} = \sqrt{\frac{A_{ef}}{A}} \leq 4{,}0, \qquad A_{ef} = b_{ef} \cdot l_{ef} \tag{4.16}$$

A_{ef} är den yta som kraften har spridits ut över på djupet h_{ef} under kontaktytan, se figur 4.16. För konstruktionsvirke och limträ sprids kraften med lutningen 45° längs fibrerna och 15° tvärs fibrerna (EC5 tabell 8.2). Det effektiva djupet beror på hur virkesstycket är upplagt (EC5 formel (8.10)–(8.11)):

$$h_{ef} = \begin{cases} \min\{h;\ 280\ \text{mm}\} & \text{kontinuerligt upplag} \\ \min\{0{,}4h;\ 140\ \text{mm}\} & \text{diskret upplag} \end{cases} \tag{4.17}$$

Ett **kontinuerligt upplag** är till exempel en syll som ligger på en betongplatta och belastas av reglar ovanifrån (figur 4.16a). Kraften kan då spridas genom hela höjden ned till underlaget. Ett **diskret upplag** är en balk som vilar på en plåt, en vägg eller en pelare, eller en sådan balk som belastas av en punktlast ovanifrån (figur 4.16b). Där är det bara en zon närmast kontaktytan som medverkar.



Figur 4.16 Effektiv spridningsarea vid tryck vinkelrätt mot fibrerna. a) Syll på kontinuerligt upplag: kraften sprids genom hela höjden, vid änden bara inåt. b) Balk på diskreta upplag: spridningen sker inom djupet h_{ef}, både vid upplaget och under en punktlast. c) Tvärs fibrerna sprids kraften med 15°, men högst till balkens bredd. Omritad efter EC5 figur 8.2 och 8.3.

Med spridningen 45° ökar den effektiva längden med h_{ef} på var sida om kontaktytan:

$$l_{ef} = l_{90,c} + \Delta l_1 + \Delta l_2, \qquad \Delta l_i = \min\{h_{ef};\ \text{fritt utrymme}\} \tag{4.18}$$

Det fria utrymmet är avståndet till virkesstyckets ände, eftersom kraften inte kan spridas ut i luften, eller halva det fria avståndet till nästa last eller upplag, om spridningszonerna annars skulle överlappa. Ligger kontaktytan precis vid änden är $\Delta l = 0$ på den sidan. På samma sätt blir $b_{ef} = b_{90,c} + 2h_{ef}\tan 15°$, dock högst virkets bredd b. När kontaktytan täcker hela bredden, vilket är det vanliga för balkar på upplag, är $b_{ef} = b_{90,c} = b$ och $k_{c,90} = \sqrt{l_{ef}/l_{90,c}}$.

Övre gränsen 4,0 innebär att spridningen aldrig får räknas upp mer än sexton gånger i area. Den har betydelse för mycket små kontaktytor, till exempel brickor under en bult.

Faktorn kmat

Faktorn k_{mat} beskriver hur stor intryckning som kan accepteras. Ju större deformation som tillåts, desto mer av träets kapacitet efter att cellväggarna börjat ge efter kan utnyttjas. EC5 tabell 8.1 delar in fallen efter vilken töjning (intryckning delad med h_{ef}) som motsvarar bärförmågan. Värdena för konstruktionsvirke och limträ återges i tabell 4.2.

Tabell 4.2 Faktorn kmat för konstruktionsvirke och limträ enligt EC5 tabell 8.1

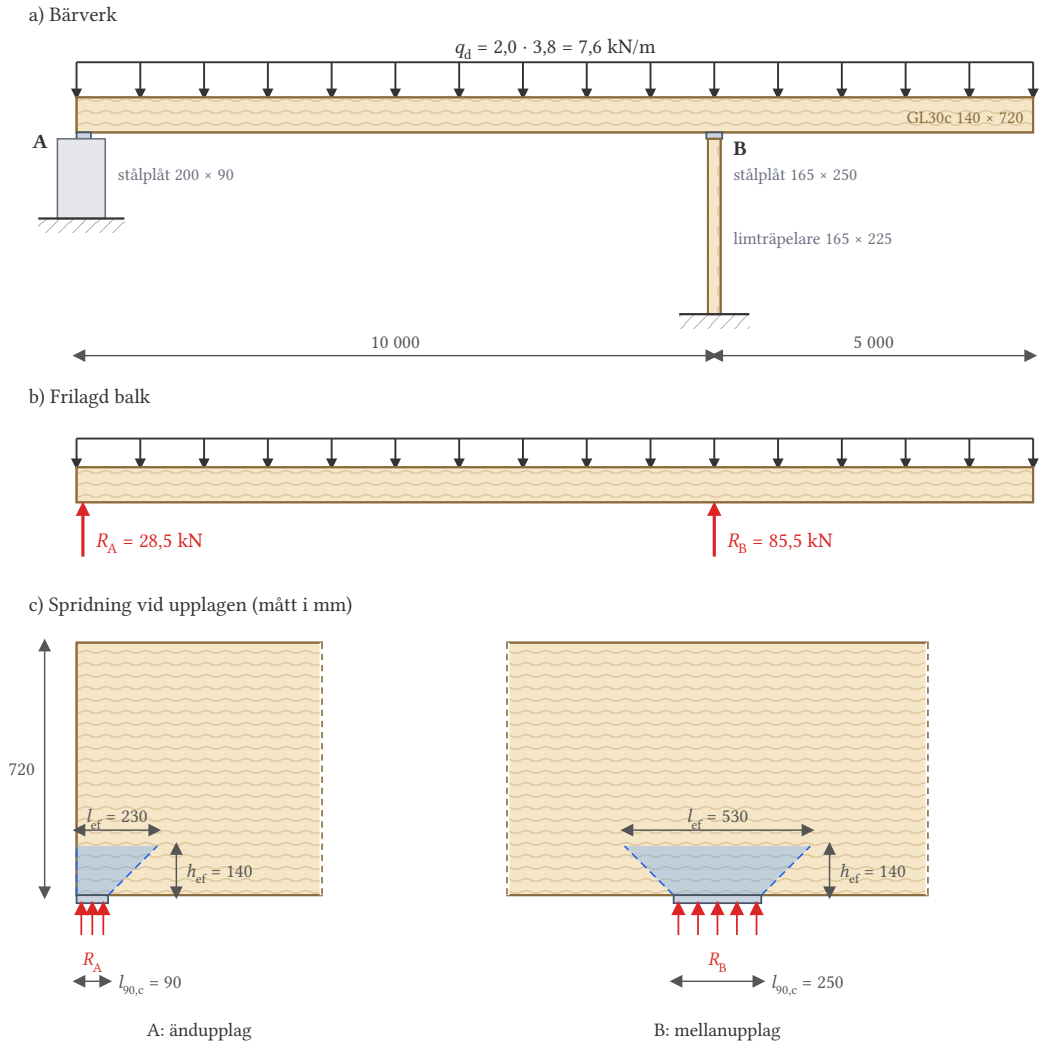
Fall	Ungefärlig töjning	k_{mat}	Används när
A	2,5 %	1,4	deformationen kan påverka stabiliteten eller skada andra delar; alltid om $h > 5b$
B	10 %	2,1	deformationen inte påverkar delens eller systemets stabilitet
C	20 %	2,7	dessutom inget fortskridande brott, t.ex. kontinuerligt upplagd del med $b \geq h$

Om tabellen inte används är $k_{mat} = 1{,}0$ (EC5 8.1.6.1(2)). Valet av fall avgörs alltså av vilka följder intryckningen får: kan den påverka stabiliteten eller skada andra delar gäller fall A, och först om intryckningen saknar betydelse för stabiliteten (fall B) och ett lokalt brott inte kan sprida sig till resten av konstruktionen (fall C) får de högre värdena användas. Mellan fallen får man interpolera linjärt för konstruktionsvirke och limträ, och högre värden får användas om träet hindras att deformeras i sidled under lasten. Fall A motsvarar början på flytning i träet och täcker de flesta situationer i byggnader. Kravet $h > 5b$ gäller höga, smala balkar, där en större intryckning kan leda till rullskjuvningsbrott. Fallet väljs därför för varje upplag med kriterierna i tabell 4.2, och valet motiveras i exemplen nedan. Fall B och C ger högre bärförmåga, men intryckningen blir då flera millimeter. Den ska ändå kontrolleras i bruksgränstillståndet (EC5 9.4), och en stor intryckning under en regel ger till exempel sprickor i väggskivor.

> **Obs:** Äldre kurslitteratur och EC5:2004 räknar annorlunda. Där ökas kontaktlängden med 30 mm på var sida, dock högst med a, l eller $l_1/2$, och spänningen beräknas på denna förlängda area. Förhöjningsfaktorn $k_{c,90}$ är 1,0 i allmänhet, 1,25 respektive 1,5 för syllar av konstruktionsvirke respektive limträ och 1,5 respektive 1,75 för balkar på diskreta upplag. I EC5:2025 räknas spänningen i stället på den verkliga kontaktarean. Geometrin (spridningen) och materialet (tillåten deformation) har fått var sin faktor, $k_{c,90}$ och k_{mat}. Resultaten blir ofta av samma storlek, men den nya modellen fångar bättre hur bärförmågan beror på virkets höjd.

Exempel 4.4 Upplagstryck för en limträbalk med konsol

Ett tak i en uppvärmd byggnad bärs av parallella limträbalkar GL30c, 140 × 720 mm, med centrumavståndet 3,8 m, se figur 4.17. Varje balk är fritt upplagd i vänster ände (A) på en stålplåt 200 × 90 mm, där 90 mm är plåtens längd längs balken, och vilar 10 m därifrån (B) på en limträpelare 165 × 225 mm med en stålplåt 165 × 250 mm överst. Balken kragar ut 5 m förbi pelaren. Den dimensionerande lasten är 2,0 kN/m² av medellång varaktighet, och balkarna sitter i klimatklass 1. Kontrollera att plåtarna är tillräckligt stora med hänsyn till trycket vinkelrätt mot fibrerna i balken.



Figur 4.17 Exemplets balk. a) Bärverket med upplag A (stålplåt på vägg) och B (stålplåt på limträpelare). b) Frilagd balk med last och reaktioner. c) Spridningsareorna vid upplagen, med djupet $h_{ef} = 140$ mm.

Laster och reaktioner. Linjelasten på en balk är $q_d = 2{,}0 \cdot 3{,}8 = 7{,}6$ kN/m. Momentjämvikt kring B för den frilagda balken i figur 4.17b ger

$$R_A = \frac{q_d \cdot 10 \cdot 5 - q_d \cdot 5 \cdot 2{,}5}{10} = \frac{7{,}6 \cdot 50 - 7{,}6 \cdot 12{,}5}{10} = 28{,}5 \text{ kN}$$

och vertikal jämvikt

$$R_B = q_d \cdot 15 - R_A = 7{,}6 \cdot 15 - 28{,}5 = 85{,}5 \text{ kN}$$

Material. Klimatklass 1 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6). Med $f_{c,90,k} = 2{,}5$ MPa (tabell 1.3) och $\gamma_M = 1{,}25$ ger ekv. (1.4)

$$f_{c,90,d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{c,90,k}}{\gamma_M} = 0{,}80 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}25} = 1{,}60 \text{ MPa}$$

Balken är hög och smal, $h = 720$ mm $> 5b = 700$ mm, så fall A gäller och $k_{mat} = 1{,}4$ (tabell 4.2).

Effektivt djup. Båda upplagen är diskreta, och ekv. (4.17) ger

$$h_{ef} = \min\{0{,}4 \cdot 720;\ 140\} = \min\{288;\ 140\} = 140 \text{ mm}$$

Plåtarna är bredare än balken, så kontaktbredden är $b_{90,c} = b = 140$ mm, och ingen spridning tvärs fibrerna behövs.

Upplag A. Kontaktarean är $A = 140 \cdot 90 = 12\,600$ mm². Plåten ligger vid balkens ände, så kraften kan bara spridas inåt. Ekv. (4.18) och ekv. (4.16) ger

$$l_{ef} = l_{90,c} + h_{ef} = 90 + 140 = 230 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{230}{90}} = 1{,}599$$

Den förhöjda hållfastheten och spänningen enligt ekv. (4.15) blir

$$k_{mat} k_{c,90} f_{c,90,d} = 1{,}4 \cdot 1{,}599 \cdot 1{,}60 = 3{,}58 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{R_A}{A} = \frac{28\,500}{12\,600} = 2{,}26 \text{ MPa} \le 3{,}58 \text{ MPa}$$

Utnyttjandegraden är $2{,}26/3{,}58 = 0{,}63$.

Upplag B. Kontaktarean är $A = 140 \cdot 250 = 35\,000$ mm². Balken är kontinuerlig över pelaren, så kraften sprids åt båda hållen:

$$l_{ef} = 250 + 2 \cdot 140 = 530 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{530}{250}} = 1{,}456$$

$$k_{mat} k_{c,90} f_{c,90,d} = 1{,}4 \cdot 1{,}456 \cdot 1{,}60 = 3{,}26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{R_B}{A} = \frac{85\,500}{35\,000} = 2{,}44 \text{ MPa} \le 3{,}26 \text{ MPa}$$

Utnyttjandegraden är $2{,}44/3{,}26 = 0{,}75$.

Pelartoppen. Under plåten B trycks pelaren längs fibrerna med $\sigma_{c,0,d} = 85\,500/(165 \cdot 225) = 2{,}30$ MPa, långt under $f_{c,0,d} = 0{,}80 \cdot 24{,}5/1{,}25 = 15{,}7$ MPa. Det är alltså kontakttrycket i balken som avgör.

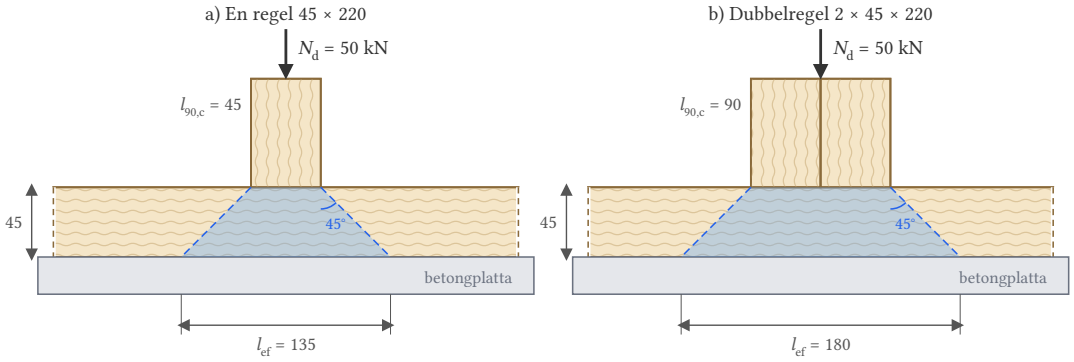
Slutsats. Båda plåtarna är tillräckligt stora. Upplag B är hårdast utnyttjat (75 %), trots att det har den längsta plåten. Reaktionen där är tre gånger större än vid A, eftersom konsolen lastar pelaren. Den större spridningen åt båda hållen gör att $k_{c,90}$ ändå är nästan lika stor som vid ändupplaget.

4.4.3 Syll under en regel

En syll är det typiska exemplet på ett kontinuerligt upplag: en liggande regel på en betongplatta som bär väggens reglar. Syllen är låg, så hela höjden medverkar, $h_{ef} = h$. Kontaktytan är regeländens tvärsnitt, och reglarna har ofta stor tryckkraft. Därför är trycket mot syllen ofta det som begränsar en regelvägg, inte knäckningen av reglarna (avsnitt 4.5).

Exempel 4.5 Regel på syll

Regeln i exempel 4.7, C18 45 × 220 mm, för ned den dimensionerande normalkraften $N_d = 50$ kN (främst snölast, medellång) till en syll C18 45 × 220 mm. Syllen ligger plant på en betongplatta, så att dess höjd är $h = 45$ mm och bredden $b = 220$ mm, se figur 4.18. Regeln står långt från syllens ände, och väggen är i klimatklass 2. Kontrollera trycket mot syllen och föreslå en åtgärd om det inte räcker.



Figur 4.18 Regel på syll. a) En regel: kontaktlängden 45 mm sprids genom syllens höjd till 135 mm. b) Dubbelregel: kontaktlängden 90 mm sprids till 180 mm.

Material. Klimatklass 2 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6). Med $f_{c,90,k} = 2{,}2$ MPa för C18 (tabell 1.2) och $\gamma_M = 1{,}30$ är

$$f_{c,90,d} = 0{,}80 \cdot \frac{2{,}2}{1{,}30} = 1{,}354 \text{ MPa}$$

Val av fall för k_{mat}. Syllen är kontinuerligt upplagd och bredare än hög ($b = 220 \geq h = 45$ mm), så till geometrin skulle fall C kunna komma i fråga. Men en intryckning under regeln gör att väggen sätter sig, vilket kan spräcka väggskivor och skada anslutande delar. Det är just den situation som fall A är avsett för (EC5 tabell 8.1, fotnot a), så $k_{mat} = 1{,}4$.

Spridning. Upplaget är kontinuerligt, och ekv. (4.17) ger $h_{ef} = \min\{45;\, 280\} = 45$ mm. Regeln täcker syllens hela bredd, $b_{90,c} = b = 220$ mm. Med $l_{90,c} = 45$ mm ger ekv. (4.18) och ekv. (4.16)

$$l_{ef} = 45 + 2 \cdot 45 = 135 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{135}{45}} = 1{,}732$$

Kontroll med en regel. Kontaktarean är $A = 45 \cdot 220 = 9\,900$ mm², och ekv. (4.15) ger

$$k_{mat} k_{c,90} f_{c,90,d} = 1{,}4 \cdot 1{,}732 \cdot 1{,}354 = 3{,}28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{50\,000}{9\,900} = 5{,}05 \text{ MPa} > 3{,}28 \text{ MPa}$$

Utnyttjandegraden är $5{,}05/3{,}28 = 1{,}54$ det räcker inte.

Åtgärd: dubbelregel. Med två reglar bredvid varandra blir $l_{90,c} = 90$ mm och $A = 19\,800$ mm²:

$$l_{ef} = 90 + 2 \cdot 45 = 180 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{180}{90}} = 1{,}414$$

$$k_{mat} k_{c,90} f_{c,90,d} = 1{,}4 \cdot 1{,}414 \cdot 1{,}354 = 2{,}68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{50\,000}{19\,800} = 2{,}53 \text{ MPa} \leq 2{,}68 \text{ MPa}$$

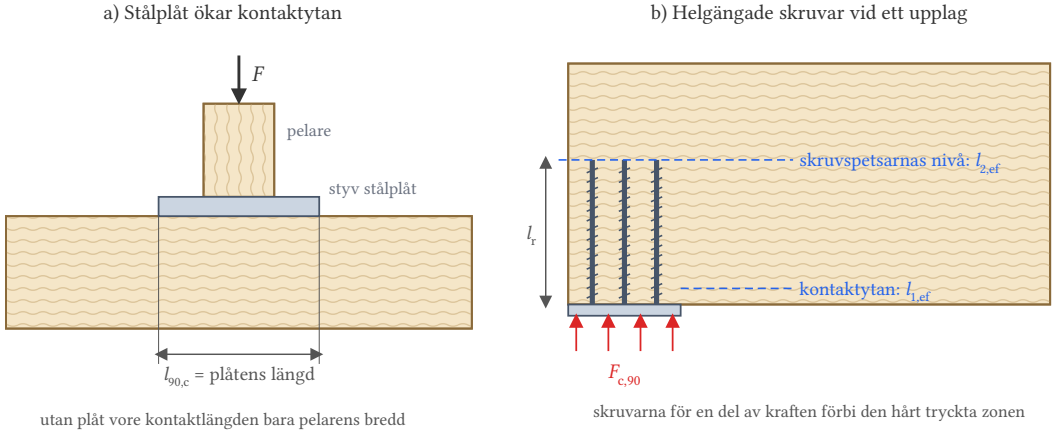
Utnyttjandegraden är $2{,}53/2{,}68 = 0{,}94$.

Slutsats. En regel som klarar 50 kN i knäckning trycker ändå sönder syllen: kontakttrycket är mer än tre gånger $f_{c,90,d}$. Dubbelregeln halverar spänningen, men spridningsfaktorn blir mindre eftersom kontaktytan är längre i förhållande till syllens höjd. Med fall C ($k_{mat} = 2{,}7$) skulle en regel formellt räcka, men då accepteras en intryckning på uppemot en femtedel av syllens höjd, alltså nästan en centimeter.

4.4.4 Förstärkning

Räcker inte bärförmågan finns flera möjligheter:

- **Större kontaktyta.** En längre upplagsplåt eller en styv stålplåt mellan en pelare och en balk ökar $l_{90,c}$, se figur 4.19a. Plåten måste vara så styv att den verkligen fördelar trycket; en tunn plåt böjer sig och trycket koncentreras ändå under pelaren.
- **Annat material i kontaktzonen.** En syll eller ett mellanlägg av limträ, LVL eller lövträ har högre $f_{c,90,k}$.
- **Helgängade skruvar.** Skruvar som skruvas in vinkelrätt mot kontaktytan, med huvudet i nivå med ytan, för en del av kraften förbi den hårt belastade zonen närmast kontaktytan, se figur 4.19b. Varje skruv bär högst sin utdragsbärförmåga eller sin knäckbärförmåga som tryckt stav. Vid skruvspetsarna har kraften spridits över hela virkets bredd och en längre sträcka $l_{2,ef}$.



Figur 4.19 Förstärkning för tryck vinkelrätt mot fibrerna. a) En styv stålplåt mellan pelare och balk ökar kontaktlängden. b) Helgängade skruvar vid ett upplag för en del av kraften upp till skruvspetsarnas nivå, där trycket kontrolleras över en större yta. Principskiss efter EC5 figur 8.5.

För skruvförstärkning ger EC5 8.1.6.2, formel (8.12), bärförmågan som det minsta av två värden. Det första är träets bärförmåga i kontaktytan, med en effektiv längd $l_{1,ef}$, plus skruvarnas bidrag. Det andra är träets bärförmåga i planet genom skruvspetsarna, över hela bredden b och längden $l_{2,ef}$. Skruvarna kräver en styv plåt i kontaktytan, och plåten ska dimensioneras för de koncentrerade krafterna från skruvhuvudena. Förstärkning med skruvar behandlas inte vidare i kursen.

4.5 Trä: pelare och tryck längs fibrerna

Det här avsnittet behandlar träpelare: element som trycks längs fibrerna, ensamma eller tillsammans med böjning. Utgångspunkten är Eulers knäcklast för en idealisk pelare (avsnitt 4.1). Avsnittet visar varför en verklig träpelare bär mindre än så och hur EC5 tar hänsyn till det med en **knäckkurva**, reduktionsfaktorn k_c. För trä används samma förenklade metod även när pelaren dessutom böjs: interaktionen mellan tryck och böjning kontrolleras direkt med k_c, utan att andra ordningens moment beräknas explicit. Tryck vinkelrätt mot fibrerna vid pelarens ändar behandlas i avsnitt 4.4.

Som i resten av kapitlet räknas tryckkraften som en positiv storhet (avsnitt 4.1). EC5 betecknar den dimensionerande tryckkraften $N_{c,0,d}$ och tryckspänningen $\sigma_{c,0,d} = N_{c,0,d}/A$.

4.5.1 Från Euler till verkliga träpelare

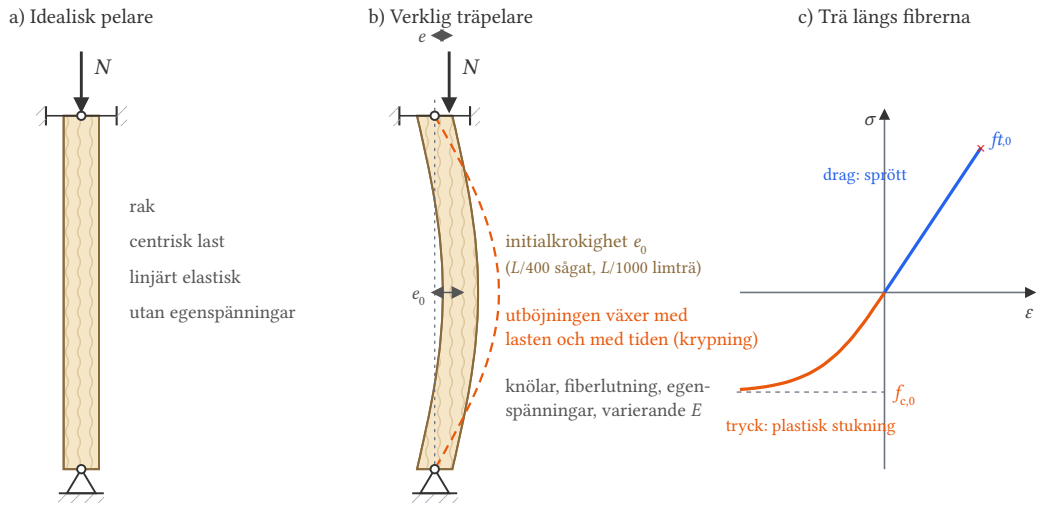
Den idealiska pelaren

Eulers knäcklast ekv. (4.3) gäller för en idealisk pelare (figur 4.20a), som uppfyller följande förutsättningar:

- pelaren är helt rak;

- lasten verkar centriskt, i tvärsnittets tyngdpunkt;
- materialet är linjärt elastiskt med en känd elasticitetsmodul E, och det förblir elastiskt hur stor spänningen än blir;
- pelaren är spänningsfri i obelastat tillstånd (inga egenspänningar);
- ändarna är ideala leder eller ideala inspänningar, så att knäcklängden L_{cr} enligt ekv. (4.4) är känd.

En sådan pelare står helt rak tills lasten når N_{cr} och knäcker då plötsligt ut. Någon sådan pelare finns inte, men den ger en övre gräns och en teoretisk beskrivning av knäckning.



Figur 4.20 a) Idealisk pelare: rak, centriskt belastad, linjärt elastisk och utan egenspänningar. b) Verklig träpelare: initialkrokighet e_0 och excentricitet e utböjningen växer med lasten och med tiden. c) Trä längs fibrerna: i drag linjärt till ett sprött brott, i tryck olinjärt med plastisk stukning.

Varför verkliga träpelare bär mindre

En verklig träpelare avviker från alla förutsättningarna (figur 4.20b–c):

- **Imperfektioner.** Virket är aldrig helt rakt, och lasten angriper aldrig exakt i tyngdpunkten. Redan en liten initialkrokighet e_0 ger ett moment Ne_0, som förstoras av utböjningen enligt ekv. (4.11). Pelaren böjs alltså ut från början, och spänningen på den tryckta sidan växer snabbare än lasten.
- **Materialets variation.** Kvistar, fiberlutning och varierande densitet gör att både styvhet och hållfasthet varierar längs pelaren. Därför används den karakteristiska elasticitetsmodulen $E_{0,k}$ (5-procentsfraktilen) i knäckberäkningar, inte medelvärdet (EC5 8.2.2.1).
- **Egenspänningar.** Torkning ger inre spänningar i virket, så att vissa fibrer är förspända redan innan lasten läggs på.
- **Olinjär arbetskurva.** I tryck längs fibrerna är trä elastiskt bara upp till ungefär halva hållfastheten. Sedan stukas fibrerna plastiskt (figur 4.20c), och styvheten minskar just där spänningen är störst.
- **Krypning.** Under långvarig last ökar utböjningen med tiden, och därmed andra ordningens moment. Det beaktas genom att hållfastheten reduceras med k_{mod} för lastens varaktighet (avsnitt 1.3). För pelare med stor permanent last kan krypknäckning behöva studeras särskilt (EC5 B.4.6).

Följden är att en verklig pelare går till brott vid en lägre last än både krossningslasten $f_{c,0}A$ och Eulerlasten. Skillnaden är störst för pelare med medelstor slankhet, där de två gränserna ligger nära varandra och imperfektionerna gör mest skada.

4.5.2 Knäckkurvan

Normering

Delas Eulerlasten med arean fås den kritiska spänningen $\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$, med slankheten $\lambda = L_{cr}/i$ enligt ekv. (4.5). Figur 4.21a visar bärförmågan mot slankheten för två hållfasthetsklasser: kurvorna har olika platå ($f_{c,0,k}$) och olika Eulerkurva ($E_{0,k}$). För att samma kurva ska kunna användas för alla klasser **normeras**

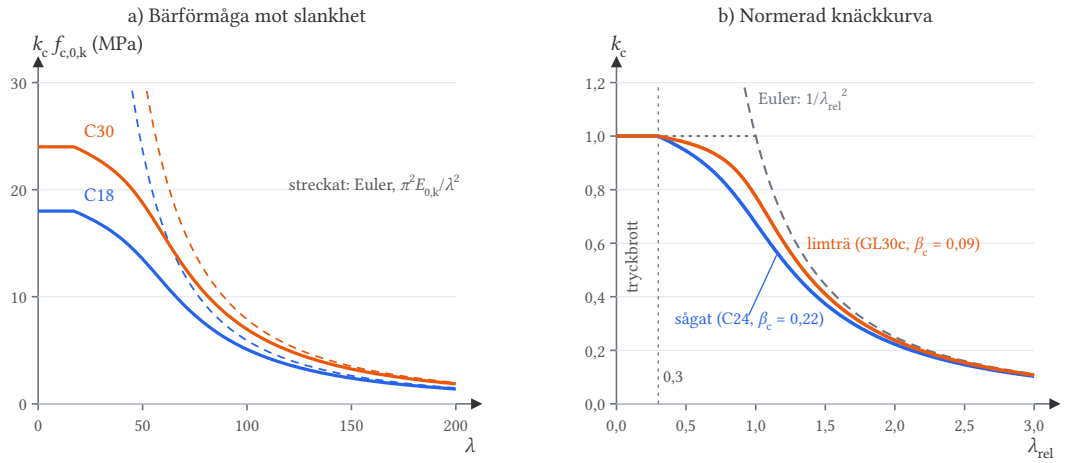
båda axlarna. Spänningen delas med hållfastheten, och slankheten ersätts med den **relativa slankheten** (EC5 formel (8.38)). Den är samma storhet som $\bar{\lambda}$ i ekv. (4.7), med $f = f_{c,0,k}$ och $E = E_{0,k}$ EC5 betecknar den λ_{rel}:

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{f_{c,0,k}\,A}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} \tag{4.19}$$

där $N_{cr} = \pi^2 E_{0,k} I / L_{cr}^2$. Eulerkurvan blir då densamma för alla material:

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_{c,0,k}} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} \tag{4.20}$$

$\lambda_{rel} = 1$ betyder att Eulerspänningen är lika med tryckhållfastheten. En kort pelare (λ_{rel} liten) går till tryckbrott, och en mycket slank pelare (λ_{rel} stor) knäcker ungefär vid Eulerlasten.



Figur 4.21 a) Bärförmåga $k_c f_{c,0,k}$ mot slankheten λ för C18 och C30, med respektive Eulerkurva (streckad). b) Normerad knäckkurva: k_c mot λ_{rel} för sågat virke (C24) och limträ (GL30c), med den normerade Eulerkurvan ekv. (4.20). Beräknad med EC5 formel (8.40)–(8.41).

Reduktionsfaktorn kc

Den verkliga pelarens bärförmåga uttrycks som tryckhållfastheten gånger en reduktionsfaktor $k_c \leq 1$, som tar hänsyn till både imperfektioner och materialets verkliga egenskaper (EC5 formel (8.40)–(8.41)):

$$k_c = \frac{1}{\phi_c + \sqrt{\phi_c^2 - \lambda_{rel}^2}} \tag{4.21}$$

$$\phi_c = 0{,}5(1 + \beta_c(\lambda_{rel} - 0{,}3) + \lambda_{rel}^2) \tag{4.22}$$

(I äldre litteratur heter ϕ_c bara k.) För $\lambda_{rel} \leq 0{,}3$ är $k_c = 1$: pelaren är så kort att den inte knäcker, och EC5 (8.37) kräver då ingen knäckkontroll. Det beror på att tryckhållfastheten bestäms på provkroppar med ungefär den slankheten, så en eventuell knäckning hos så korta pelare ingår redan i $f_{c,0,k}$. För större slankhet följer k_c en kurva som ligger under både platån och Eulerkurvan och närmar sig Eulerkurvan för mycket slanka pelare, se figur 4.21b.

Imperfektionsfaktorn β_c beskriver hur krokig pelaren antas vara. EC5 tabell 8.2 ger den ur pilhöjden $e = \varepsilon L$, där $\varepsilon = 1/400$ för konstruktionsvirke och $1/1000$ för limträ (EC5 7.4.1, formel (7.2)):

$$\beta_c = \varepsilon\,\pi\sqrt{\frac{3E_{0,k}}{f_{c,0,k}}} \cdot \frac{f_{c,0,k}}{f_{m,k}} \tag{4.23}$$

Formeln är imperfektionen uttryckt som utnyttjandegrad. För ett rektangulärt tvärsnitt är $eA/W = 6\varepsilon L/h = \sqrt{3}\,\varepsilon\lambda$. Böjspänningen från momentet Ne är då $\sigma_c\sqrt{3}\,\varepsilon\lambda$, och delad med f_m blir den $\beta_c\lambda_{rel}\cdot$

σ_c / f_c. Termen $\beta_c(\lambda_{rel} - 0{,}3)$ i ekv. (4.22) är alltså böjningens andel av utnyttjandet, räknad från platåns slut. Tabell 4.3 visar β_c beräknad med värdena i tabell 1.2 och tabell 1.3. Den ligger nära 0,2 för konstruktionsvirke och nära 0,1 för limträ. Limträ är rakare och mer homogent än sågat virke, eftersom lamellerna sorteras och limmas ihop, och får därför en högre knäckkurva.

Tabell 4.3 Imperfektionsfaktorn βc enligt EC5 tabell 8.2 för några hållfasthetsklasser

Klass	C14	C18	C24	C30	GL24h	GL30h	GL24c	GL30c
β_c	0,266	0,248	0,223	0,199	0,109	0,106	0,100	0,093

> **Obs:** EC5:2004 och äldre kurslitteratur använder de fasta värdena $\beta_c = 0{,}2$ för konstruktionsvirke och 0,1 för limträ och LVL. Skillnaden mot tabell 4.3 är liten, men för C14 och C18 ger den nya formeln något lägre k_c.

Dimensioneringsvillkor

En centriskt tryckt pelare ska uppfylla (EC5 formel (8.4) och (8.39) utan moment)

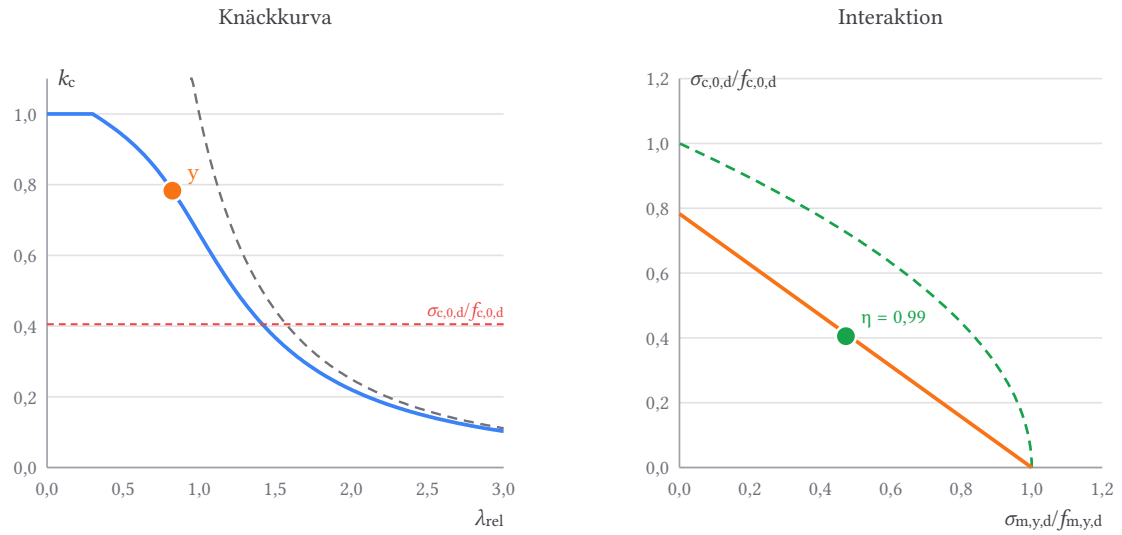
$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_{c,0,d}}{A} \le k_c \cdot f_{c,0,d}, \qquad N_{Rd} = k_c f_{c,0,d} A \tag{4.24}$$

för knäckning kring båda huvudaxlarna, med $k_{c,y}$ respektive $k_{c,z}$. Det minsta värdet avgör. Beräkningsgången är:

1. Bestäm knäcklängden $L_{cr} = \beta L$ kring varje axel, se avsnitt 4.5.3.
2. Beräkna tröghetsradien $i = \sqrt{I/A}$, för ett rektangulärt tvärsnitt $i_y = h/\sqrt{12}$ och $i_z = b/\sqrt{12}$, och slankheten $\lambda = L_{cr}/i$.
3. Beräkna den relativa slankheten med ekv. (4.19). Är $\lambda_{rel} \le 0{,}3$ är $k_c = 1$.
4. Beräkna β_c (tabell 4.3), ϕ_c och k_c med ekv. (4.22) och ekv. (4.21).
5. Beräkna $f_{c,0,d} = k_{mod} f_{c,0,k} / \gamma_M$ med ekv. (1.4) och kontrollera ekv. (4.24).

> **Notera:** I klimatklass 1 får $f_{c,0,k}$ för konstruktionsvirke och limträ multipliceras med 1,2 (EC5 5.2.1(3)). Exemplen i det här avsnittet gäller klimatklass 2, där faktorn inte används.

I den interaktiva figur 4.22 kan längd, tvärsnitt, hållfasthetsklass, knäcklängd och laster ändras. Den vänstra panelen visar var pelaren hamnar på knäckkurvan kring respektive axel. Den högra visar interaktionen med böjning, som behandlas i avsnitt 4.5.4. Grundinställningen är regeln i exempel 4.7.

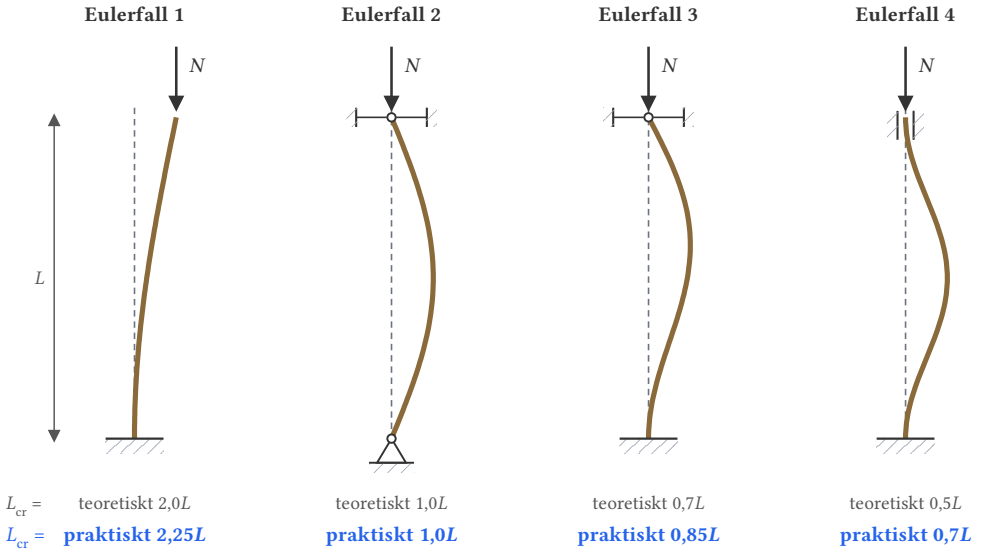


Figur 4.22 Träpelare med normalkraft och vindlast. Ändra längd, tvärsnitt, hållfasthetsklass, knäcklängd och laster och se hur punkterna för knäckning kring y och z flyttar sig på knäckkurvan och hur utnyttjandet i interaktionen ändras.

4.5.3 Knäcklängder och knäckriktningar

Praktiska knäcklängder

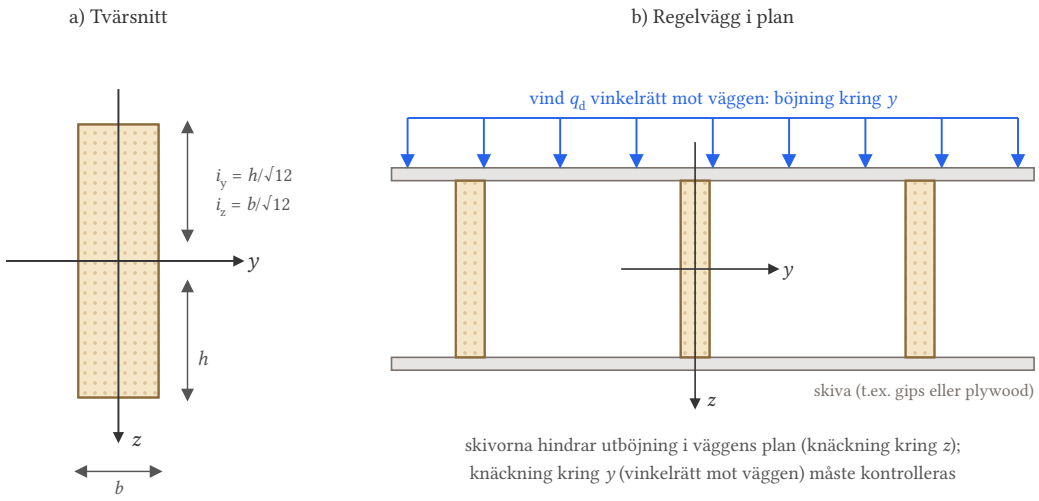
Knäcklängden $L_{cr} = \beta L$ beror på hur pelarens ändar är fasthållna, se avsnitt 4.1. EC5 ger de teoretiska värdena för de fyra Eulerfallen i den informativa bilagan B (EC5 B.3.2.2, formel (B.4) och tabell B.2: 1,0; 0,70; 0,50 och 2,00), och anmärker att de förutsätter leder helt utan rotationsstyvhet och inspänningar med oändlig rotationsstyvhet. Några praktiska värden ger EC5 inte. I träkonstruktioner är det svårt att åstadkomma en riktigt fast inspänning. Mekaniska förband har glidning (avsnitt 3.7), och träet runt förbindarna ger efter, så en "inspänd" ände kan alltid vrida sig något. Därför används **praktiska knäcklängder**, som är längre än de teoretiska. För träpelare används i kursen de värden som visas i figur 4.23, efter det äldre kurskompendiet. De är större än de praktiska värdena för stål (tabell 4.6), eftersom förbanden i trä är mer eftergivliga. För en pelare som är ledad i båda ändarna (Eulerfall 2) är de lika, och det är också det vanligaste fallet för träpelare.



Figur 4.23 Knäcklängder för de fyra Eulerfallen: teoretiska värden och de praktiska värden som används för träpelare, där inspänningarna inte kan antas helt styva. Omritad efter kompendiet *Bärande konstruktioner del 2*, figur T6.8.

Veka och styva riktningen

En pelare kan knäcka kring båda huvudaxlarna, och båda ska kontrolleras. För ett rektangulärt tvärsnitt $b \times h$ med $h \geq b$ är y den styva axeln och z den veka (figur 4.24a). Kring den veka axeln är tröghetsradien minst, så en fristående pelare knäcker i regel kring z.

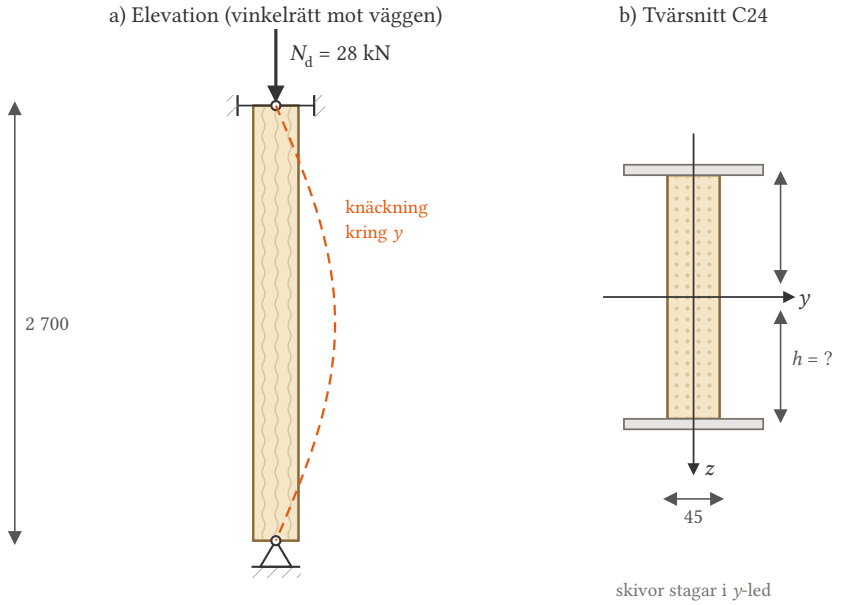


Figur 4.24 a) Rektangulärt tvärsnitt med den styva axeln y och den veka axeln z. b) Regelvägg i plan: skivorna på reglarnas smala sidor hindrar utböjning i väggens plan, så att reglarna bara kan knäcka vinkelrätt mot väggen, kring y. Vinden böjer reglarna kring samma axel.

Reglar i en vägg är däremot **stagade i den veka riktningen** av skivorna (figur 4.24b). Skivorna är fästa i reglarnas smala sidor och är mycket styva i sitt eget plan, så reglarna kan inte böja ut i väggens plan. Knäckning kring z är då förhindrad, och bara knäckning kring y, vinkelrätt mot väggen, behöver kontrolleras. På samma sätt kan kortlingar eller stag halvera knäcklängden kring den veka axeln: knäcklängden är avståndet mellan de punkter där pelaren är förhindrad att böja ut i den riktningen. Stagen måste ha tillräcklig styvhet och hållfasthet; det behandlas i EC5 7.5.

Exempel 4.6 Centriskt tryckt regel

En regel av C24 med bredden 45 mm bär den dimensionerande normalkraften $N_{c,0,d} = 28$ kN, som i huvudsak är snölast (medellång). Regeln är 2,7 m lång och ledad i båda ändarna, och skivor stagar den i den veka riktningen, se figur 4.25. Väggen är i klimatklass 2. Välj höjden h bland standardmåtten 95, 120 och 145 mm.



Figur 4.25 Exemplets regel: ledad i båda ändarna, stagad i y-led av skivorna, så att den bara kan knäcka kring y.

Material. Klimatklass 2 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6). För C24 är $f_{c,0,k} = 21$ MPa och $E_{0,k} = 7\,400$ MPa (tabell 1.2), och ekv. (1.4) ger

$$f_{c,0,d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 0{,}80 \cdot \frac{21}{1{,}30} = 12{,}92 \text{ MPa}$$

Knäcklängd. Regeln är ledad i båda ändarna (Eulerfall 2), så $L_{cr} = 1{,}0 \cdot L = 2\,700$ mm (figur 4.23). Knäckning kring z är förhindrad av skivorna.

Slankhet för h = 120 mm. Tröghetsradien är $i_y = 120/\sqrt{12} = 34{,}6$ mm, så

$$\lambda_y = \frac{L_{cr}}{i_y} = \frac{2\,700}{34{,}6} = 77{,}9$$

och ekv. (4.19) ger

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} = \frac{77{,}9}{\pi}\sqrt{\frac{21}{7\,400}} = 1{,}322 > 0{,}3$$

Regeln är slank, och knäckning måste kontrolleras.

Reduktionsfaktor. Med $\beta_c = 0{,}223$ (tabell 4.3) ger ekv. (4.22) och ekv. (4.21)

$$\phi_c = 0{,}5(1 + 0{,}223 \cdot (1{,}322 - 0{,}3) + 1{,}322^2) = 1{,}488$$

$$k_{c,y} = \frac{1}{1{,}488 + \sqrt{1{,}488^2 - 1{,}322^2}} = 0{,}461$$

Kontroll. Spänningen är $\sigma_{c,0,d} = 28\,000/(45 \cdot 120) = 5{,}19$ MPa, och ekv. (4.24) ger

$$\sigma_{c,0,d} = 5{,}19 \text{ MPa} \le k_{c,y} f_{c,0,d} = 0{,}461 \cdot 12{,}92 = 5{,}96 \text{ MPa}$$

Utnyttjandegraden är $5{,}19/5{,}96 = 0{,}87$, och bärförmågan $N_{Rd} = 5{,}96 \cdot 45 \cdot 120 = 32{,}2$ kN.

Kontroll av h = 95 mm. På samma sätt blir $\lambda_y = 98{,}5$, $\lambda_{rel,y} = 1{,}670$, $\phi_c = 2{,}047$ och $k_{c,y} = 0{,}310$, så

$$N_{Rd} = k_{c,y} f_{c,0,d} A = 0{,}310 \cdot 12{,}92 \cdot 45 \cdot 95 = 17{,}1 \text{ kN} < 28 \text{ kN}$$

och den lägre höjden räcker inte.

Slutsats. Välj 45 × 120 mm. Pelaren utnyttjar bara 46 % av tryckhållfastheten, eftersom knäckningen avgör. Höjden betyder mycket: från 95 till 120 mm ökar arean med 26 %, men bärförmågan nästan fördubblas, eftersom k_c ökar från 0,31 till 0,46. Regeländarna trycker dessutom mot syll och hammarband, och det trycket kontrolleras enligt avsnitt 4.4.

4.5.4 Tryck och böjning

En pelare har ofta också moment: en vägregel belastas av vind, en pelare kan ha en excentrisk last, och en överram i ett fackverk kan ha en utbredd last. Hur tryck och böjning samverkar beror på materialet (avsnitt 4.3). För trä används den förenklade metoden även här. Interaktionen kontrolleras med reduktionsfaktorn k_c och momentet från en vanlig första ordningens analys. Andra ordningens moment (avsnitt 4.2) beräknas inte, eftersom k_c redan tar hänsyn till dem (EC5 8.2.1(2)). Vilket villkor som gäller beror på om pelaren är slank eller inte, och villkoren redovisas här för böjning kring båda axlarna.

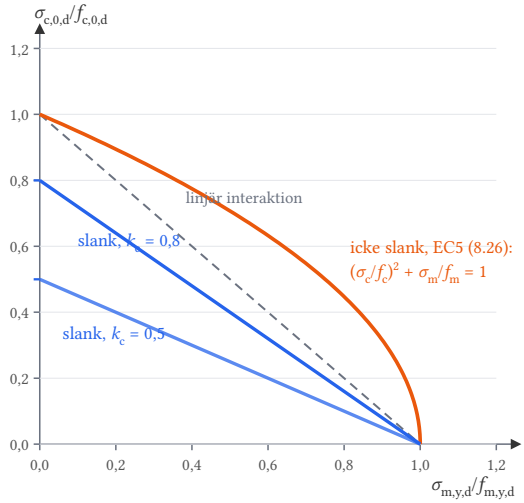
Icke slanka pelare

Om $\lambda_{rel,y} \leq 0{,}3$ och $\lambda_{rel,z} \leq 0{,}3$ knäcker pelaren inte, och tvärsnittet kontrolleras med (EC5 formel (8.26)–(8.27))

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_{red}\frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1$$
$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + k_{red}\frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \tag{4.25}$$

Tryckspänningens andel är **kvadrerad**, eftersom trä i tryck stukas plastiskt (figur 4.20c). När den tryckta kanten börjar flyta lagras spänningen om mot tvärsnittets inre, och bärförmågan blir större än en linjär interaktion skulle ge. Kurvan buktar därför utåt, se figur 4.26. Exponenten 2 gäller rektangulära tvärsnitt; för andra former, till exempel runda, är den 1.

Faktorn $k_{red} = 0{,}7$ för rektangulära tvärsnitt av konstruktionsvirke, limträ och LVL och 1,0 för andra tvärsnitt (EC5 8.1.8.1(2)). Vid böjning kring båda axlarna nås den största spänningen bara i ett hörn, och det är osannolikt att virket är som svagast just där.



Figur 4.26 Interaktion mellan tryck och böjning kring en axel. Icke slank pelare enligt ekv. (4.25): kurvan buktar utåt jämfört med en linjär interaktion (streckad). Slank pelare enligt ekv. (4.26): rät linje som skär tryckaxeln vid k_c.

Slanka pelare

Är $\lambda_{rel} > 0{,}3$ kring någon axel ska knäckning kring den axeln kontrolleras. För knäckning kring y gäller (EC5 formel (8.39))

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_{red} \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \tag{4.26}$$

och för knäckning kring z (EC5 formel (8.44))

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + \left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_m f_{m,y,d}} \right)^2 + k_{red} \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \tag{4.27}$$

Här är tryckets andel linjär. Utböjningen från imperfektionen och momentet ger ett tillskottsmoment, N gånger utböjningen (ekv. (4.8)), som redan ingår i k_c. Plasticeringen hinner inte ge någon extra bärförmåga, eftersom pelaren blir instabil först. Utan moment övergår villkoren i ekv. (4.24). Med moment men utan tryck övergår ekv. (4.26) i det vanliga böjvillkoret.

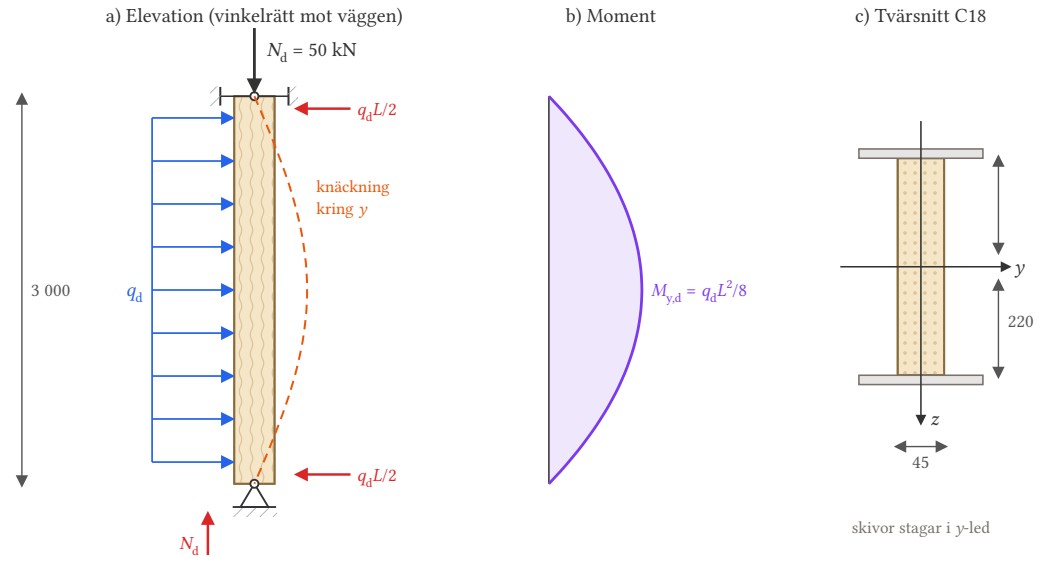
Vippning

En hög balk som böjs kring den styva axeln kan också **vippa**: den tryckta kanten böjer ut i sidled och tvärsnittet vrids. Det beaktas med faktorn k_m i ekv. (4.27), som beräknas ur den relativa slankheten för vippning (EC5 8.2.2.3). Är den tryckta kanten stagad längs hela längden, till exempel av skivor i en regelvägg, eller är slankheten för vippning högst 0,55, är $k_m = 1$. Vippning behandlas inte vidare i kursen.

> **Obs:** I EC5:2004 och äldre kurslitteratur heter faktorn för böjning kring två axlar k_m, och vippningsfaktorn heter k_{crit}. I EC5:2025 heter de k_{red} respektive k_m. Dessutom är momenttermen i ekv. (4.27) nu kvadrerad.

Exempel 4.7 Vägregel med normalkraft och vind

En regel C18 45×220 mm i en yttervägg är 3,0 m lång och ledad i båda ändarna. Skivor på båda sidor stagar den i den veka riktningen. Regeln bär den dimensionerande normalkraften $N_{c,0,d} = 50$ kN, som i huvudsak är snölast (medellång). Vinden ger en jämnt utbredd last q_d vinkelrätt mot väggen, alltså en böjning kring den styva axeln, se figur 4.27. Väggen är i klimatklass 2. Kontrollera regeln för enbart normalkraften och bestäm hur stor vindlast q_d den kan ta i kombination med normalkraften, när snön är huvudlast och vinden samverkande last.



Figur 4.27 Exemplets regel. a) Elevation med normalkraft, vindlast och reaktioner. b) Momentet från vinden, största värdet i mitten. c) Tvärsnittet, stagat i y-led av skivorna.

Tvärsnitt. $A = 45 \cdot 220 = 9\,900$ mm², $W_y = 45 \cdot 220^2/6 = 363 \cdot 10^3$ mm³ och $i_y = 220/\sqrt{12} = 63{,}5$ mm. Tryckspänningen är

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_{c,0,d}}{A} = \frac{50\,000}{9\,900} = 5{,}05 \text{ MPa}$$

Slankhet. Ledade ändar ger $L_{cr} = 3\,000$ mm. Med $f_{c,0,k} = 18$ MPa och $E_{0,k} = 6\,000$ MPa för C18 (tabell 1.2) ger ekv. (4.19)

$$\lambda_y = \frac{L_{cr}}{i_y} = \frac{3\,000}{63{,}5} = 47{,}2$$

$$\lambda_{rel,y} = \frac{47{,}2}{\pi}\sqrt{\frac{18}{6\,000}} = 0{,}8236 > 0{,}3$$

Knäckning kring z är förhindrad av skivorna.

Reduktionsfaktor. Med $\beta_c = 0{,}248$ för C18 (tabell 4.3) ger ekv. (4.22) och ekv. (4.21)

$$\phi_c = 0{,}5(1 + 0{,}248 \cdot (0{,}8236 - 0{,}3) + 0{,}8236^2) = 0{,}904$$

$$k_{c,y} = \frac{1}{0{,}904 + \sqrt{0{,}904^2 - 0{,}8236^2}} = 0{,}783$$

Enbart normalkraft. Snö ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6) och $f_{c,0,d} = 0{,}80 \cdot 18/1{,}30 = 11{,}08$ MPa. Ekv. (4.24) ger utnyttjandegraden

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} = \frac{5{,}05}{0{,}783 \cdot 11{,}08} = 0{,}58$$

Hållfasthet med vind. Vinden är den kortvarigaste lasten i kombinationen. Som samverkande last är den en korttidslast, så $k_{mod} = 0{,}90$ (tabell 1.6). Då är

$$f_{c,0,d} = 0{,}90 \cdot \frac{18}{1{,}30} = 12{,}46 \text{ MPa}$$

Höjden 220 mm är större än 150 mm, så $k_h = 1{,}0$ (ekv. (1.5)). Eftersom $f_{m,k} = f_{c,0,k} = 18$ MPa för C18 blir också $f_{m,y,d} = 12{,}46$ MPa.

Interaktion. Regeln är slank och knäcker kring y, så ekv. (4.26) gäller med $\sigma_{m,z,d} = 0$. Tryckets andel är

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} = \frac{5{,}05}{0{,}783 \cdot 12{,}46} = 0{,}518$$

så böjspänningen får vara högst

$$\sigma_{m,y,d} \le (1 - 0{,}518) \cdot f_{m,y,d} = 0{,}482 \cdot 12{,}46 = 6{,}01 \text{ MPa}$$

Den tryckta kanten är stagad av skivan, så vippning kan inte inträffa ($k_m = 1$).

Största vindlast. Momentet i mitten är $M_{y,d} = q_d L^2/8 = \sigma_{m,y,d} W_y$, vilket ger

$$q_d = \frac{8\,\sigma_{m,y,d} W_y}{L^2} = \frac{8 \cdot 6{,}01 \cdot 363 \cdot 10^3}{3\,000^2} = 1{,}94 \text{ kN/m}$$

Kontroll av tvärsnittet. Även tvärsnittsvillkoret ekv. (4.25) ska vara uppfyllt i mitten: $(5{,}05/12{,}46)^2 + 6{,}01/12{,}46 = 0{,}16 + 0{,}48 = 0{,}65 \le 1$. Knäckningsvillkoret avgör.

Slutsats. Regeln kan ta en dimensionerande vindlast på 1,94 kN/m, ungefär 3,2 kN/m² om reglarna står med centrumavståndet 600 mm. Normalkraften tar redan hälften av kapaciteten, eftersom k_c är 0,78; utan knäckning hade den tagit 40 %. Regelns ändar trycker mot syllen med 50 kN, och det klarar en enkel syll inte, se exempel 4.5.

Stål

4.6 Stålpelare: knäckkurvan

Det här avsnittet visar hur en centriskt tryckt stålpelare dimensioneras med **knäckkurvan** (*förenklad metod*): pelarens bärförmåga är tvärsnittets kapacitet Af_y multiplicerad med en reduktionsfaktor χ som beror på slankheten och på hur stora imperfektioner pelaren kan antas ha. Först förklaras varför en verklig stålpelare bär mindre än Eulerlasten och flytlasten, sedan hur χ beräknas och väljs enligt EC3. Metoden gäller i kursen bara för ren normalkraft; när pelaren också böjs används snittkraftsmetoden i avsnitt 4.7.

Bakgrunden finns i avsnitt 4.1: Eulerlasten ekv. (4.3), knäcklängden ekv. (4.4), slankhetstalet ekv. (4.5) och den relativa slankheten ekv. (4.7). Tvärsnittsklasser och tvärsnittets kapacitet för stål finns i avsnitt 1.4. Som i hela kapitlet är N_{Ed} tryckkraftens storlek, liksom i EC3 8.3.

4.6.1 Från ideal pelare till verklig stålpelare

Eulerlasten gäller en **ideal pelare**: helt rak, centriskt belastad, av ett linjärt elastiskt material och utan spänningar innan den belastas. En sådan pelare finns inte. En verklig stålpelare avviker från idealet på tre sätt som alla ger **andra ordningens effekter**, det vill säga en utböjning som växer med normalkraften och ett moment $N \cdot$ (utböjning) som tillkommer:

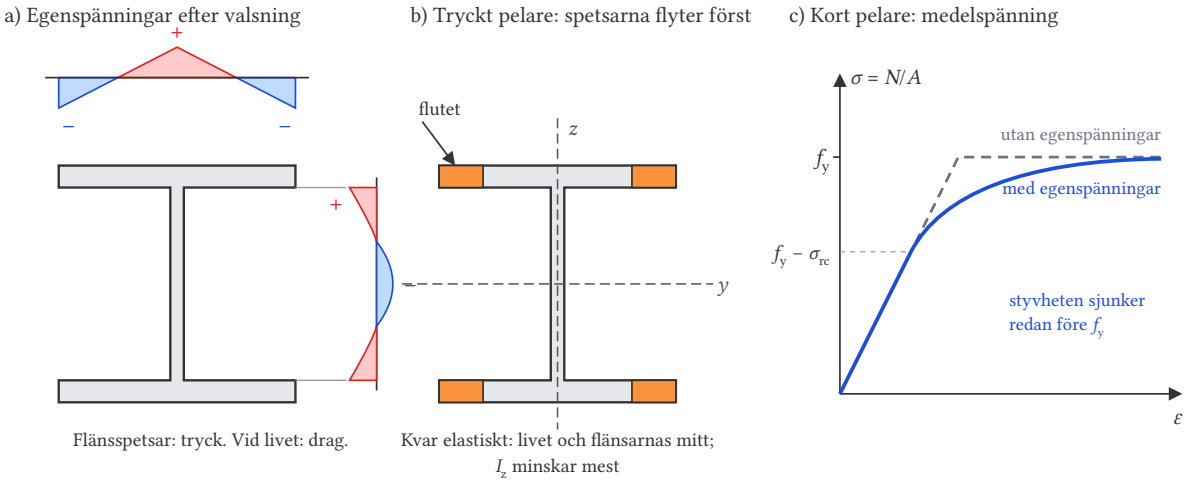
- **Initialkrokighet:** pelaren är aldrig helt rak. Toleranserna vid tillverkning och montage tillåter en krokighet av storleksordningen $L/1000$ till $L/750$.
- **Excentricitet:** lasten angriper inte exakt i tyngdpunkten.
- **Egenspänningar:** spänningar som finns i profilen redan innan den belastas (nästa avsnitt). De gör att delar av tvärsnittet börjar flyta tidigare än väntat.

Dessutom är stålet inte linjärt elastiskt hela vägen: när spänningen når f_y flyter materialet. Därför ligger bärförmågan under både flytlasten Af_y (som gäller för korta pelare) och Eulerlasten N_{cr} (som gäller för mycket slanka pelare). Störst blir skillnaden i mellanområdet, där pelaren varken är kort eller mycket slank. Knäckkurvan beskriver den reducerade bärförmågan som funktion av slankheten.

4.6.2 Egenspänningar

När en profil varmvalsas svalnar den ojämnt. Flänsspetsarna och livets mitt har stor yta i förhållande till volymen och svalnar först; anslutningen mellan liv och flänsar svalnar sist. Det som svalnar sist krymper

när resten redan har stelnat och hålls därför tillbaka av omgivningen: det får **dragspänningar**, medan de delar som svalnade först trycks ihop. Resultatet är ett mönster av **egenspänningar** (*residual stresses*) som är i jämvikt i tvärsnittet, utan yttre last, se figur 4.28a. I en valsad I-profil är flänsspetsarna tryckta och flänsarnas mitt dragen. Tryckspänningen i spetsarna, σ_{rc}, är ofta 30–50 procent av f_y för S235. Svetsade profiler får ännu större egenspänningar, med drag nära sträckgränsen intill svetsarna.



Figur 4.28 a) Typiskt mönster av egenspänningar i en valsad I-profil: tryck (–) i flänsspetsarna och livets mitt, drag (+) vid anslutningen mellan liv och flänsar; i livets diagram är drag ritat till vänster. b) Under en tryckande normalkraft adderas trycket till egenspänningarna, så flänsspetsarna (markerade) börjar flyta först. c) Medelspänningen N/A mot töjningen för en kort pelare med och utan egenspänningar: med egenspänningar avviker kurvan från den räta linjen redan vid $f_y - \sigma_{rc}$.

När pelaren belastas läggs tryckspänningen N/A till egenspänningarna. Där egenspänningen redan är tryck, i flänsspetsarna, nås sträckgränsen först: vid medelspänningen $f_y - \sigma_{rc}$ i stället för vid f_y (figur 4.28b). De flutna delarna bidrar inte längre till styvheten, så pelaren blir vekare och böjer ut mer för samma last: **plasticeringen börjar tidigare och deformationerna blir större** (figur 4.28c).

Effekten är störst vid knäckning kring den **veka axeln** z –z. Flänsspetsarna ligger längst från den axeln och står för det mesta av I_z, medan de ligger nära den styva axeln y –y. När spetsarna flyter minskar därför I_z mycket mer än I_y. Det är skälet till att EC3 tilldelar knäckning kring z –z en sämre knäckkurva än knäckning kring y –y för samma profil.

4.6.3 Reduktionsfaktor och knäckkurvor

En tryckt stålpelare ska uppfylla $N_{Ed} \le N_{b,Rd}$, där bärförmågan med hänsyn till knäckning är (EC3 8.3.1.1, formel (8.68))

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi\, A\, f_y}{\gamma_{M1}} \tag{4.28}$$

för tvärsnitt i klass 1–3. Af_y är tvärsnittets bärförmåga för tryck och $\gamma_{M1} = 1{,}0$ partialkoefficienten för instabilitet (tabell 1.1). Reduktionsfaktorn $\chi \le 1{,}0$ beror på den relativa slankheten. För stål skrivs den med flytkraften och Eulerlasten, eller med knäcklängden och tröghetsradien (EC3 8.3.1.2, formel (8.69)–(8.72)):

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i\,\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = \pi\sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93{,}9\,\varepsilon \tag{4.29}$$

Här är λ_1 det slankhetstal där Eulerspänningen just är lika med f_y, och $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$ (ekv. (1.7)). Uttrycket är detsamma som ekv. (4.7) med stålets beteckningar. Med $\bar{\lambda}$ ger EC3 8.3.1.3, formel (8.73)–(8.74), reduktionsfaktorn

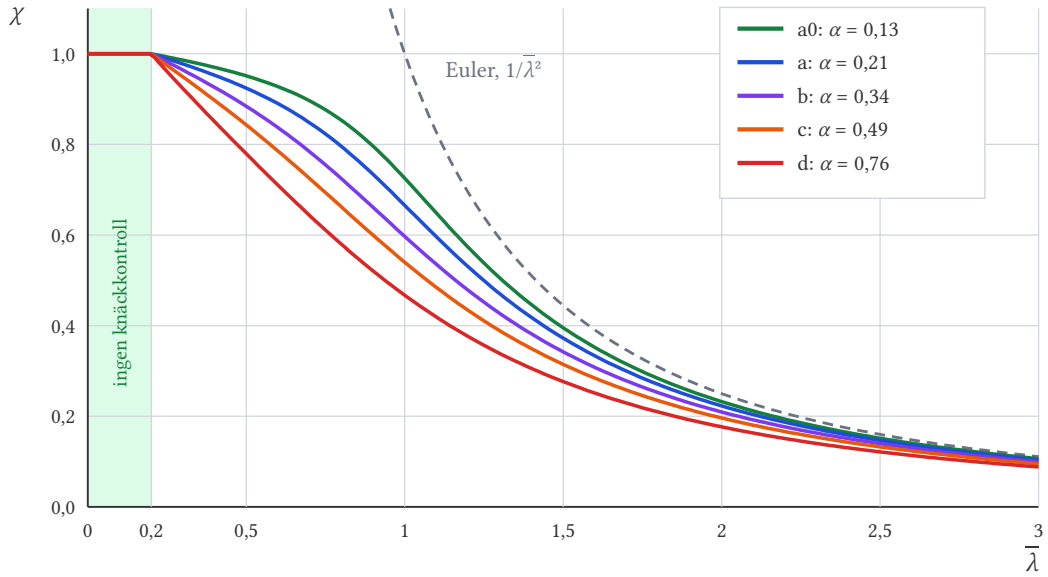
$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \le 1{,}0 \tag{4.30}$$

$$\Phi = 0{,}5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0{,}2\right) + \bar{\lambda}^2\right] \tag{4.31}$$

där **imperfektionsfaktorn** α beror på vilken **knäckkurva** som gäller (tabell 4.4). De fem kurvorna a0, a, b, c och d visas i figur 4.29. Kurva a0 hör till profiler med små imperfektioner och egenspänningar, kurva d till profiler med stora. I äldre litteratur och i kurskompendiet kallas kurvorna också **imperfektionsklasser**, och $\bar{\lambda}$ betecknas λ_c.

Tabell 4.4 Imperfektionsfaktorer för knäckkurvorna enligt EC3 tabell 8.2

Knäckkurva	**a0**	**a**	**b**	**c**	**d**
Imperfektionsfaktor α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76



Figur 4.29 Reduktionsfaktorn χ enligt ekv. (4.30) som funktion av den relativa slankheten $\bar{\lambda}$ för knäckkurvorna a0–d, och Eulerkurvan $\chi = 1/\bar{\lambda}^2$ (streckad). Skuggat: $\bar{\lambda} \le 0{,}2$, där ingen knäckkontroll behövs.

Kurvorna börjar på $\chi = 1{,}0$ vid $\bar{\lambda} = 0{,}2$ och närmar sig Eulerkurvan för stora slankheter. Mellan dem, där både flytning och instabilitet spelar roll, ligger de långt under båda gränserna; vid $\bar{\lambda} = 1{,}0$ är χ 0,73 för kurva a0 men 0,47 för kurva d.

Varifrån formeln kommer

Formeln för χ kan härledas ur samma resonemang som snittkraftsmetoden i avsnitt 4.7. Anta att pelaren har en initialkrokighet e och att den når sin bärförmåga när kantspänningen just blir f_y. Med förstoringen av utböjningen enligt ekv. (4.11) är villkoret

$$\frac{N}{A} + \frac{N\,e}{W(1 - N/N_{cr})} = f_y \tag{4.32}$$

Sätt $\chi = N/(Af_y)$ och den så kallade generaliserade imperfektionen $\eta = eA/W$. Med $N/N_{cr} = \chi\bar{\lambda}^2$ blir villkoret $(1-\chi)(1-\chi\bar{\lambda}^2) = \chi\eta$, en andragradsekvation i χ vars minsta rot är ekv. (4.30) med $\Phi = 0{,}5(1 + \eta + \bar{\lambda}^2)$. EC3 väljer $\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2)$: imperfektionen är noll upp till $\bar{\lambda} = 0{,}2$ och växer sedan med slankheten, och α samlar effekten av både krokighet och egenspänningar. Värdena är kalibrerade mot provningar och numeriska analyser av verkliga pelare.

Val av knäckkurva

Vilken kurva som gäller beror på hur profilen är tillverkad (valsad eller svetsad, varm- eller kallformad), på tvärsnittets form och godstjocklek, på stålsorten och på kring vilken axel pelaren knäcker. Tabell 4.5 återger de vanligaste fallen.

Tabell 4.5 Val av knäckkurva för böjknäckning, utdrag ur EC3 tabell 8.3; S460+ betyder S460–S700

Tvärsnitt	Gränser	Knäckning kring	S235–S420	S460+
Valsad I- eller H-profil	$h/b > 1{,}2$, $t_f \le 40$ mm	$y-y$	a	a0
		$z-z$	b	a
	$h/b > 1{,}2$, $t_f > 40$ mm	$y-y$	b	a
		$z-z$	c	b
	$h/b \le 1{,}2$, $t_f \le 100$ mm	$y-y$	b	a
		$z-z$	c	b
	$h/b \le 1{,}2$, $t_f > 100$ mm	båda	d	c
Svetsad I-profil	$t_f \le 40$ mm	$y-y$	b	b
		$z-z$	c	c
	$t_f > 40$ mm	$y-y$	c	c
		$z-z$	d	d
Konstruktionsrör	varmformat	båda	a	a0
	kallformat	båda	c	c
U-, T- och massiva profiler		båda	c	c
L-profil	valsad	båda	b	a

Två mönster är värda att lägga på minnet. Knäckning kring den veka axeln ger alltid en sämre kurva än kring den styva, av skälet i avsnitt 4.6.2. Och höghållfast stål (S460 och högre) får en bättre kurva, eftersom egenspänningarna är ungefär lika stora i alla stålsorter och därför utgör en mindre del av en högre sträckgräns. En HEB 200 ($h = b = 200$ mm, $t_f = 15$ mm) i S275 hamnar alltså på kurva b för knäckning kring $y-y$ och kurva c kring $z-z$, medan en IPE 300 ($h/b = 2{,}0$) får kurva a respektive b.

4.6.4 Slanka och oslanka pelare

För en kort pelare ger ekv. (4.30) $\chi = 1{,}0$: tvärsnittet flyter innan pelaren hinner böja ut nämnvärt. EC3 8.3.1.1(2) låter därför bli att kontrollera knäckning om

$$\bar{\lambda} \le 0{,}2 \qquad \text{eller} \qquad N_{Ed} \le 0{,}04\, N_{cr} \tag{4.33}$$

En sådan pelare kallas **oslank** och dimensioneras som ett tryckt tvärsnitt, $N_{Ed} \le N_{c,Rd} = A f_y/\gamma_{M0}$ (avsnitt 1.4.5). En pelare med $\bar{\lambda} > 0{,}2$ är **slank** och ska kontrolleras med ekv. (4.28). För S235 svarar gränsen mot ett slankhetstal $\lambda = L_{cr}/i \approx 19$, så i praktiken är nästan alla pelare i byggnader slanka.

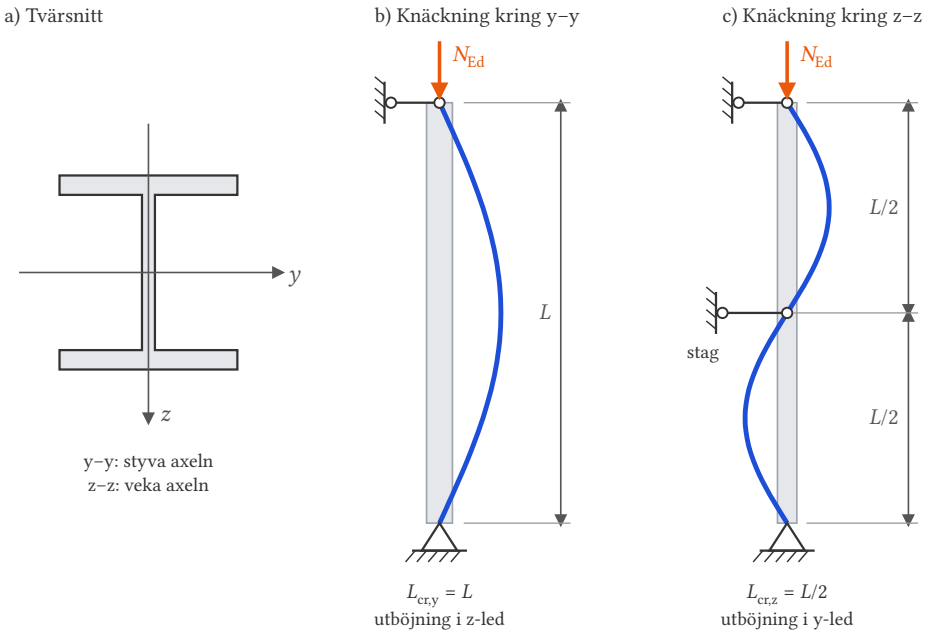
4.6.5 Knäcklängd och knäckriktning

Knäcklängden $L_{cr} = \beta L$ beror på hur pelarens ändar är fasthållna, se ekv. (4.4) och de teoretiska Eulerfallen i figur 4.3. EC3 definierar knäcklängden som längden hos en ledad pelare med samma kritiska last (EC3 3.1.7), men ger inga värden på β för enskilda pelare: knäcklängden ska bestämmas ur systemets knäckform (EC3 7.2.2(2)), och för kritiska laster hänvisas till en separat formelsamling (CEN/TR 1993-1-103). I kursen används de praktiska värdena i tabell 4.6. För de inspända fallen är de större än de teoretiska, eftersom ett stålförband och dess anslutning alltid ger efter något. De är ändå mindre än för trä (figur 4.23), där förbanden är mer eftergivliga.

Tabell 4.6 Knäcklängdsfaktorn β för stålpelare: teoretiska värden och de värden som används i praktiken, efter kompendiet Bärande konstruktioner del 2, figur S6.4

Upplag	Teoretiskt β	Praktiskt β
Ledad – ledad	1	1,0
Fast inspänd – fri	2	2,1
Fast inspänd – ledad, ändarna hållna i sidled	0,7	0,8
Fast inspänd – fast inspänd, ändarna hållna i sidled	0,5	0,6
Fast inspänd – fast inspänd, ändarna förskjutbara i sidled	1	1,2

En I-profil har olika böjstyvhet kring sina två axlar, och knäcklängden kan också vara olika i de två riktningarna, se figur 4.30. Knäckning **kring $y-y$** (styva axeln) ger utböjning i livets plan, och då gäller I_y, i_y och $L_{cr,y}$. Knäckning **kring $z-z$** (veka axeln) ger utböjning i flänsarnas plan, med I_z, i_z och $L_{cr,z}$. En vägg, ett bjälklag eller ett stag kan hålla pelaren i sidled i den ena riktningen men inte i den andra. Ett stag på halva höjden som verkar i den veka riktningen halverar $L_{cr,z}$ men påverkar inte $L_{cr,y}$.



Figur 4.30 a) Axlarna i en I-profil: $y-y$ är den styva axeln och $z-z$ den veka. b) Pelare som är ledad i båda ändar och knäcker kring $y-y$: utböjning i z-led med knäcklängden $L_{cr,y} = L$. c) Samma pelare med ett stag på halva höjden som bara verkar i den veka riktningen: vid knäckning kring $z-z$ bildas två halvvågor och $L_{cr,z} = L/2$.

Båda riktningarna ska kontrolleras, och den som ger lägst $N_{b,Rd}$ är dimensionerande. Den veka riktningen har både lägre i och sämre knäckkurva, så den avgör oftast om inte pelaren är stagad i den riktningen.

> **Notera:** Böjknäckning är inte den enda instabiliteten. Öppna, tunnväggiga tvärsnitt kan också knäcka genom vridning eller genom en kombination av böjning och vridning (EC3 8.3.1.4). För de dubbelsymmetriska I- och H-profiler som används i kursen är böjknäckning normalt avgörande, och vridknäckning behandlas inte.

4.6.6 Beräkningsgång

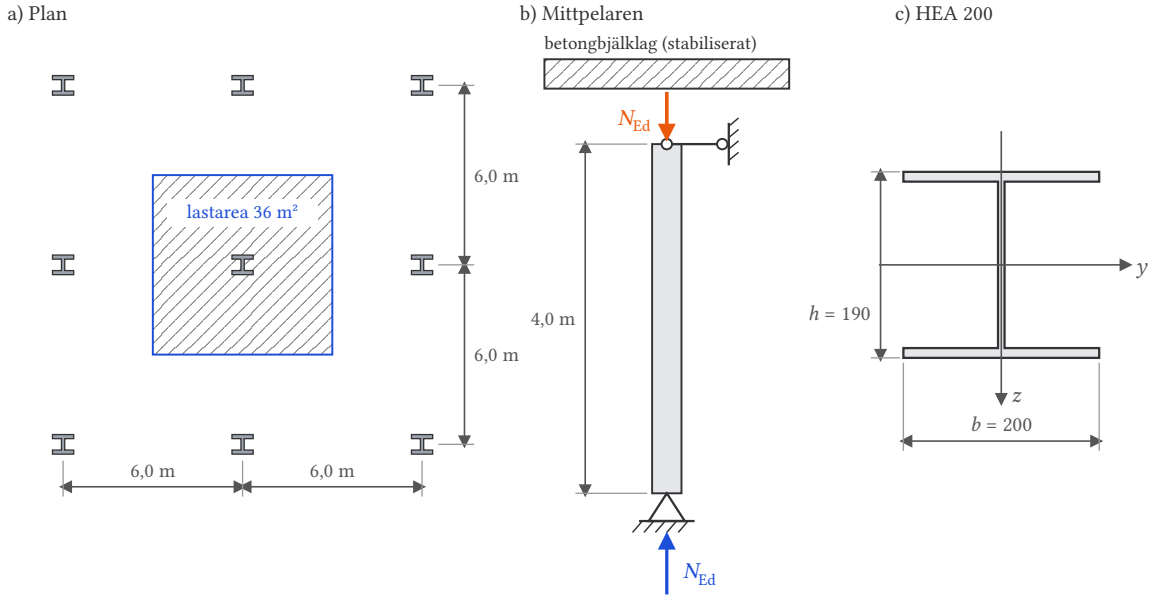
Bärförmågan hos en centriskt tryckt stålpelare kontrolleras så här:

1. Bestäm N_{Ed} och tvärsnittsklass; klass 1–3 ger $N_{b,Rd}$ enligt ekv. (4.28) med bruttoarean A.
2. Bestäm knäcklängderna $L_{cr,y}$ och $L_{cr,z}$ från upplagsförhållandena och eventuella stag.
3. Välj knäckkurva för varje riktning i tabell 4.5 och läs av α i tabell 4.4.
4. Beräkna $\bar{\lambda}$ med ekv. (4.29). Om $\bar{\lambda} \leq 0{,}2$ behövs ingen knäckkontroll.
5. Beräkna Φ och χ med ekv. (4.31) och ekv. (4.30), eller läs av χ i figur 4.29.

6. Kontrollera $N_{Ed} \leq N_{b,Rd}$ med det minsta χ.

Exempel 4.8 Fristående stålpelare i en lagerlokal

Ett betongbjälklag i en lagerlokal bärs av fristående stålpelare som står i ett rutnät med 6,0 × 6,0 m, se figur 4.31. Pelarna är 4,0 m höga, av profilen HEA 200 i S275, och kan betraktas som ledade i båda ändar; bjälklaget är stabiliserat i sitt plan av byggnadens väggar, så pelartopparna hålls i sidled i båda riktningarna. De dimensionerande lasterna på bjälklaget i brottgränstillståndet är $g_d = 5{,}0$ kN/m² (egentyngd) och $q_d = 10{,}0$ kN/m² (nyttig last). Kontrollera en mittpelare med avseende på knäckning.



Figur 4.31 a) Planen med mittpelarens lastarea 6,0 × 6,0 m (skrafferad). b) Mittpelaren frilagd: kraften från bjälklaget N_{Ed} verkar på pelartoppen, som hålls i sidled, och reaktionen N_{Ed} verkar vid den ledade foten. c) Tvärsnittet HEA 200 med axlarna y och z.

Last. Mittpelaren bär bjälklaget inom halva avståndet till grannpelarna åt alla håll, en lastarea på $6{,}0 \cdot 6{,}0 = 36$ m²:

$$N_{Ed} = (g_d + q_d) \cdot A_{last} = (5{,}0 + 10{,}0) \cdot 36 = 540 \text{ kN}$$

Material och tvärsnitt. S275 med $t_f = 10$ mm ≤ 40 mm ger $f_y = 275$ MPa (tabell 1.8) och $\varepsilon = \sqrt{235/275} = 0{,}924$. Ur profiltabellen för HEA 200: $A = 5\,383$ mm², $h = 190$ mm, $b = 200$ mm, $t_w = 6{,}5$ mm, $t_f = 10$ mm, $r = 18$ mm, $i_y = 82{,}8$ mm och $i_z = 49{,}8$ mm.

Tvärsnittsklass. Flänsens utstickande del är $c = (b - t_w - 2r)/2 = (200 - 6{,}5 - 36)/2 = 78{,}8$ mm, och livets fria höjd $c = h - 2t_f - 2r = 190 - 20 - 36 = 134$ mm. Med gränserna i tabell 1.10:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{78{,}8}{10} = 7{,}9 < 9\varepsilon = 8{,}3$$

$$\frac{c}{t_w} = \frac{134}{6{,}5} = 20{,}6 < 28\varepsilon = 25{,}9$$

så både fläns och liv är i klass 1, och hela arean A får räknas.

Knäcklängder. Pelaren är ledad i båda ändar i båda riktningarna, så ekv. (4.4) ger $L_{cr,y} = L_{cr,z} = 1{,}0 \cdot 4{,}0 = 4{,}0$ m.

Knäckkurvor. Valsad H-profil med $h/b = 190/200 = 0{,}95 \leq 1{,}2$ och $t_f \leq 100$ mm i S275: tabell 4.5 ger kurva b ($\alpha = 0{,}34$) kring y –y och kurva c ($\alpha = 0{,}49$) kring z –z.

Relativ slankhet. ekv. (4.29) ger $\lambda_1 = 93{,}9 \cdot 0{,}924 = 86{,}8$ och

$$\bar{\lambda}_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z\,\lambda_1} = \frac{4\,000}{49{,}8 \cdot 86{,}8} = 0{,}925, \qquad \bar{\lambda}_y = \frac{4\,000}{82{,}8 \cdot 86{,}8} = 0{,}557$$

Båda är större än 0,2, så pelaren är slank i båda riktningarna.

Reduktionsfaktor, veka riktningen. ekv. (4.31) och ekv. (4.30) med kurva c:

$$\Phi_z = 0{,}5\bigl[1 + 0{,}49 \cdot (0{,}925 - 0{,}2) + 0{,}925^2\bigr] = 1{,}106$$

$$\chi_z = \frac{1}{1{,}106 + \sqrt{1{,}106^2 - 0{,}925^2}} = 0{,}584$$

Reduktionsfaktor, styva riktningen. På samma sätt med kurva b:

$$\Phi_y = 0{,}5\bigl[1 + 0{,}34 \cdot (0{,}557 - 0{,}2) + 0{,}557^2\bigr] = 0{,}715$$

$$\chi_y = \frac{1}{0{,}715 + \sqrt{0{,}715^2 - 0{,}557^2}} = 0{,}858$$

Bärförmåga. Den veka riktningen har lägst χ och är dimensionerande. Ekv. (4.28) ger

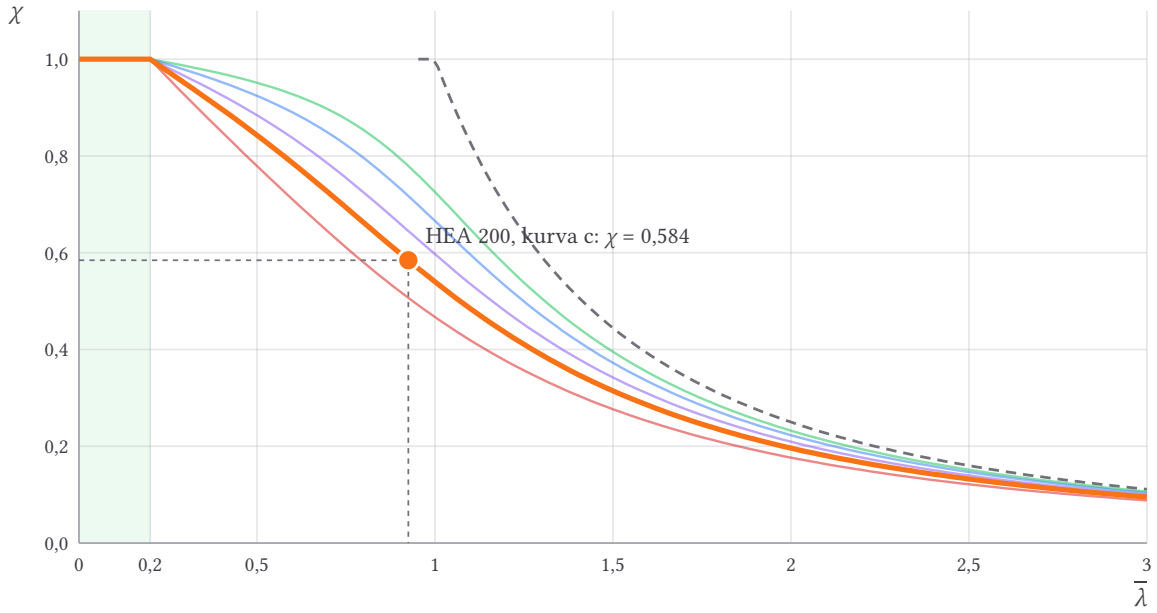
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi_z\, A\, f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0{,}584 \cdot 5\,383 \cdot 275}{1{,}0} = 865 \cdot 10^3 \text{ N} = 865 \text{ kN}$$

Kontroll.

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} = \frac{540}{865} = 0{,}62 \le 1{,}0$$

Pelaren har tillräcklig bärförmåga, med ungefär 40 procents marginal. Knäckningen kring den veka axeln reducerar bärförmågan till 58 procent av flytkraften $A f_y = 1\,480$ kN; kring den styva axeln hade reduktionen bara varit till 86 procent. Om pelaren i stället hade stått fritt utan stabilisering i toppen, med fast inspänd fot ($\beta = 2{,}1$ enligt tabell 4.6), hade $\bar{\lambda}_z$ blivit 1,94 och $N_{b,Rd}$ bara cirka 300 kN, se figur 4.32.

Figur 4.32 visar samma pelare. Där kan profil, stålsort, knäckriktning och knäcklängd ändras, och punkten $(\bar{\lambda}, \chi)$ flyttas längs den kurva som tabell 4.5 ger.



Figur 4.32 Knäckkurvorna a0–d och Eulerkurvan med pelarens punkt $(\bar{\lambda}, \chi)$ och bärförmågan $N_{b,Rd}$ för vald valsad profil, stålsort, knäckriktning och knäcklängd. Startläget är mittpelaren i exempel 4.8.

Notera: EKS (BFS 2024:6) hänvisar fortfarande till den tidigare utgåvan SS-EN 1993-1-1:2005. Partialkoefficienten för instabilitet är densamma, $\gamma_{M1} = 1{,}0$ (EKS tabell 3:9). Knäckkurvorna och α är också desamma, men paragraferna har andra nummer (6.3.1, tabell 6.1 och 6.2 i den äldre utgåvan). Den största skillnaden gäller initialkrokigheten i snittkraftsmetoden, som den äldre utgåvan anger som ett fast värde $e_0 = L/\alpha_{bow}$ se avsnitt 4.7.3.

4.7 Stålpelare: snittkraftsmetoden

Det här avsnittet visar hur en stålpelare som både trycks och böjs kontrolleras i kursen: med **snittkraftsmetoden**. Pelarens moment beräknas enligt andra ordningens teori, med en ekvivalent initialkrokighet som representerar alla imperfektioner, och det tvärsnitt där momentet är störst kontrolleras sedan för normalkraften och momentet tillsammans. Avsnittet bygger på andra ordningens moment i avsnitt 4.2 och interaktionen mellan normalkraft och moment i avsnitt 4.3. Som i hela kapitlet är N_{Ed} tryckkraftens storlek.

4.7.1 Varför snittkraftsmetoden

Knäckkurvan i avsnitt 4.6 gäller en pelare med enbart normalkraft. När pelaren dessutom böjs, av en sidolast som vind, av ändmoment eller av en excentriskt angripande last, samverkar momentet med andra ordningens effekter. EC3 har en egen metod för detta: kontroll med knäckkurvorna för böjknäckning (χ) och vippning (χ_{LT}) kombinerade med **interaktionsfaktorer** k_{yy}, k_{yz}, k_{zy} och k_{zz} (EC3 8.3.3, formel (8.88) och (8.89)). Metoden är relativt komplicerad och **används inte i kursen**.

I stället används snittkraftsmetoden, som bygger direkt på mekaniken:

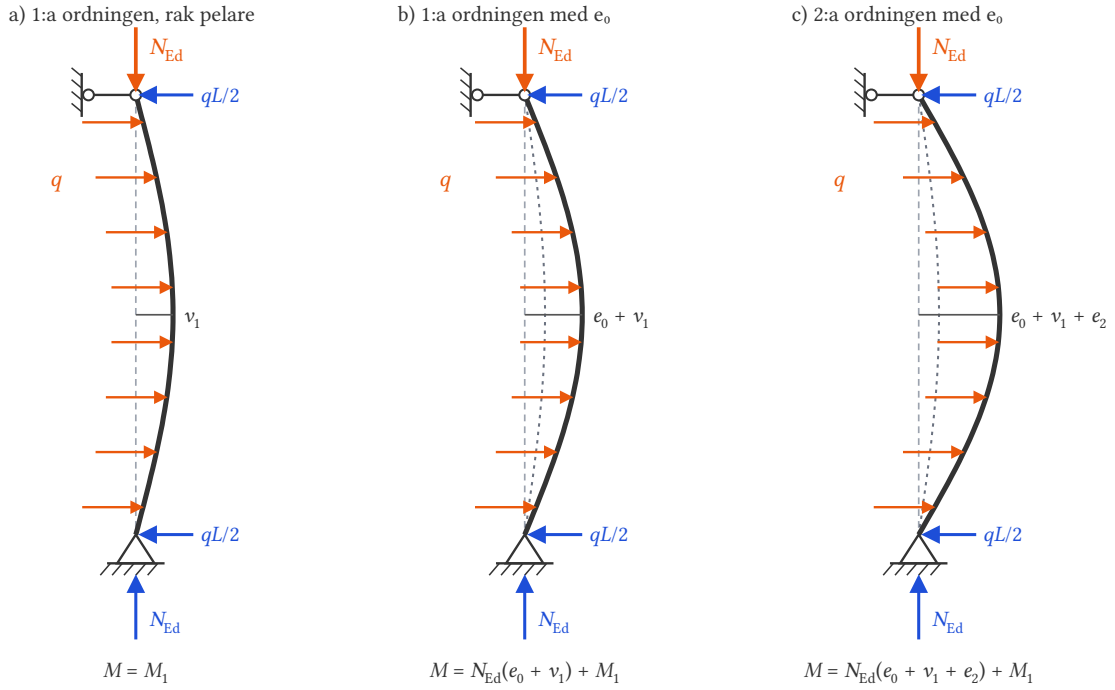
1. Beräkna det dimensionerande momentet M_{Ed} enligt andra ordningens teori, med en initialkrokighet e_0 som täcker pelarens imperfektioner och egenspänningar.
2. Kontrollera att tvärsnittet bär N_{Ed} och M_{Ed} samtidigt, elastiskt eller plastiskt.

Imperfektionerna ingår alltså i analysen, och därför behövs ingen separat knäckkontroll i pelarens böjningsplan. I EC3:2022 svarar det mot analysmetoderna M4 och M5 i 7.2.2: när andra ordningens effekter och initialkrokigheter ingår i analysen kontrolleras tvärsnittet med γ_{M1} i stället för γ_{M0} (båda är 1,0) och knäckkontrollen enligt 8.3 i planet kan utgå. Metoden förutsätter att pelaren inte kan knäcka eller vippa ut ur böjningsplanet, till exempel för att den är stagad i sin veka riktning.

4.7.2 Utböjning och moment enligt första och andra ordningen

Figur 4.33 visar en pelare som är ledad i båda ändar och belastas av en tryckkraft N_{Ed} och en jämnt utbredd sidolast q. Momentet byggs upp i tre steg:

- **a) Första ordningen, rak pelare.** Sidolasten ger det vanliga balkmomentet M_1, här $qL^2/8$ i mittsnittet, och en utböjning v_1, här $5qL^4/(384EI)$. Andra fall finns i elementarfallen i avsnitt 5.3. Normalkraften ger inget moment eftersom pelaren är rak.
- **b) Första ordningen med initialkrokighet.** Pelaren antas ha en initialkrokighet e_0 i mitten, i samma riktning som v_1 (det ogynnsamma fallet). Normalkraften får då hävarmen $e_0 + v_1$ och ger ett tillskott $N_{Ed}(e_0 + v_1)$ till momentet.
- **c) Andra ordningen.** Tillskottet böjer ut pelaren ytterligare med e_2, som i sin tur ökar momentet, och så vidare. Jämvikten ställs upp i det utböjda läget.



Figur 4.33 Pelare ledad i båda ändar med tryckkraften N_{Ed} och sidolasten q toppen hålls i sidled. Stödreaktionerna (blå) är N_{Ed} vid foten och $qL/2$ vid varje upplag. a) Första ordningens utböjning v_1 och moment M_1 för en rak pelare. b) Med initialkrokigheten e_0 (prickad) får normalkraften hävarmen $e_0 + v_1$. c) Andra ordningens tillskott e_2 ger det totala momentet $M = N_{Ed}(e_0 + v_1 + e_2) + M_1$.

Det dimensionerande momentet i mittsnittet blir

$$M_{Ed} = N_{Ed}(e_0 + v_1 + e_2) + M_1 \tag{4.34}$$

Den totala utböjningen $e_0 + v_1 + e_2$ fås ur förstoringen i ekv. (4.11): första ordningens utböjning $e_0 + v_1$ förstoras med faktorn $1/(1 - N_{Ed}/N_{cr})$, där N_{cr} är Eulerlasten ekv. (4.3) för knäckning i böjningsplanet. Insatt i ekv. (4.34):

$$M_{Ed} = N_{Ed} \cdot \frac{e_0 + v_1}{1 - N_{Ed}/N_{cr}} + M_1 = N_{Ed} \cdot \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N_{Ed}} \cdot (e_0 + v_1) + M_1 \tag{4.35}$$

Det är andra ordningens moment på samma form som ekv. (4.8). Momentet består av fyra delar som var och en har en tydlig orsak:

- N_{Ed}, den dimensionerande normalkraften;
- N_{cr}, Eulerlasten, som avgör hur mycket utböjningen förstoras;
- M_1 och v_1, första ordningens moment och utböjning från de laster som böjer pelaren (sidolast eller ändmoment);

- e_0, initialkrokigheten, som också täcker egenspänningarna.

I kapitlets allmänna del står e_0 för hela första ordningens excentricitet (avsnitt 4.2). För stålpelare i kursen är det bara den ekvivalenta initialkrokigheten, som i EC3; en avsiktlig excentricitet e hos lasten tas i stället med i M_1 som $N_{Ed} \cdot e$.

Formeln förutsätter att utböjningen har ungefär formen av en halv sinusvåg, vilket stämmer väl för en ledad pelare med utbredd sidolast eller en punktlast i mitten. Momentet M_1 förstoras inte separat: dess andra ordningens tillskott ingår redan genom v_1.

4.7.3 Ekvivalent initialkrokighet

Initialkrokigheten e_0 i snittkraftsmetoden är inte pelarens verkliga krokighet. Den är en **ekvivalent** krokighet som ska ge samma bärförmåga som en verklig pelare med både krokighet och egenspänningar. Den är därför större än toleransen $L/1000$, och den beror på knäckkurvan, som ju beskriver hur stora egenspänningarna är. EC3 7.3.3.1, formel (7.9), ger

$$e_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \beta_{bow} \cdot L \tag{4.36}$$

där α är imperfektionsfaktorn för pelarens knäckkurva (tabell 4.4 och tabell 4.5), $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$, L pelarens längd och β_{bow} en referenskrokighet som beror på knäckaxeln och på om tvärsnittet kontrolleras elastiskt eller plastiskt (tabell 4.7). I EC3 betecknas den β här används β_{bow} för att den inte ska förväxlas med knäcklängdsfaktorn i ekv. (4.4).

Tabell 4.7 Referenskrokigheten β_bow (β i EC3) enligt EC3 tabell 7.1

Knäckning kring	Elastisk tvärsnittskontroll	Plastisk tvärsnittskontroll
$y-y$	1/110	1/75
$z-z$	1/200	1/68

Ett högre f_y ger mindre ε och alltså större e_0 för samma längd. Det kompenserar att en pelare av höghållfast stål är slankare relativt sin sträckgräns. Plastisk kontroll kräver större e_0 än elastisk, eftersom tvärsnittet då tillgodoräknas mer bärförmåga. Tabell 4.8 visar vad formeln ger uttryckt som L/e_0.

Tabell 4.8 L/e_0 enligt [](eq:stal-snittkraft-e0) för knäckning kring y–y. Beräknat ur EC3 tabell 7.1 och 8.2.

Knäckkurva	Elastisk, S235	Elastisk, S355	Plastisk, S235	Plastisk, S355
a0	846	688	577	469
a	524	426	357	291
b	324	263	221	179
c	224	183	153	125
d	145	118	99	80

Den tidigare utgåvan av EC3, som EKS och äldre kursmaterial hänvisar till, angav i stället fasta värden $e_0 = L/\alpha_{bow}$ oberoende av stålsort: α_{bow} = 350, 300, 250, 200 och 150 för kurva a0–d vid elastisk analys och 300, 250, 200, 150 och 100 vid plastisk analys. För S235 ger den nya formeln mindre e_0 än förut för kurva a0–b och ungefär samma för kurva c–d; för S355 blir e_0 större än förut för kurva b–d.

> **Obs:** Bärförmågan beror mycket på att e_0 läggs åt det ogynnsamma hållet, det vill säga åt samma håll som utböjningen från sidolasten. Om sidolasten kan verka åt båda hållen (vind som tryck eller sug) är det den största summan $e_0 + v_1$ som gäller.

4.7.4 Tvärsnittets bärförmåga

Tvärsnittet i det snitt där M_{Ed} är störst ska bära N_{Ed} och M_{Ed} samtidigt. Kontrollen kan göras elastiskt för alla tvärsnittsklasser eller plastiskt för klass 1 och 2. Hur interaktionsdiagrammet ser ut för olika material beskrivs i avsnitt 4.3. Initialkrokigheten e_0 är kalibrerad tillsammans med ett bestämt tvärsnittsvillkor, och vid plastisk kontroll beror det därför på knäckaxeln vilket samband som får användas (EC3 7.3.3.1(2)): det

linjära sambandet kring y –y och den fullständiga plastiska interaktionen, med ett uppdelat spänningsblock, kring z –z. Se Vilken interaktion får användas?.

Elastisk kontroll

Med elastisk kontroll får spänningen inte överstiga sträckgränsen någonstans i tvärsnittet. För tryck och böjning kring y –y blir villkoret i den mest tryckta kantfibern (EC3 8.2.9.2)

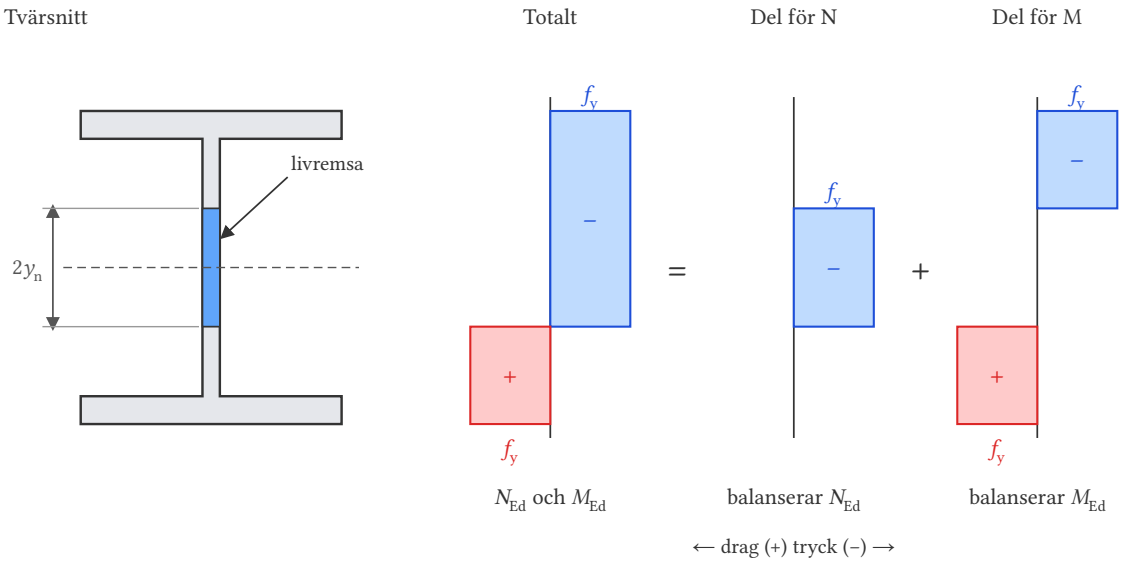
$$\sigma_{max} = \frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{Ed}}{W_{el,y}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \tag{4.37}$$

Med $N_{pl,Rd} = Af_y/\gamma_{M1}$ och $M_{el,Rd} = W_{el,y}f_y/\gamma_{M1}$ är det samma sak som den räta linjen ekv. (4.12). Initialkrokigheten tas då med β_{bow} för elastisk kontroll.

Plastisk kontroll med uppdelat spänningsblock

I klass 1 och 2 kan hela tvärsnittet plasticeras. Spänningen är då f_y i tryck på ena sidan om neutrallagret och f_y i drag på den andra. Tvärsnittets bärförmåga bestäms genom att **dela upp spänningsblocket**, se figur 4.34, som visar böjning kring y –y:

- En del av tvärsnittet, symmetrisk kring tyngdpunkten, tar normalkraften. För en I-profil räcker ofta en remsa av livet med höjden $2y_n$.
- Resten av tvärsnittet har lika stora tryck- och dragdelar på var sin sida och tar momentet.



Figur 4.34 Plastisk spänningsfördelning i en I-profil med tryckkraft och moment, uppdelad i två delar. Livremsan med höjden $2y_n$ kring tyngdpunkten är tryckt med f_y och balanserar N_{Ed} resten av tvärsnittet, tryckt ovanför och draget nedanför remsan, balanserar M_{Ed}. Drag (+) är ritat till vänster och tryck (–) till höger.

Om normalkraften ryms i livet ger jämvikten för remsan

$$y_n = \frac{N_{Ed}\,\gamma_{M1}}{2\,t_w\,f_y} \tag{4.38}$$

och det tvärsnitt som är kvar för momentet är hela tvärsnittet minus remsan. Remsans bidrag till det plastiska böjmotståndet är $t_w y_n^2$, så den reducerade momentkapaciteten blir

$$M_{N,Rd} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}}\left(W_{pl,y} - t_w\,y_n^2\right) \tag{4.39}$$

Uttrycket gäller så länge remsan ligger i livets raka del, $2y_n \leq h - 2t_f - 2r$. Annars når neutrallagret flänsen och momentkapaciteten sjunker snabbare. För valsade I- och H-profiler ger EC3 8.2.9.1(5), formel (8.48), en approximation som gäller över hela området, ekv. (4.14) i avsnitt 4.3.

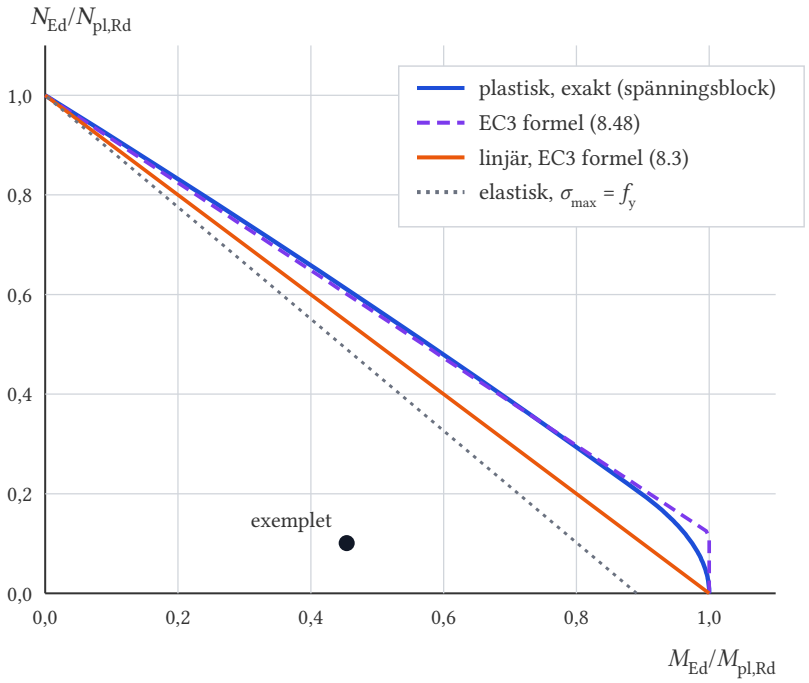
Enligt formel (8.45) och (8.46) behöver normalkraftens inverkan på $M_{pl,y,Rd}$ inte beaktas alls om $N_{Ed} \leq 0{,}25N_{pl,Rd}$ och $N_{Ed} \leq 0{,}5h_w t_w f_y/\gamma_{M0}$, med livhöjden $h_w = h - 2t_f$: då ryms normalkraften i halva livet och reduktionen blir liten.

Spänningsblocket ger den **fullständiga plastiska interaktionen**, det vill säga vad tvärsnittet verkligen kan bära. I snittkraftsmetoden med plastisk initialkrokighet används den vid **böjning kring z –z**. Uppdelningen görs då på samma sätt: livet och de mittersta delarna av flänsarna tar normalkraften, och flänsarnas yttre delar tar momentet. Livet ligger nära z-axeln och bidrar nästan inget till $M_{pl,z}$. Så länge normalkraften ryms i livet, $N_{Ed} \leq h_w t_w f_y/\gamma_{M0}$ (formel (8.47)), behöver ingen reduktion göras. För valsade I- och H-profiler ger EC3 8.2.9.1(5), formel (8.49) och (8.50),

$$\begin{aligned} M_{N,z,Rd} &= M_{pl,z,Rd} \qquad \text{för } n \leq a \\ M_{N,z,Rd} &= M_{pl,z,Rd}\left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a}\right)^2\right] \qquad \text{för } n > a \end{aligned} \tag{4.40}$$

med n och a som i ekv. (4.14). Kring y –y får den fullständiga plastiska interaktionen inte kombineras med den plastiska initialkrokigheten. Där används den i kursen bara när momentet inte innehåller någon ekvivalent krokighet, till exempel för en oslank pelare ($\bar{\lambda} \leq 0{,}2$) där första ordningens moment räcker.

Figur 4.35 jämför de olika interaktionssambanden för en HEA 120. Den plastiska kurvan ligger nästan på M_{pl} för små normalkrafter, eftersom livet nära tyngdpunkten bidrar lite till böjmotståndet. Den linjära kontrollen och särskilt den elastiska ligger innanför. Att EC3:2022 ändå kräver det linjära sambandet kring y –y beror på att initialkrokigheten är kalibrerad för det.



Figur 4.35 Interaktionsdiagram för HEA 120, böjning kring y –y: exakt plastisk interaktion med uppdelat spänningsblock (utan hänsyn till hålkälen), approximationen ekv. (4.14), det linjära sambandet ekv. (4.41) och den elastiska gränsen ekv. (4.37). Punkten är det dimensionerande lastfallet i exempel 4.9, som kontrolleras med det linjära sambandet.

Vilken interaktion får användas?

Initialkrokigheten i tabell 4.7 är kalibrerad tillsammans med ett bestämt tvärsnittsvillkor. Med β_{bow} för elastisk kontroll används det elastiska villkoret ekv. (4.37) kring båda axlarna. När e_0 är bestämt för plastisk kontroll anger EC3 7.3.3.1(2) vilket plastiskt samband som ska användas:

- **Knäckning och böjning kring $y-y$**, med $\beta_{bow} = 1/75$: det linjära sambandet i EC3 8.2.1(7), formel (8.3),

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rd}} \leq 1{,}0 \tag{4.41}$$

- **Knäckning och böjning kring $z-z$**, med $\beta_{bow} = 1/68$: den plastiska interaktionen i 8.2.9, det vill säga uppdelat spänningsblock eller ekv. (4.40), men med den plastiska momentkapaciteten begränsad till $M_{pl,z,Rd} \leq 1{,}25\, M_{el,z,Rd}$. För I- och H-profiler är $W_{pl,z}/W_{el,z} \approx 1{,}5$, så begränsningen gäller nästan alltid.

För en pelare som böjs kring den styva axeln är kontrollen i snittkraftsmetoden alltså ekv. (4.35) med $\beta_{bow} = 1/75$ följd av ekv. (4.41). Det är den kontroll som används i exempel 4.9 och i övningsuppgifterna.

> **Obs:** Den första generationen av EC3, EN 1993-1-1:2005, angav den ekvivalenta initialkrokigheten för plastisk kontroll som fasta värden (5.3.2(3), tabell 5.1): $e_0 = L/300$, $L/250$, $L/200$, $L/150$ och $L/100$ för knäckkurva a0–d, oberoende av knäckaxel och stålsort. Sverige gjorde inget nationellt val här. Krokigheten kombinerades med den fullständiga plastiska interaktionen $M_{Ed} \leq M_{N,Rd}$ (6.2.9) kring båda axlarna, och så räknar också kurskompendiet (formel (S7-2)–(S7-4)), föreläsningsbilderna och de äldre lösningarna till exempelsamlingens SP-uppgifter. Den första generationen lade alltså säkerhetsmarginalen i initialkrokigheten, som för S235 är större än i den nya utgåvan (se tabell 4.8 och jämförelsen ovan). EN 1993-1-1:2022 gör i stället $e_0 = (\alpha/\varepsilon)\beta_{bow} L$ beroende av knäckaxel och stålsort och kräver det linjära sambandet kring $y-y$.

4.7.5 Vippning

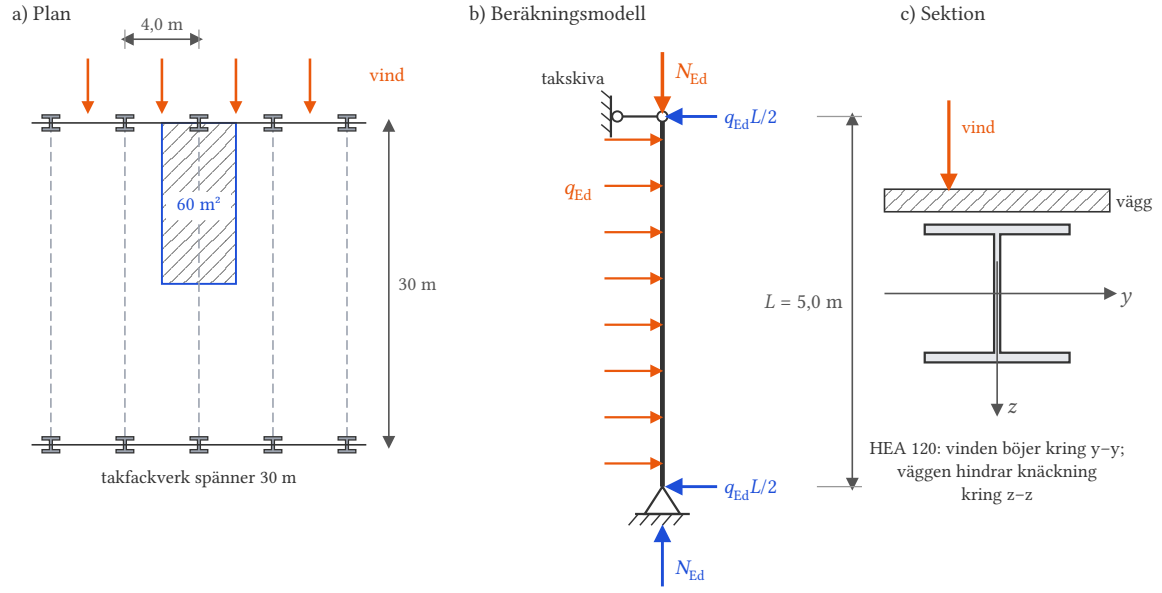
En böjd I-profil vars tryckta fläns inte är stagad i sidled kan **vippa** (*lateral torsional buckling*): den tryckta flänsen knäcker i sidled och tvärsnittet vrider sig. Vippning är en egen instabilitet som reducerar momentkapaciteten (EC3 8.3.2). Snittkraftsmetoden i kursen förutsätter att pelaren är stagad så att den inte kan vippa, till exempel av en vägg som håller den tryckta flänsen. Vid vindsug byter flänsarna roll, och då måste också den inre flänsen vara stagad, annars krävs en kontroll av vippning, vilket inte ingår i kursen.

4.7.6 Beräkningsgång

1. Bestäm lastkombinationerna och för var och en N_{Ed}, sidolasten och första ordningens moment M_1 och utböjning v_1 (elementarfall).
2. Beräkna N_{cr} för knäckning i böjningsplanet med ekv. (4.3) och ekv. (4.4).
3. Välj knäckkurva (tabell 4.5) och bestäm e_0 med ekv. (4.36), med β_{bow} för knäckaxeln och för elastisk eller plastisk kontroll.
4. Beräkna andra ordningens moment M_{Ed} med ekv. (4.35).
5. Kontrollera tvärsnittet: elastiskt med ekv. (4.37), eller plastiskt (klass 1–2), kring $y-y$ med det linjära sambandet ekv. (4.41) och kring $z-z$ med uppdelat spänningsblock eller ekv. (4.40) och $M_{pl,z,Rd} \leq 1{,}25\, M_{el,z,Rd}$.
6. Kontrollera att pelaren är stagad ut ur planet; annars krävs också knäckkontroll kring den andra axeln enligt avsnitt 4.6 och kontroll av vippning.

Exempel 4.9 Fasadpelare med vind och snö

En enplans hallbyggnad har takfackverk som spänner 30 m mellan långsidorna. Fackverken vilar på fasadpelare av HEA 120 i S355 ($f_y = 355$ MPa) som står med 4,0 m mellanrum och är 5,0 m höga, se figur 4.36. Pelarna är ledade vid foten och hålls i toppen av takskivan (skivverkan). Ytterväggen stagar dem i den veka riktningen, även mot vippning. Karakteristiska laster: egentyngd av tak inklusive fackverk $g_k = 0{,}5$ kN/m², snölast $s_k = 0{,}8$ kN/m² ($\psi_0 = 0{,}7$) och vindlast mot fasaden $w_k = 0{,}7$ kN/m² ($\psi_0 = 0{,}6$). Kontrollera pelarna för lastkombinationerna med vind och snö; tvärsnittet får kontrolleras plastiskt.



Figur 4.36 a) Planen: fasadpelare med 4,0 m mellanrum längs långsidorna och takfackverk som spänner 30 m; skrafferat är takytan som en pelare bär, $4{,}0 \cdot 15$ m. b) Beräkningsmodellen: pelaren är ledad vid foten, hålls i sidled i toppen av takskivan och belastas av N_{Ed} från taket och vindlasten q_{Ed} reaktionerna (blå) är N_{Ed} vid foten och $q_{Ed}L/2$ vid varje upplag. c) Sektion: vinden böjer HEA 120 kring den styva axeln $y-y$, och väggen hindrar utböjning kring $z-z$.

Laster och lastkombinationer. Varje pelare bär taket inom halva fackverkets spännvidd och halva avståndet till grannpelarna, $4{,}0 \cdot 15 = 60$ m², och vindlasten på en 4,0 m bred del av fasaden. Lasterna kombineras enligt EN 1990, formel (6.10), med de rekommenderade partialkoefficienterna $\gamma_G = 1{,}35$ och $\gamma_Q = 1{,}5$: permanent last $1{,}35G_k$, huvudlasten $1{,}5Q_k$ och övriga variabla laster $1{,}5\psi_0 Q_k$. Kombinationsfaktorerna är de som EN 1990 bilaga A1 rekommenderar för de nordiska länderna: $\psi_0 = 0{,}7$ för snö och 0,6 för vind. Med snö som huvudlast:

$$N_{Ed} = 60 \cdot (1{,}35 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}8) = 112{,}5 \text{ kN}$$

$$q_{Ed} = 1{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 4{,}0 = 2{,}52 \text{ kN/m}$$

Med vind som huvudlast:

$$N_{Ed} = 60 \cdot (1{,}35 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8) = 90{,}9 \text{ kN}$$

$$q_{Ed} = 1{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 4{,}0 = 4{,}20 \text{ kN/m}$$

Kombinationen med enbart permanent last, $1{,}35G_k$, ger bara $N_{Ed} = 40{,}5$ kN utan vind och är inte dimensionerande.

Tvärsnitt och material. Ur profiltabellen för HEA 120: $A = 2\,534$ mm², $I_y = 6{,}06 \cdot 10^6$ mm⁴, $W_{pl,y} = 119 \cdot 10^3$ mm³, $W_{el,y} = 106 \cdot 10^3$ mm³, $h = 114$ mm, $b = 120$ mm, $t_w = 5$ mm, $t_f = 8$ mm och $r = 12$ mm. Med $\varepsilon = \sqrt{235/355} = 0{,}814$ är flänsen ($c/t_f = 45{,}5/8 = 5{,}7 < 9\varepsilon = 7{,}3$) och livet ($c/t_w = 74/5 = 14{,}8 < 28\varepsilon = 22{,}8$) i klass 1 (tabell 1.10). Bärförmågorna är

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M1}} = 2\,534 \cdot 355 = 900 \text{ kN}$$

$$M_{pl,y,Rd} = \frac{W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M1}} = 119 \cdot 10^3 \cdot 355 = 42{,}2 \text{ kNm}$$

Eulerlast. Pelaren är ledad i båda ändar, $L_{cr} = L = 5{,}0$ m, och ekv. (4.3) ger för knäckning kring $y-y$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 6{,}06 \cdot 10^6}{5\,000^2} = 502 \cdot 10^3 \text{ N} = 502 \text{ kN}$$

Initialkrokighet. Valsad H-profil med $h/b = 0{,}95 \le 1{,}2$, knäckning kring y –y: kurva b, $\alpha = 0{,}34$ (tabell 4.5). Plastisk kontroll kring y –y ger $\beta_{bow} = 1/75$ (tabell 4.7), och ekv. (4.36) ger

$$e_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \beta_{bow} \cdot L = \frac{0{,}34}{0{,}814} \cdot \frac{1}{75} \cdot 5\,000 = 27{,}9 \text{ mm} \approx L/180$$

Första ordningen, vind som huvudlast. Elementarfallet för en fritt upplagd balk med jämnt utbredd last (avsnitt 5.3):

$$M_1 = \frac{q_{Ed} L^2}{8} = \frac{4{,}20 \cdot 5{,}0^2}{8} = 13{,}1 \text{ kNm}$$

$$v_1 = \frac{5 q_{Ed} L^4}{384 EI_y} = \frac{5 \cdot 4{,}20 \cdot 5\,000^4}{384 \cdot 210\,000 \cdot 6{,}06 \cdot 10^6} = 26{,}9 \text{ mm}$$

Andra ordningens moment, vind som huvudlast. Förstoringsfaktorn är $1/(1 - 90{,}9/502) = 1/(1 - 0{,}181) = 1{,}221$, och ekv. (4.35) ger

$$M_{Ed} = 90{,}9 \cdot \frac{(27{,}9 + 26{,}9) \cdot 10^{-3}}{1 - 0{,}181} + 13{,}1 = 6{,}1 + 13{,}1 = 19{,}2 \text{ kNm}$$

Andra ordningens tillskott till utböjningen är $e_2 = 0{,}221 \cdot (27{,}9 + 26{,}9) = 12{,}1$ mm.

Andra ordningens moment, snö som huvudlast. På samma sätt blir $M_1 = 2{,}52 \cdot 5{,}0^2/8 = 7{,}88$ kNm, $v_1 = 26{,}9 \cdot 2{,}52/4{,}20 = 16{,}1$ mm och $N_{Ed}/N_{cr} = 112{,}5/502 = 0{,}224$:

$$M_{Ed} = 112{,}5 \cdot \frac{(27{,}9 + 16{,}1) \cdot 10^{-3}}{1 - 0{,}224} + 7{,}88 = 6{,}37 + 7{,}88 = 14{,}25 \text{ kNm}$$

Tvärsnittskontroll. Initialkrokigheten är bestämd för plastisk kontroll kring y –y, så tvärsnittet kontrolleras med det linjära sambandet ekv. (4.41) (EC3 7.3.3.1(2)). Vind som huvudlast:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{pl,y,Rd}} = \frac{90{,}9}{900} + \frac{19{,}2}{42{,}2} = 0{,}101 + 0{,}455 = 0{,}56 \le 1{,}0$$

Snö som huvudlast:

$$\frac{112{,}5}{900} + \frac{14{,}25}{42{,}2} = 0{,}125 + 0{,}337 = 0{,}46 \le 1{,}0$$

Pelaren klarar båda lastkombinationerna, och lastfallet med vind som huvudlast är dimensionerande med utnyttjandet 0,56. Momentet domineras av vinden: normalkraftens bidrag $N_{Ed}(e_0 + v_1 + e_2) = 6{,}1$ kNm är knappt en tredjedel av M_{Ed}, och av det är andra ordningens del $N_{Ed} e_2 = 1{,}1$ kNm. Med den äldre utgåvans arbetssätt, full plastisk interaktion med uppdelat spänningsblock, hade momentkapaciteten bara minskat med knappt 3 procent och utnyttjandet blivit lägre; enligt EC3:2022 är det linjära sambandet kontrollen kring y –y (se Obs i Vilken interaktion får användas?). Utan stagningen från väggen hade pelaren också behövt kontrolleras för knäckning kring z –z med $i_z = 30{,}2$ mm och $L_{cr} = 5{,}0$ m blir $\bar{\lambda}_z = 2{,}17$, kurva c och $N_{b,Rd} = 154$ kN, så redan normalkraften med snö som huvudlast hade utnyttjat 73 procent av bärförmågan. Punkten för vind som huvudlast är inritad i figur 4.35.

Betong

4.8 Betongpelare: tvärsnittets respons och första ordningens moment

En pelare av armerad betong dimensioneras inte med en knäckkurva, som trä- och stålpelare i avsnitt 4.5 och avsnitt 4.6. Betongens respons är starkt icke-linjär: tvärsnittet spricker, betongen kryper och plasticeras,

och bärförmågan för moment beror på hur stor normalkraft som verkar samtidigt. I stället används **snittkraftsmetoden** (jämför avsnitt 4.3): det dimensionerande momentet M_{Ed} i pelarens kritiska snitt, med hänsyn till imperfektioner och andra ordningens effekter, jämförs med det moment M_{Rd} som tvärsnittet kan bära samtidigt med normalkraften N_{Ed}. Villkoret är $M_{Ed} \leq M_{Rd}$.

Det här avsnittet behandlar de två första delarna av den kontrollen: hur ett pelartvärsnitt svarar på normalkraft och moment (interaktionsdiagrammet), och hur första ordningens moment bestäms, inklusive formfel och minsta excentricitet. Avsnittet avslutas med kriteriet för när en pelare är så kort (oslank) att andra ordningens moment kan försummas. Andra ordningens moment, och varför de är svårare att bestämma för betong än för stål, behandlas i avsnitt 4.9. Som i resten av kapitlet betecknar N_{Ed} tryckkraftens storlek (avsnitt 4.1); EC2 skriver $|N_{Ed}|$. I tvärsnittsanalysen räknas armeringens spänningar och töjningar som i kapitel 1, med drag positivt.

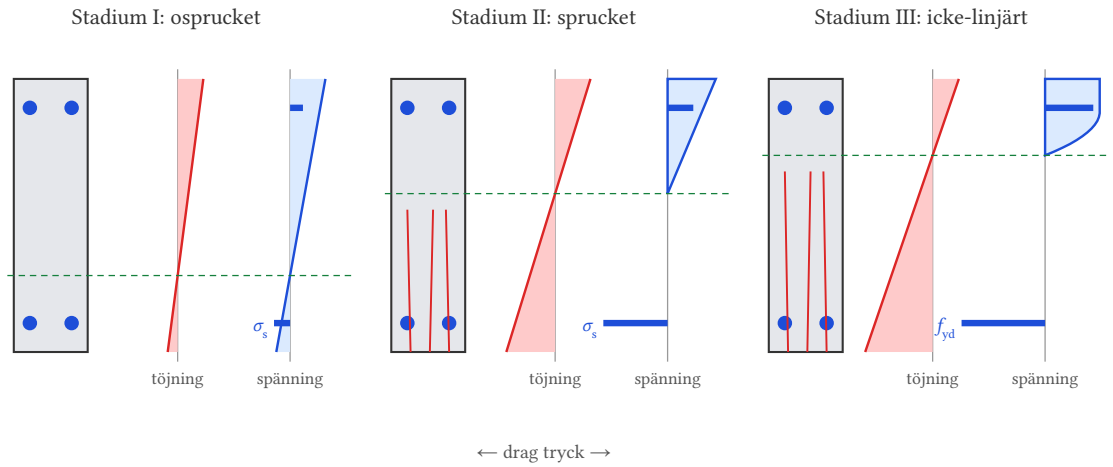
> **Notera:** Kapitlet följer EN 1992-1-1:2023 (EC2) med rekommenderade värden. Boverkets konstruktionsregler (EKS, BFS 2024:6) hänvisar ännu till den äldre utgåvan SS-EN 1992-1-1:2005. För betongpelare märks skillnaden främst på tre ställen. Partialkoefficienten för betongens elasticitetsmodul är $\gamma_{CE} = 1{,}2$ enligt EKS (tabell 3:7) mot 1,5 i EC2:2023 (tabell 4.3), så den dimensionerande styvheten blir högre med EKS. Reduktionsfaktorn för formfel har den undre gränsen $\alpha_h \geq 2/3$ i den äldre utgåvan mot 0,4 i den nya. De förenklade metoderna för andra ordningens effekter står i den äldre utgåvans huvudtext (avsnitt 5.8) men i den nya i den informativa bilagan O, och metoden med nominell styvhet finns inte längre kvar, se avsnitt 4.9.2.

4.8.1 Tvärsnittets respons

Stadium I, II och III

Ett armerat betongtvärsnitt med normalkraft och moment går igenom samma stadier som en balk, se avsnitt 2.1 och figur 4.37:

- **Stadium I:** tvärsnittet är osprucket, och både betong och armering är linjärt elastiska. Betongen tar även dragspänningar.
- **Stadium II:** tvärsnittet är böjsprucket. Betongen i dragzonen bär ingenting, men betong och armering är fortfarande linjärt elastiska.
- **Stadium III:** betongen i tryckzonen, armeringen eller båda har en icke-linjär respons. Brottgränstillståndet är nått när tvärsnittet inte kan bära mer, det vill säga när betongen når brottstukningen ε_{cu}.

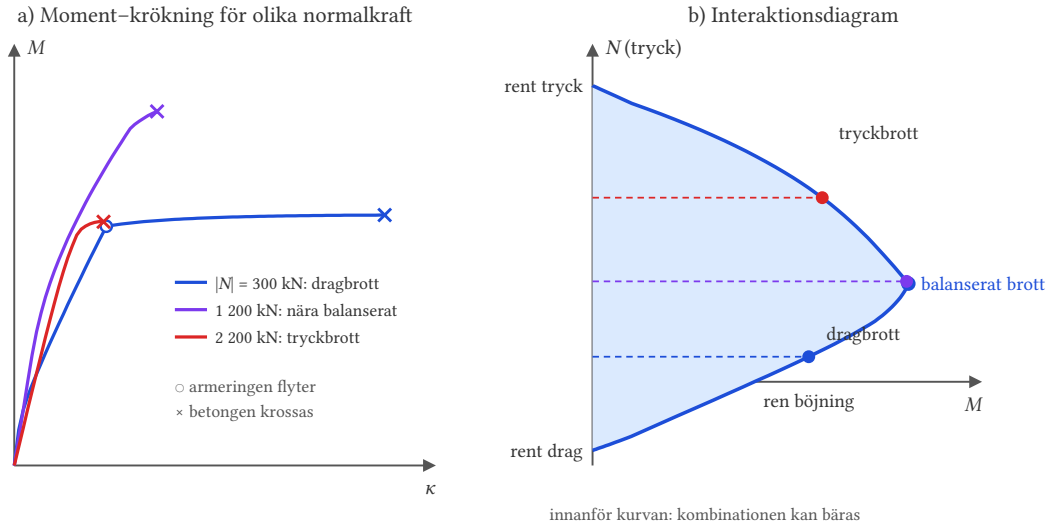


Figur 4.37 Töjning och spänning i ett tvärsnitt med tryckkraft och moment i de tre stadierna. Stadium I: osprucket, betongen tar även drag. Stadium II: sprucket, tryckspänningen är linjär och dragzonen bär ingenting. Stadium III: tryckspänningen är icke-linjär och dragarmeringen flyter. Den streckade linjen är neutrallagret, som flyttas mot den tryckta kanten när tvärsnittet spricker. Drag ritas till vänster och tryck till höger.

En tryckkraft fördröjer uppsprickningen: tvärsnittet spricker först när momentet är så stort att spänningen i den dragna kanten blir drag trots normalkraften. Därför har en pelare med stor tryckkraft ofta stora osprucka delar, medan en lätt belastad pelare beter sig nästan som en balk.

Moment, krökning och normalkraft

För en balk är momentkapaciteten en egenskap hos tvärsnittet. För en pelare är den det inte: **momentkapaciteten beror på den normalkraft som verkar samtidigt**. Figur 4.38a visar sambandet mellan moment och krökning för ett och samma pelartvärsnitt vid tre olika tryckkrafter, beräknat med de materialsamband som EC2 anger för icke-linjär analys (7.4.3.3). Med en måttlig tryckkraft flyter dragarmeringen först och tvärsnittet kan sedan krökas mycket innan betongen krossas. Med en stor tryckkraft krossas betongen innan armeringen flyter, och brottet är sprött.



Figur 4.38 Pelartvärsnittet 400 × 400 mm med 3 ϕ20 per sida, C30/37. a) Moment–krökning vid tre tryckkrafter: ringen markerar att dragarmeringen flyter och krysset att betongen når brottstukningen. b) Interaktionsdiagram för samma tvärsnitt. De streckade linjerna visar momentkapaciteten vid de tre tryckkrafterna i a).

Om momentkapaciteten beräknas för många olika värden på normalkraften fås **interaktionsdiagrammet** i figur 4.38b. Varje punkt på kurvan är en kombination av N och M som ger brott. Kombinationer innanför kurvan kan bäras, kombinationer utanför kan det inte. Kurvan har tre delar:

- **Dragbrott** (nedre delen): dragarmeringen flyter innan betongen krossas. Här ökar momentkapaciteten med tryckkraften, eftersom tryckkraften minskar den dragkraft som armeringen måste ta. Normalkraften är alltså **gynnsam**.
- **Balanserat brott**: betongen krossas samtidigt som dragarmeringen börjar flyta. Här är momentkapaciteten störst.
- **Tryckbrott** (övre delen): betongen krossas innan dragarmeringen flyter. Här minskar momentkapaciteten när tryckkraften ökar, och normalkraften är **ogynnsam**.

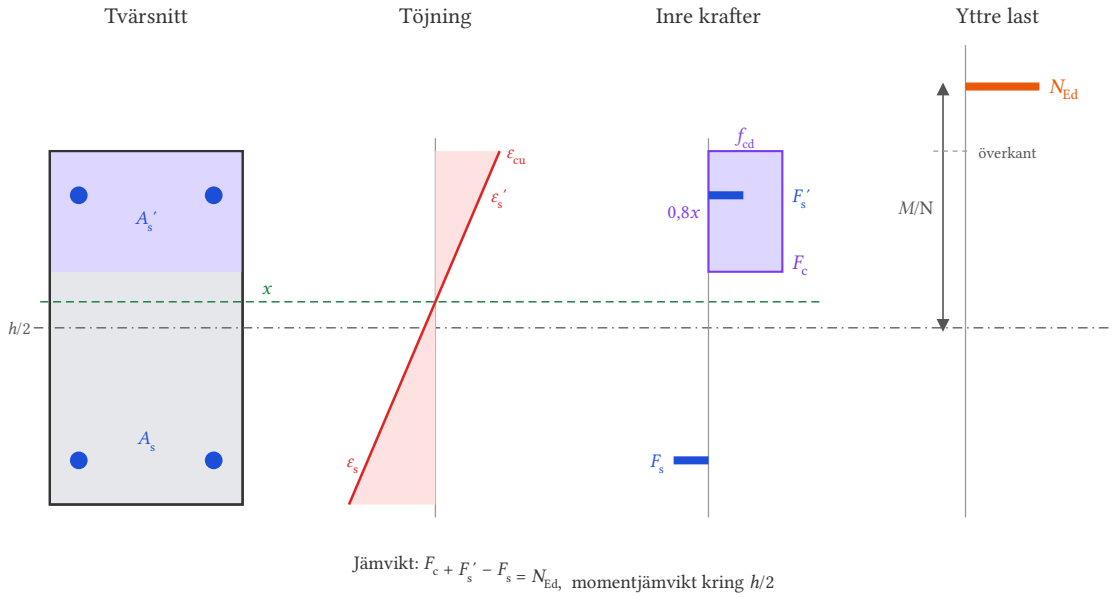
Ändpunkterna är ren böjning ($N = 0$), rent tryck och rent drag. Att normalkraften kan vara gynnsam är viktigt vid dimensioneringen: en lastkombination med liten normalkraft och stort moment kan vara farligare än den med störst normalkraft. Samma typ av diagram för stål och trä, där materialen är elastiska eller elastoplastiska, jämförs i avsnitt 4.3.

Inre jämvikt

Varje punkt i interaktionsdiagrammet beräknas med tvärsnittsmodellen för brottgränstillståndet i avsnitt 1.7.7: plana tvärsnitt, ingen draghållfasthet, spänningsblocket $0{,}8x \cdot f_{cd}$ och elastisk–idealplastisk armering. För ett valt läge x på neutrallagret ger töjningsfördelningen spänningarna i armeringen, och jämvikt ger normalkraften och momentet kring tvärsnittets mitt, se figur 4.39:

$$
\begin{aligned}
N &= F_c - \sum_i \sigma_{si} A_{si} \\
M &= F_c \left(\frac{h}{2} - 0{,}4x \right) + \sum_i \sigma_{si} A_{si} \left(d_i - \frac{h}{2} \right)
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

med $F_c = 0{,}8x \cdot b \cdot f_{cd}$, armeringens spänningar positiva för drag och N positiv för tryck. Det är samma samband som ekv. (1.34) och ekv. (1.35). När x ändras från noll (rent drag) till oändligheten (rent tryck) ritas hela kurvan upp. Normalkraften och momentet kring mitten kan också ersättas med en enda tryckkraft N_{Ed} på avståndet M_{Ed}/N_{Ed} från mitten.



Figur 4.39 Inre jämvikt i ett pelartvärsnitt i brottgränstillståndet: töjning med ε_{cu} i den tryckta kanten, tryckresultanten F_c från spänningsblocket och krafterna i armeringen (tryck till höger, drag till vänster). Snittkrafterna N_{Ed} och M_{Ed} kring tvärsnittets mitt motsvarar en tryckkraft N_{Ed} på avståndet M_{Ed}/N_{Ed} från mitten. Värdena gäller tvärsnittet i exempel 4.10 vid $N_{Ed} = 580$ kN och $M_{Rd} = 158$ kNm; resultanten hamnar då utanför tvärsnittet.

Tre punkter räcker ofta för att skissa diagrammet, och de kan beräknas för hand:

- **Rent tryck.** Hela tvärsnittet är tryckt och all armering flyter. Med spänningsblocket över hela höjden är bärförmågan (EC2 8.1.1(8), formel (8.3))

$$N_{Rd,0} = A_c \, f_{cd} + A_{s,tot} \, f_{yd} \tag{4.43}$$

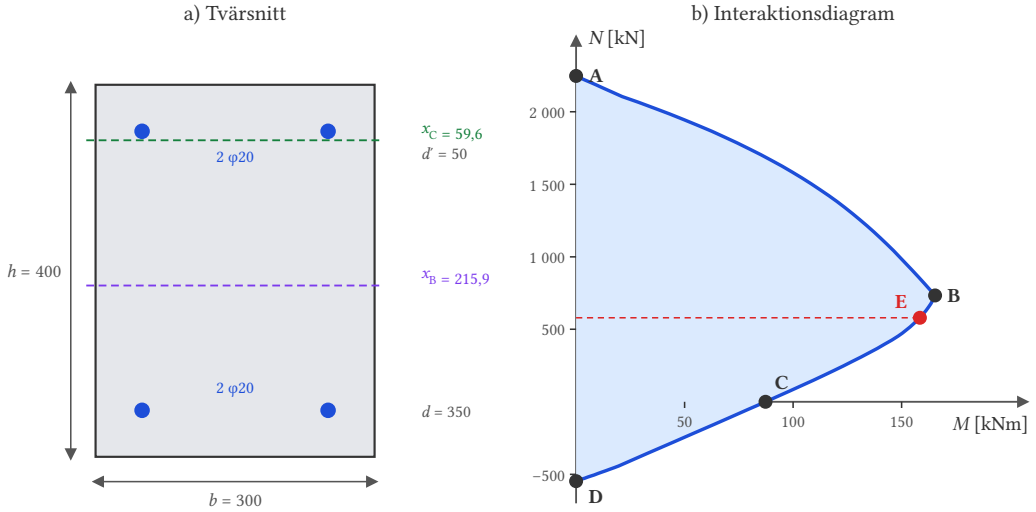
- **Balanserat brott.** Betongen når ε_{cu} samtidigt som dragarmeringen når ε_{yd}, vilket ger x_{bal} enligt ekv. (1.29).
- **Ren böjning.** $N = 0$ som för en dubbelarmerad balk, avsnitt 1.7.5.

Momentkapaciteten för en given normalkraft, den punkt som behövs vid kontrollen $M_{Ed} \le M_{Rd}$, fås genom att lösa x ur den första ekvationen i ekv. (4.42) och sätta in i den andra. För ett symmetriskt armerat tvärsnitt där båda armeringslagren flyter tar armeringskrafterna ut varandra i jämviktsekvationen, och tryckzonen fås direkt: $0{,}8x \cdot b \cdot f_{cd} = N_{Ed}$.

Hur tvärsnittet svarar när armeringsmängd, mått och normalkraft ändras kan prövas i den interaktiva figur 1.2 och i interaktionsdiagrammet i figur 4.46.

Exempel 4.10 Interaktionsdiagram för ett pelartvärsnitt

Ett pelartvärsnitt $b \times h = 300 \times 400$ mm i C25/30 är armerat med 2 ϕ20 B500B vid vardera kortsidan, med tyngdpunkten 50 mm från kanten, se figur 4.40a. Pelaren böjs i den styva riktningen, så $h = 400$ mm. Bestäm punkterna A (rent tryck), B (balanserat brott), C (ren böjning) och D (rent drag) i interaktionsdiagrammet, och momentkapaciteten E vid $N_{Ed} = 580$ kN.



Figur 4.40 a) Tvärsnittet i exempel 4.10 med neutrallagrets läge för punkterna B och C. b) Interaktionsdiagrammet med de beräknade punkterna A–E. Kurvan är beräknad med samma modell för många lägen på neutrallagret.

Material. $f_{cd} = 0{,}85 \cdot 25/1{,}5 = 14{,}17$ MPa enligt ekv. (1.14) ($\eta_{cc} = 1$), $f_{yd} = 435$ MPa och $\varepsilon_{yd} = 2{,}17$ ‰. Armeringen är $A_s = A_s' = 2 \cdot 314 = 628$ mm² per sida, $d' = 50$ mm och $d = 350$ mm. Betongarean är $A_c = 300 \cdot 400 = 120\,000$ mm².

A, rent tryck. ekv. (4.43) ger

$$N_{Rd,0} = 120\,000 \cdot 14{,}17 + 1\,257 \cdot 435 = (1\,700 + 547) \cdot 10^3 \text{ N} = 2\,247 \text{ kN}$$

och $M = 0$, eftersom tvärsnittet är symmetriskt.

B, balanserat brott. ekv. (1.29) ger

$$x_{bal} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} d = \frac{3{,}5}{3{,}5 + 2{,}17} \cdot 350 = 215{,}9 \text{ mm}$$

Tryckarmeringens töjning är $3{,}5 \cdot (215{,}9 - 50)/215{,}9 = 2{,}69$ ‰ $> \varepsilon_{yd}$, så den flyter. Armeringskrafterna är lika stora, $F_s = F_s' = 628 \cdot 435 = 273{,}3$ kN, och tar ut varandra. Betongens tryckkraft är

$$F_c = 0{,}8 \cdot 215{,}9 \cdot 300 \cdot 14{,}17 = 734{,}0 \text{ kN}$$

så $N = 734$ kN (tryck). Momentet kring mitten enligt ekv. (4.42) är

$$M = 734{,}0 \cdot (0{,}200 - 0{,}4 \cdot 0{,}2159) + 2 \cdot 273{,}3 \cdot 0{,}150 = 83{,}4 + 82{,}0 = 165{,}4 \text{ kNm}$$

C, ren böjning. Anta att tryckarmeringen inte flyter, så att $|\sigma_s'| = E_s \varepsilon_{cu}(x - d')/x = 700(x - 50)/x$ MPa. Jämvikt med $N = 0$ ger

$$0{,}8 \cdot 300 \cdot 14{,}17 \cdot x + 628 \cdot 700 \cdot \frac{x - 50}{x} = 273\,300 \quad \Rightarrow \quad x = 59{,}6 \text{ mm}$$

Kontroll av antagandet. Tryckarmeringens töjning är $3{,}5 \cdot (59{,}6 - 50)/59{,}6 = 0{,}56$ ‰ $< \varepsilon_{yd}$, så den är elastisk med $|\sigma_s'| = 113$ MPa och $F_s' = 70{,}7$ kN, och antagandet var riktigt. Dragarmeringen har

töjningen $3{,}5 \cdot (350 - 59{,}6)/59{,}6 = 17{,}1$ ‰ och flyter. Med $F_c = 0{,}8 \cdot 59{,}6 \cdot 300 \cdot 14{,}17 = 202{,}6$ kN ger ekv. (4.42)

$$\begin{aligned} M &= 202{,}6 \cdot (0{,}200 - 0{,}0238) + 70{,}7 \cdot 0{,}150 + 273{,}3 \cdot 0{,}150 \\ &= 35{,}7 + 10{,}6 + 41{,}0 = 87{,}3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

D, rent drag. Bara armeringen bär, och all armering flyter. Dragkraften är negativ med kapitlets teckenregel:

$$N = -A_{s,tot}\, f_{yd} = -1\,257 \cdot 435 = -547 \text{ kN}, \qquad M = 0$$

E, momentkapacitet vid $N_{Ed} = 580$ kN. Anta att båda armeringslagren flyter. Armeringskrafterna tar då ut varandra, och tryckzonen fås ur $0{,}8x \cdot b \cdot f_{cd} = N_{Ed}$:

$$x = \frac{N_{Ed}}{0{,}8\, b\, f_{cd}} = \frac{580\,000}{0{,}8 \cdot 300 \cdot 14{,}17} = 170{,}6 \text{ mm}$$

Kontroll av antagandet. $\varepsilon_s' = 3{,}5 \cdot (170{,}6 - 50)/170{,}6 = 2{,}47$ ‰ och $\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot (350 - 170{,}6)/170{,}6 = 3{,}68$ ‰, båda större än ε_{yd}. Antagandet var riktigt. Ekv. (4.42) ger

$$M_{Rd} = 580 \cdot (0{,}200 - 0{,}4 \cdot 0{,}1706) + 2 \cdot 273{,}3 \cdot 0{,}150 = 76{,}4 + 82{,}0 = 158{,}4 \text{ kNm}$$

Punkterna och hela kurvan visas i figur 4.40b. Med tryckkraften 580 kN klarar tvärsnittet 81 % mer moment än vid ren böjning: normalkraften är gynnsam, eftersom punkt E ligger under det balanserade brottet. Momentkapaciteten används i exempel 4.11 och uppgift 4.10.

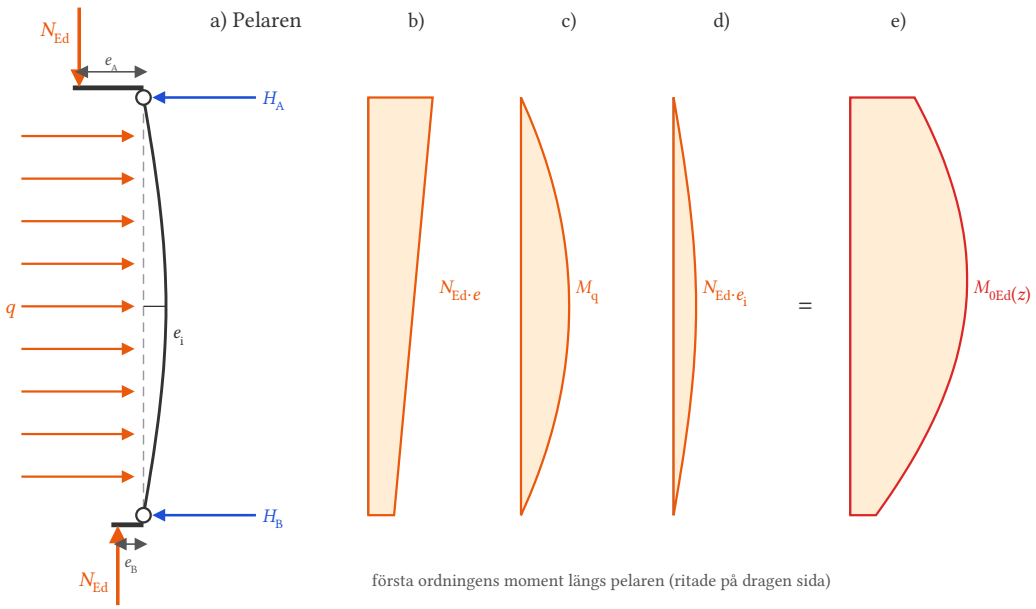
4.8.2 Första ordningens moment

Första ordningens moment M_{0Ed} beräknas för pelarens ursprungliga, oböjda geometri, men med hänsyn till formfel. Det består av två delar, se figur 4.41:

- det **avsiktliga** momentet från lasterna: moment $M(z)$ från transversell last, till exempel vind, och moment $N_{Ed}\, e(z)$ från en normalkraft som angriper med en avsiktlig excentricitet e, till exempel från en konsol eller ett ensidigt upplagt bjälklag;
- det **oavsiktliga** momentet $N_{Ed}\, e_i(z)$ från formfel, det vill säga pelarens oavsiktliga snedställning eller krokighet.

$$M_{0Ed}(z) = M(z) + N_{Ed} \cdot (e(z) + e_i(z)) \tag{4.44}$$

Excentriciteterna mäts från det ospruckna betongtvärsnittets tyngdpunkt (för ett symmetriskt tvärsnitt dess mitt). Summan $e_0 = e + e_i$ i det kritiska snittet är den sammanlagda första ordningens excentriciteten i avsnitt 4.2. Om ändarnas excentriciteter är olika varierar $e(z)$ linjärt längs pelaren. Alla bidrag ska verka åt samma håll om det ger det mest ogynnsamma fallet, vilket alltid gäller för formfelet.



Figur 4.41 Första ordningens moment i en ledad pelare. a) Normalkraften angriper med excentriciteterna e_A och e_B, den transversella lasten q ger stödreaktionerna H_A och H_B, och pelaren har formfelet e_i åt samma håll som lasterna böjer den. b) Moment från den excentriska normalkraften, c) från den transversella lasten och d) från formfelet. e) Summan $M_{0Ed}(z)$ enligt ekv. (4.44). Omritad efter kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B11.11 och B11.12.

Formfel (imperfektioner)

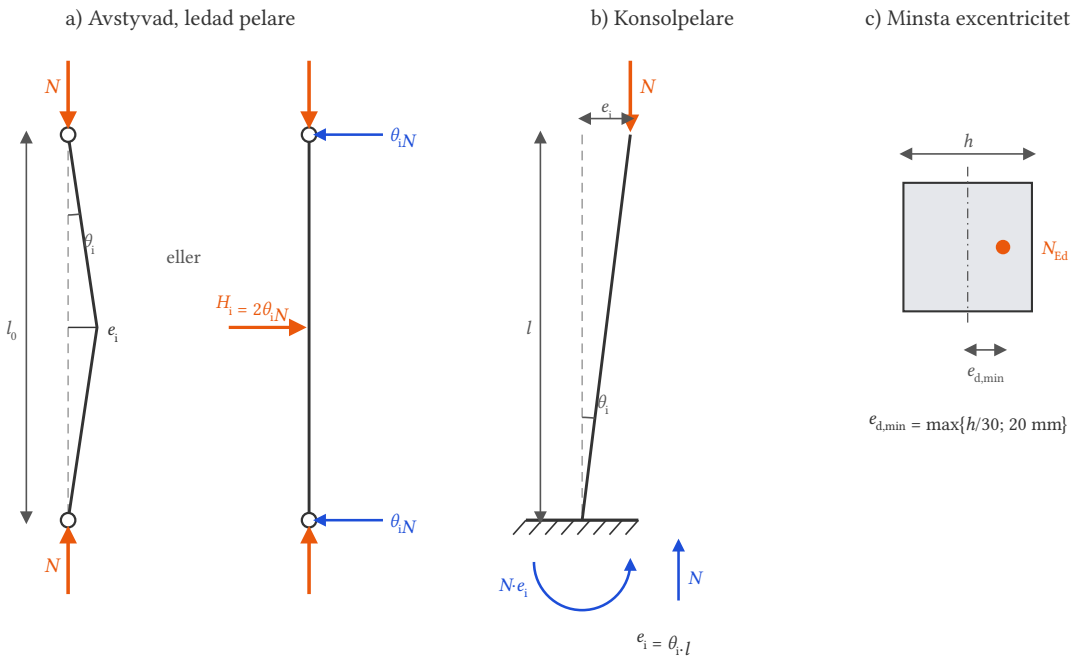
Ingen pelare är helt rak och lodrät. EC2 beaktar avvikelserna i form och läge med en **initiallutning** θ_i (EC2 7.2.1.2, formel (7.1)–(7.3)):

$$\begin{aligned} \theta_i &= \alpha_h \cdot \alpha_m \cdot \frac{1}{200} \\ 0{,}4 \le \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l}} \le 1{,}0, &\qquad \alpha_m = \sqrt{0{,}5\left(1+\frac{1}{m}\right)} \end{aligned} \tag{4.45}$$

där l är längden i meter och m antalet bärande delar som samverkar. För en enskild pelare är l pelarens längd och $m = 1$, så $\alpha_m = 1$. Faktorn α_h beskriver att en stor avvikelse är mindre sannolik i en lång pelare, och α_m att flera samverkande pelare sällan lutar lika mycket åt samma håll. Lutningen ger excentriciteten i det kritiska snittet (formel (7.5))

$$e_i = \theta_i \cdot \frac{l_0}{2} \tag{4.46}$$

där l_0 är knäcklängden, betecknad L_{cr} i ekv. (4.4) och bestämd enligt avsnitt 4.8.3. För en ledad pelare är det krokigheten i mitten och för en konsolpelare snedställningen i toppen, se figur 4.42. För väggar och enskilda pelare i avstyvade system får förenklat $e_i = l_0/400$ användas, vilket motsvarar $\alpha_h = 1$.



Figur 4.42 Formfel hos en enskild pelare. a) Avstyvad, ledad pelare: lutningen θ_i från varje ände ger excentriciteten e_i i mitten, eller samma moment av en fiktiv kraft $H_i = 2\theta_i N$ i mitten med stödreaktionerna $\theta_i N$. b) Konsolpelare: snedställningen ger $e_i = \theta_i l$ i toppen (lika med $\theta_i l_0/2$ med den teoretiska knäcklängden $l_0 = 2l$), och inspänningen tar normalkraften och momentet Ne_i den fiktiva kraften är $H_i = \theta_i N$ i toppen. c) Minsta excentricitet vid tvärsnittsdimensionering. Omritad efter EC2 figur 7.1 och kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B11.6–B11.9.

I stället för en excentricitet kan formfelet beskrivas med en fiktiv horisontell kraft H_i i det läge som ger störst moment (formel (7.6)–(7.7)): $H_i = \theta_i N$ för en icke avstyvad pelare och $H_i = 2\theta_i N$ för en avstyvad. Kraften är fiktiv och ska inte föras vidare till andra bärverksdelar. Formfelet ansätts alltid så att det blir så ogynnsamt som möjligt, det vill säga åt samma håll som pelaren böjs ut av lasterna och med samma form som utböjningen.

Minsta excentricitet

Ett tryckt tvärsnitt ska klara minst momentet (EC2 8.1.1(5), formel (8.1))

$$M_{Ed,min} = N_{Ed} \cdot e_{d,min}, \qquad e_{d,min} = \max\left\{\frac{h}{30};\ 20\ \text{mm}\right\} \tag{4.47}$$

där h är tvärsnittets höjd i den riktning som studeras, se figur 4.42c. Minimimomentet täcker osäkerheter i modell och analys, och det gör att även en avsiktligt centriskt belastad pelare dimensioneras för ett moment. Det läggs inte till de andra excentriciteterna utan är en undre gräns för det dimensionerande momentet. Villkoret finns också i avsnitt 1.7.7.

4.8.3 Knäcklängd

Knäcklängden betecknas l_0 i EC2 och är densamma som L_{cr} i ekv. (4.4). För en enskild pelare beror den på hur styvt pelarens ändar hålls mot rotation av anslutande balkar, bjälklag och grundplattor. EC2 O.5(3) ger knäcklängden för pelare i regelbundna ramar. För en **avstyvad** pelare, vars ändar hålls i sidled, gäller formel (O.9):

$$l_0 = 0{,}5\, l \sqrt{\left(1 + \frac{f_{r1}}{0{,}45 + f_{r1}}\right)\left(1 + \frac{f_{r2}}{0{,}45 + f_{r2}}\right)} \tag{4.48}$$

och för en **icke avstyvad** pelare, vars ändar kan förskjutas i sidled, formel (O.10):

$$l_0 = l \cdot \frac{\sqrt{(1+2{,}4f_{r1}+2{,}4f_{r2})(1+2{,}4f_{r1})(1+2{,}4f_{r2})}}{1+1{,}2f_{r1}+1{,}2f_{r2}} \tag{4.49}$$

Här är l pelarens fria höjd mellan inspänningarna och f_{r1}, f_{r2} inspänningarnas relativa vekhet i ändarna 1 och 2 (k_1, k_2 i den äldre utgåvan av EC2). Vekheten är kvoten mellan pelarens böjstyvhet och inspänningens rotationsstyvhet, $f_r = (\theta/M)\cdot(EI/l)$ enligt formel (O.11), där θ är den vridning som momentet M ger i de anslutande delarna. $f_r = 0$ är en helt stel inspänning och $f_r = \infty$ en led. Med de två gränsvärdena ger formlerna Eulerfallens teoretiska värden. De anslutande balkarnas styvhet ska räknas med hänsyn till sprickbildning om de inte är ospruckna i brottgränstillståndet (EC2 O.5(2)).

En helt stel inspänning finns sällan i verkligheten, och därför ska minst $f_r = 0{,}1$ användas för en inspänd ände. Det ger de praktiska värdena i tabell 4.9. Är inspänningen vekare, till exempel en grundplatta på eftergivlig mark eller en sprucken bjälklagsbalk, blir f_r större och knäcklängden längre.

Tabell 4.9 Knäcklängdsfaktorn β = l_0/l för enskilda betongpelare: teoretiska värden och värden enligt EC2 formel (O.9) och (O.10) med f_r = 0,1 för en inspänd ände och f_r = ∞ för en led

Pelare	**Upplag**	**Teoretiskt β**	**β med $f_r = 0{,}1$**
Avstyvad	Ledad – ledad	1	1,0
Avstyvad	Fast inspänd – ledad	0,7	0,77
Avstyvad	Fast inspänd – fast inspänd	0,5	0,59
Icke avstyvad	Fast inspänd – fri (konsolpelare)	2	2,23
Icke avstyvad	Fast inspänd – fast inspänd	1	1,22

4.8.4 Slank eller oslank pelare

Andra ordningens moment får försummas om de är mindre än 10 % av första ordningens moment (EC2 7.4.1(3)). För en enskild pelare är det uppfyllt om slankhetstalet λ är mindre än gränsvärdet λ_{lim} (EC2 O.6, formel (O.12)):

$$\lambda_{lim} = \frac{20 \cdot A \cdot B \cdot C}{\sqrt{n}}, \qquad n = \frac{N_{Ed}}{A_c\, f_{cd}} \tag{4.50}$$

med

- $A = 1/(1+0{,}2\varphi_{ef})$, där φ_{ef} är det effektiva kryptalet (ekv. (4.55)). Är det okänt får $A = 0{,}7$ användas.
- $B = \sqrt{1+2\omega}$, där $\omega = A_{s,tot} f_{yd}/(A_c f_{cd})$ är det mekaniska armeringsinnehållet med all längsarmering $A_{s,tot}$. Är det okänt får $B = 1{,}1$ användas.
- $C = 1{,}7 - r_m$, där $r_m = M_{01}/M_{02}$ är kvoten mellan ändmomenten ($|M_{02}| \geq |M_{01}|$, positiv om de ger drag på samma sida). För icke avstyvade pelare, och för avstyvade pelare där första ordningens moment främst kommer från formfel eller transversell last, är $r_m = 1$ och $C = 0{,}7$.

Slankhetstalet är $\lambda = l_0/i$ enligt ekv. (4.5), med tröghetsradien i för det ospruckna betongtvärsnittet; för en rektangel är $i = h/\sqrt{12}$. Gränsen minskar med normalkraften: ju större tryckkraft, desto kortare pelare räknas som slank. Den ökar med armeringsmängden och minskar med krypningen. Ändmoment som böjer pelaren i dubbel krökning ($r_m < 0$) ger en högre gräns, eftersom utböjningen då blir liten.

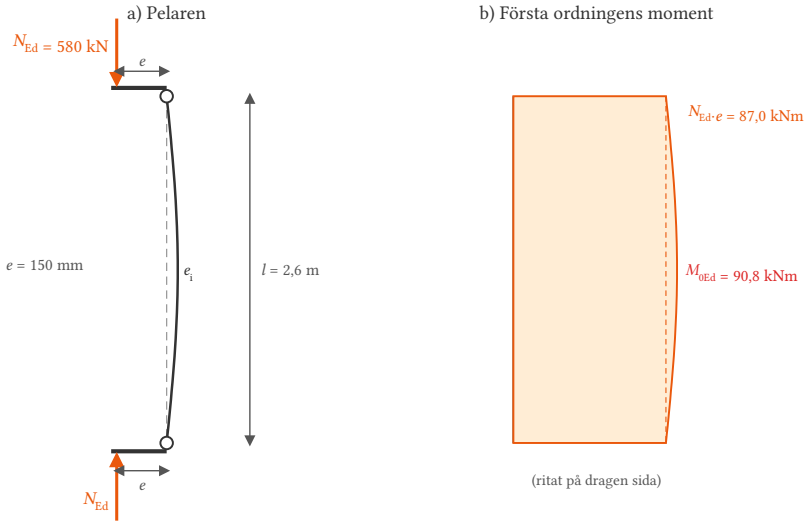
För en **oslank** pelare är det dimensionerande momentet första ordningens moment, men minst minimimomentet:

$$M_{Ed} = \max\{M_{0Ed};\, N_{Ed}\cdot e_{d,min}\} \leq M_{Rd}(N_{Ed}) \tag{4.51}$$

där M_{0Ed} är det största värdet av ekv. (4.44) längs pelaren och $M_{Rd}(N_{Ed})$ momentkapaciteten vid normalkraften N_{Ed} i det ospruckna tvärsnittets tyngdpunkt. För en **slank** pelare ersätts M_{0Ed} med momentet inklusive andra ordningens effekter, se avsnitt 4.9.

Exempel 4.11 Kontroll av en oslank pelare

En avstyvad pelare med längden $l = 2{,}6$ m är ledad i båda ändar och har tvärsnittet i exempel 4.10. Den belastas av $N_{Ed} = 580$ kN, som från ett upplag angriper med den avsiktliga excentriciteten $e = 150$ mm i båda ändar, åt samma håll, se figur 4.43. Det effektiva kryptalet är $\varphi_{ef} = 1{,}4$. Kontrollera att andra ordningens effekter får försummas och att pelaren har tillräcklig bärförmåga.



Figur 4.43 a) Pelaren i exempel 4.11: normalkraften angriper med excentriciteten e i båda ändar, och formfelet e_i ansätts åt samma håll. b) Första ordningens moment: det konstanta $N_{Ed}e$ och tillskottet från formfelet, störst i mitten.

Knäcklängd och slankhet. Pelaren är avstyvad och ledad i båda ändar, så $l_0 = l = 2{,}6$ m (tabell 4.9). Med $i = 400/\sqrt{12} = 115{,}5$ mm ger ekv. (4.5)

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{2\,600}{115{,}5} = 22{,}5$$

Slankhetsgräns. Den relativa normalkraften och det mekaniska armeringsinnehållet är

$$n = \frac{580\,000}{120\,000 \cdot 14{,}17} = 0{,}341, \qquad \omega = \frac{1\,257 \cdot 435}{120\,000 \cdot 14{,}17} = 0{,}322$$

Ändmomenten är lika, så $r_m = 1$ och $C = 0{,}7$. Med $A = 1/(1 + 0{,}2 \cdot 1{,}4) = 0{,}781$ och $B = \sqrt{1 + 2 \cdot 0{,}322} = 1{,}282$ ger ekv. (4.50)

$$\lambda_{lim} = \frac{20 \cdot 0{,}781 \cdot 1{,}282 \cdot 0{,}7}{\sqrt{0{,}341}} = 24{,}0$$

Kontroll av slankheten. $\lambda = 22{,}5 < \lambda_{lim} = 24{,}0$: pelaren är oslank, och andra ordningens effekter får försummas.

Formfel. $\alpha_h = 2/\sqrt{2{,}6} = 1{,}24$ begränsas till 1,0, och $\alpha_m = 1$. Ekv. (4.45) och ekv. (4.46) ger

$$\theta_i = \frac{1}{200}, \qquad e_i = \theta_i \cdot \frac{l_0}{2} = \frac{2\,600}{400} = 6{,}5 \text{ mm}$$

Första ordningens moment. Momentet är störst i mitten, där formfelet är störst. Ekv. (4.44) ger

$$M_{0Ed} = N_{Ed} \cdot (e + e_i) = 580 \cdot (0{,}150 + 0{,}0065) = 90{,}8 \text{ kNm}$$

Minsta excentricitet. $e_{d,min} = \max\{400/30;\ 20\} = 20$ mm, så $M_{Ed,min} = 580 \cdot 0{,}020 = 11{,}6$ kNm, och $M_{Ed} = M_{0Ed} = 90{,}8$ kNm enligt ekv. (4.51).

Bärförmåga. Momentkapaciteten vid $N_{Ed} = 580$ kN är punkt E i exempel 4.10, $M_{Rd} = 158{,}4$ kNm. Villkoret

$$M_{Ed} = 90{,}8 \text{ kNm} \leq M_{Rd} = 158{,}4 \text{ kNm}$$

är uppfyllt, med utnyttjandegraden $90{,}8/158{,}4 = 0{,}57$.

Pelaren har god marginal: excentriciteten kan öka till $158{,}4/580 - 0{,}0065 = 0{,}267$ m innan bärförmågan är nådd. Om samma pelare vore 3,0 m lång skulle den vara slank ($\lambda = 26{,}0 > 24{,}0$), och andra ordningens moment skulle behöva beräknas enligt avsnitt 4.9.

4.9 Betongpelare: andra ordningens moment och dimensionering

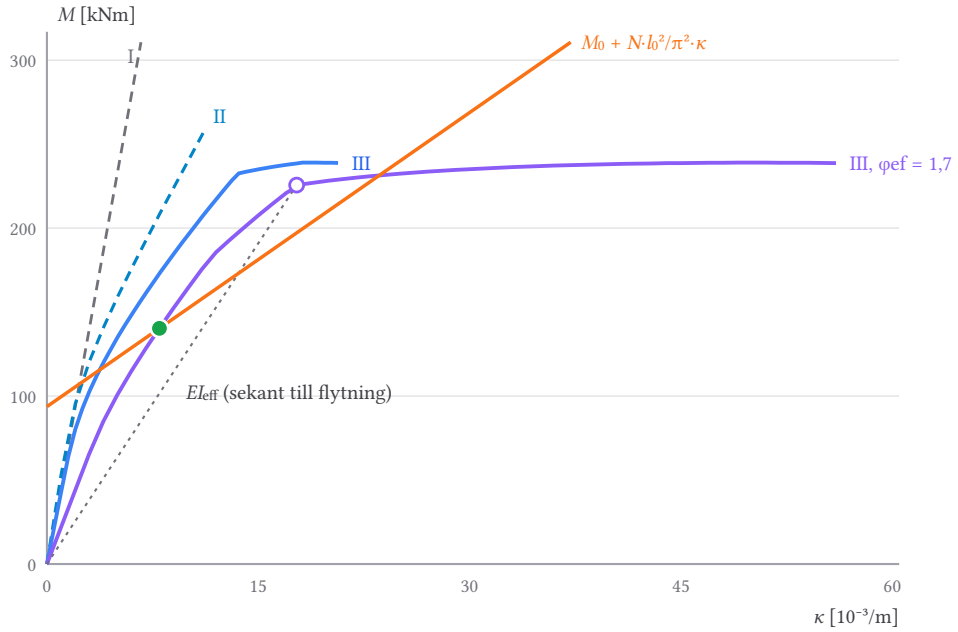
En slank pelare böjer ut under lasten, och normalkraften får då en hävarm som växer med utböjningen. Tillskottet är andra ordningens moment $M_2 = N_{Ed} \cdot e_2$, se ekv. (4.8), där e_2 är utböjningen orsakad av lasten. För stål och trä kan utböjningen beräknas med en känd böjstyvhet EI, och momentet förstoras med faktorn i ekv. (4.11). För armerad betong finns ingen sådan konstant styvhet. Det här avsnittet förklarar varför, och visar hur EC2:2023 hanterar det med metoden **nominell krökning**. Avsnittet avslutas med dimensioneringsgången för en betongpelare och ett exempel. Tvärsnittets bärförmåga $M_{Rd}(N_{Ed})$ och första ordningens moment M_{0Ed} beräknas som i avsnitt 4.8.

4.9.1 Vad påverkar andra ordningens moment?

Andra ordningens moment beror på tillskottsutböjningen e_2, och den beror på pelarens böjstyvhet: ju vekare pelare, desto större utböjning och desto större moment. För en betongpelare minskar böjstyvheten av fyra skäl, som alla syns i sambandet mellan moment och krökning i figur 4.44:

- **Sprickbildning.** När tvärsnittet går från stadium I till stadium II bär den spruckna betongen inget drag, och tröghetsmomentet minskar kraftigt. Krökningen för ett givet moment ökar, liksom utböjningen e_2 och därmed momentet. En tryckkraft fördröjer uppsprickningen, så en hårt tryckt pelare spricker senare än en lätt belastad.
- **Krypning.** Under långvarig last fortsätter betongens deformationer att öka, se avsnitt 1.6.1. Utböjningen och andra ordningens moment ökar med tiden, trots att lasten är konstant.
- **Icke-linjärt tryck.** Betongens arbetskurva böjer av när tryckspänningen närmar sig hållfastheten, se ekv. (1.17). Elasticitetsmodulen, kurvans lutning, minskar, och utböjningen ökar ytterligare. När dragarmeringen dessutom flyter (stadium III) blir tvärsnittet mycket vekt.
- **Armeringen.** Armering ökar både styvheten och bärförmågan. I ett sprucket tvärsnitt är det till stor del armeringen som bär böjningen, så mer armering eller armering längre ut mot kanterna ger mindre krökning.

Övriga faktorer gäller alla material: formfel och avsiktlig excentricitet (de ger första ordningens moment), lastens storlek (M_{0Ed} och N_{Ed}) och knäcklasten, det vill säga pelarens längd och inspänning.



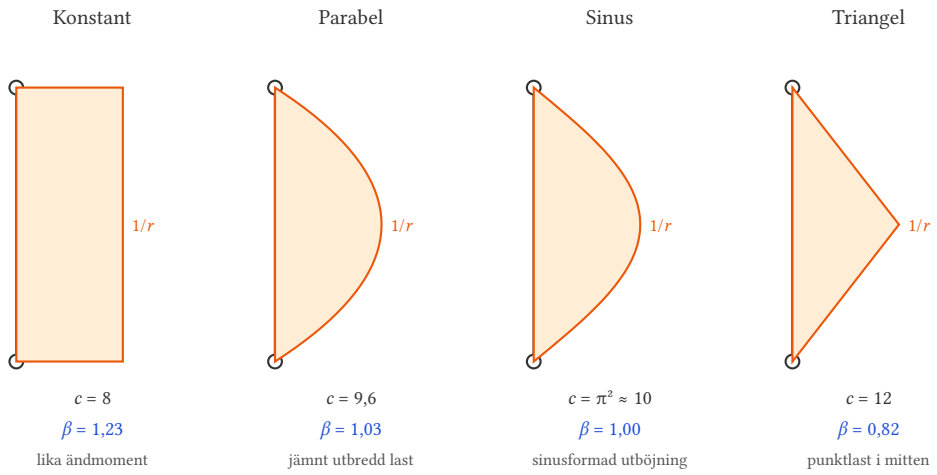
Figur 4.44 Moment och krökning i det kritiska snittet för pelartvärsnittet i exempel 4.12. Slå av och på sprickbildning, icke-linjärt tryck och krypning och se hur kurvan blir flackare. Den räta linjen är det pådrivande momentet; där den skär tvärsnittets kurva råder jämvikt.

Stabilitet i det kritiska snittet

Figur 4.44 visar också hur stabiliteten avgörs. I pelarens kritiska snitt är det **pådrivande momentet** (lasteffekten) första ordningens moment plus normalkraften gånger utböjningen. Med en antagen krökningsfördelning längs pelaren är utböjningen proportionell mot krökningen $1/r$ i det kritiska snittet:

$$M_E = M_{0Ed} + N_{Ed} \cdot e_2, \qquad e_2 = \frac{l_0^2}{c} \cdot \frac{1}{r} \tag{4.52}$$

där c beror på krökningsfördelningen, se figur 4.45: $c = 8$ för konstant krökning, $c = \pi^2 \approx 10$ för en sinusformad och $c = 12$ för en triangulär. Det pådrivande momentet är en rät linje i diagrammet. Tvärsnittets **mothållande moment** är den krökta kurvan. Där linjen skär kurvan är inre och yttre moment lika stora, och pelaren står i jämvikt. Skär linjen inte kurvan finns inget jämviktsläge: pelaren böjer ut obegränsat, även om tvärsnittets bärförmåga är större än första ordningens moment. När dragarmeringen flyter böjer kurvan av kraftigt. Därför är det ofta flytningen i det kritiska snittet som avgör när pelaren blir instabil, innan betongen krossas. Den beskrivningen ligger till grund för metoden i EC2.



Figur 4.45 Faktorn c i ekv. (4.52) för några fördelningar av krökningen längs en ledad pelare, och motsvarande $\beta_c = \pi^2/c$ i ekv. (4.59). En konstant krökning ger störst utböjning ($c = 8$), en triangulär minst ($c = 12$). Efter EC2 O.8.2(3) och kompendiet Bärande konstruktioner del 2, fig. B11.1 och B11.13.

4.9.2 Metoder enligt EC2

EC2:2023 anger tre sätt att bestämma andra ordningens effekter (7.4.3.1), sammanställda i tabell 4.10. Alla måste ta hänsyn till sprickbildning, icke-linjära materialegenskaper och krypning (7.4.1(2)). De förenklade metoderna finns i den informativa bilagan O.

Tabell 4.10 Metoder för andra ordningens effekter i EC2:2023 (7.4.3 och bilaga O)

Metod	Princip	Avsnitt
Nominell krökning	Utböjningen beräknas ur en nominell krökning i det kritiska snittet; ger andra ordningens moment för en enskild pelare	7.4.3.2, O.7
Andra ordningens linjära analys	Elastisk analys med en effektiv (reducerad) styvhet, eller förstoring av första ordningens moment	7.4.3.2, O.8
Allmän icke-linjär analys	Materialens arbetskurvor med krypning och jämvikt i det deformerade läget	7.4.3.3

Båda förenklade metoderna ska enligt 7.4.3.2(1) använda en **effektiv styvhet**, som på säker sida får tas som sekantstyvheten när armeringen flyter: lutningen hos en rät linje från origo till flytpunkten i figur 4.44 (EC2 figur 7.4 a):

$$EI_{eff} = \frac{M_y}{(1/r)_y} \tag{4.53}$$

Sprickbildning, icke-linjärt tryck och krypning är alla inbakade i flytpunkten. Metoden med nominell krökning gör samma sak utan att M_y behöver beräknas: den uppskattar krökningen $(1/r)_y$ direkt och sätter momentet i det kritiska snittet lika med bärförmågan. Kursen använder den metoden.

Tidigare utgåvor av EC2 och det äldre kursmaterialet använde i stället en metod med **nominell styvhet**, där böjstyvheten uppskattades med en formel av typen $EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s$ och momentet förstorades med $1 + \beta/(N_B/N_{Ed} - 1)$. Den formeln för styvheten finns inte i EC2:2023.

4.9.3 Metoden med nominell krökning

Krökning och tillskottsutböjning

Pelaren antas vara i brottgränstillståndet när armeringen på båda sidor flyter: dragarmeringen med töjningen $+\varepsilon_{yd}$ och tryckarmeringen med $-\varepsilon_{yd}$. Krökningen är då $2\varepsilon_{yd}/(d-d')$, och den justeras för normalkraft och krypning (EC2 O.7.3, formel (O.19)–(O.22)):

$$\frac{1}{r} = k_r \cdot k_\varphi \cdot \frac{1}{r_0}, \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{2\,\varepsilon_{yd}}{d-d'} \tag{4.54}$$

med

- $k_r = (n_u - n)/(n_u - n_{bal}) \le 1$, där $n_u = 1+\omega$, $n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$ och $n_{bal} = 0{,}4$. Faktorn minskar krökningen för stora normalkrafter, då betongen krossas innan armeringen flyter (tryckbrott i figur 4.38). Som en första uppskattning får $k_r = 1$ användas.
- $k_\varphi = 1 + \beta_{fck}\,\varphi_{ef} \ge 1$, med $\beta_{fck} = 0{,}35 + f_{ck}/200 - \lambda/150$. Faktorn ökar krökningen för krypning. För mycket slanka pelare blir β_{fck} negativ, och då är $k_\varphi = 1$.

Avståndet $d - d'$ är det mellan armeringslagren. Om armeringen är fördelad längs sidorna ersätts det med $h/2 + i_s$, där i_s är armeringens tröghetsradie (O.7.3(2)). Det **effektiva kryptalet** tar hänsyn till att bara en del av lasten är långvarig (EC2 7.4.2, formel (7.27)):

$$\varphi_{ef} = \varphi(t_{DL}, t_0) \cdot \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \tag{4.55}$$

där $\varphi(t_{DL}, t_0)$ är kryptalet vid konstruktionens livslängd (avsnitt 1.6), M_{0Eqp} första ordningens moment för den kvasipermanenta lastkombinationen och M_{0Ed} för den dimensionerande. Kvoten får ersättas med kvoten mellan normalkrafterna.

Tillskottsutböjningen och andra ordningens moment fås med ekv. (4.52) (formel (O.17)–(O.18)):

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 = N_{Ed} \cdot \frac{l_0^2}{c} \cdot \frac{1}{r} \tag{4.56}$$

Faktorn c beror på den totala krökningsfördelningen. För avstyvade pelare får $c = 8$ användas, och för en enskild icke avstyvad pelare (konsolpelare) med konstant tvärsnitt $c = 10$ (O.7.2(4)). Observera att e_2 inte beror på första ordningens moment: metoden räknar med att pelaren når flytning i det kritiska snittet, vilket den gör just när $M_{Ed} = M_{Rd}$.

Dimensionerande moment

Det dimensionerande momentet är (EC2 O.7.2, formel (O.13))

$$M_{Ed} = \max\{M_{0Ed} + M_2;\; M_{02};\; |M_{01} - 0{,}5M_2 - 2N_{Ed}\,e_i|\} \tag{4.57}$$

där M_{01} och M_{02} är första ordningens ändmoment inklusive formfel, $|M_{02}| \ge |M_{01}|$. De två sista termerna gäller pelarens ändar, där andra ordningens moment är litet. För pelare med betydande transversell last, och för icke avstyvade pelare, är M_{0Ed} det största första ordningens momentet längs pelaren. För avstyvade pelare utan transversell last ersätts olika ändmoment med ett ekvivalent konstant moment (formel (O.14)–(O.16)):

$$M_{0Ed} = C_m \cdot M_{02}, \qquad C_m = 0{,}6 + 0{,}4\,r_m \ge 0{,}4 \tag{4.58}$$

med $r_m = M_{01}/M_{02}$ som i ekv. (4.50). Momentet är minst $N_{Ed} \cdot e_{d,min}$ enligt ekv. (4.47).

Momentförstoring med effektiv styvhet

Det andra förenklade sättet är att förstora första ordningens moment (EC2 O.8.2, formel (O.23) och (O.25)):

$$M_{Ed} = M_{0Ed}\left(1 + \frac{\beta_c}{N_B/N_{Ed} - 1}\right)$$
$$N_B = \frac{\pi^2\, EI_{eff}}{l_0^2}, \qquad \beta_c = \frac{\pi^2}{c} \tag{4.59}$$

Det är samma förstoringsfaktor som i ekv. (4.11), med knäcklasten N_B beräknad med den effektiva styvheten ekv. (4.53), och med β_c som tar hänsyn till momentfördelningen, se figur 4.45. Svårigheten är att bestämma EI_{eff}. Med sekantstyvheten vid flytning från en tvärsnittsanalys, som i figur 4.44, ger metoden ofta något mindre moment än metoden med nominell krökning; båda visas i figur 4.46.

4.9.4 Dimensioneringsvillkor och dimensioneringsgång

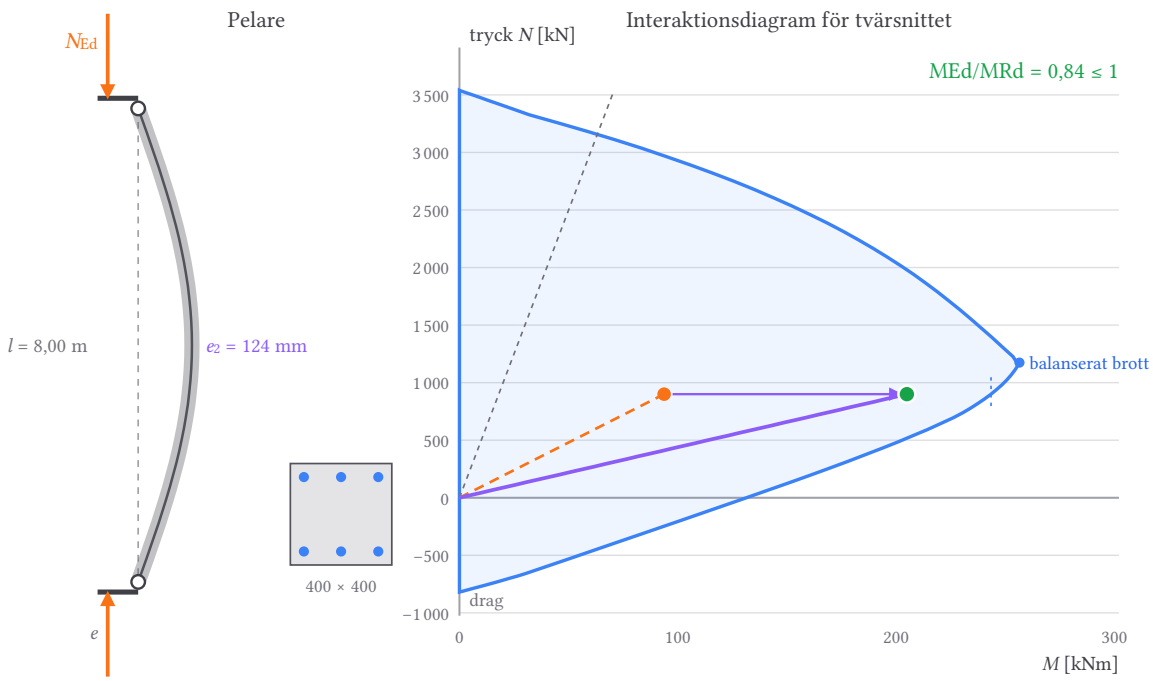
Det dimensionerande momentet, det **pådrivande momentet**, ska vara högst lika med det **mothållande momentet**, tvärsnittets momentkapacitet med normalkraften N_{Ed} verkande i det ospruckna tvärsnittets tyngdpunkt:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}(N_{Ed}) \tag{4.60}$$

Om andra ordningens moment beaktas ska det dimensionerande momentet vara minst lika stort som första ordningens moment (7.4.1(4)). Pelaren dimensioneras i följande steg:

1. Välj pelartvärsnitt och armering.
2. Beräkna första ordningens moment M_{0Ed} med hänsyn till formfel, ekv. (4.44).
3. Bestäm knäcklängden l_0 och slankhetstalet λ, och kontrollera om pelaren är slank, ekv. (4.50). Är den oslank gäller ekv. (4.51).
4. Beräkna den nominella krökningen i brottgränstillståndet, ekv. (4.54), som beaktar armering, normalkraft och krypning.
5. Beräkna andra ordningens moment M_2 och det dimensionerande momentet M_{Ed}, ekv. (4.56) och ekv. (4.57).
6. Beräkna tvärsnittets bärförmåga M_{Rd} med normalkraften N_{Ed} i det ospruckna tvärsnittets tyngdpunkt, ekv. (4.42).
7. Kontrollera dimensioneringsvillkoret ekv. (4.60).
8. Om bärförmågan är otillräcklig väljs ett större tvärsnitt eller mer armering, och beräkningen upprepas.

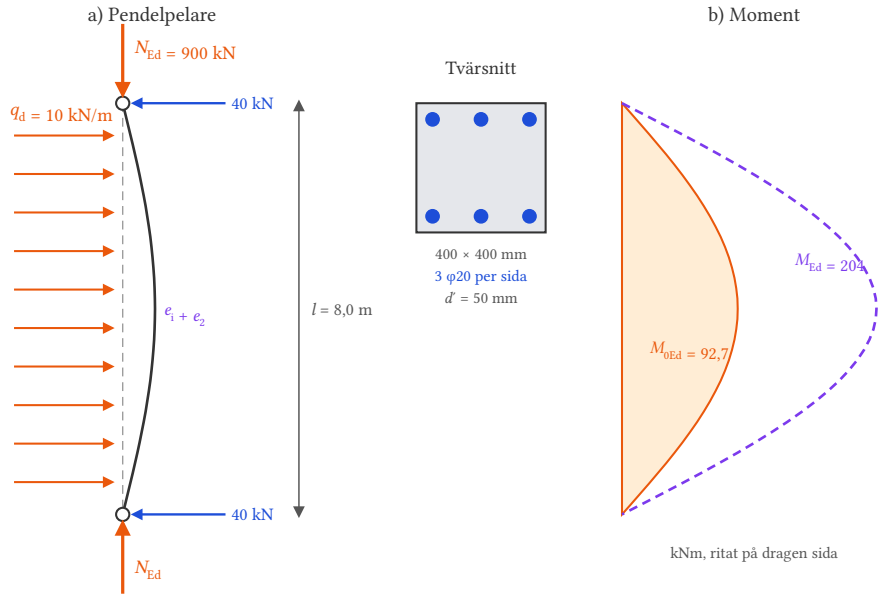
Gången kan prövas i figur 4.46. Lastvägen visar hur momentet växer när normalkraften ökar från noll: för en kort pelare följer den nästan första ordningens linje, för en lång böjer den av mot interaktionskurvan.



Figur 4.46 Slank pendelpelare i interaktionsdiagrammet. Första ordningens moment (orange), dimensionerande moment med andra ordningens moment (lila) och tvärsnittets bärförmåga (blå). Ändra längd, normalkraft, excentricitet, krypning och armering.

Exempel 4.12 Pendelpelare med andra ordningens moment

En avstyvad pendelpelare med längden $l = 8{,}0$ m är ledad i båda ändar. Tvärsnittet är 400 × 400 mm i C30/37 med 3 ϕ20 B500B vid två motstående sidor, $d' = 50$ mm, och armeringen går oavkortad genom hela pelaren. I brottgränstillståndet verkar en centrisk normalkraft $N_{Ed} = 900$ kN och en jämnt utbredd sidolast $q_d = 10$ kN/m, se figur 4.47. Det effektiva kryptalet är $\varphi_{ef} = 1{,}7$. Pelaren är stagad i den veka riktningen. Kontrollera bärförmågan.



Figur 4.47 a) Pendelpelaren i exempel 4.12 med sidolasten, stödreaktionerna $q_d l/2 = 40$ kN och utböjningen (formfel och tillskottsutböjning). b) Första ordningens moment och det dimensionerande momentet inklusive andra ordningens moment.

Material. $f_{cd} = 0{,}85 \cdot 30/1{,}5 = 17{,}0$ MPa, $f_{yd} = 435$ MPa och $\varepsilon_{yd} = 435/200\,000 = 2{,}175$ ‰. Armeringen är $A_s = 3 \cdot 314 = 942$ mm² per sida och $A_{s,tot} = 1\,885$ mm², och $A_c = 160\,000$ mm².

Första ordningens moment. Sidolasten ger momentet $q_d l^2/8 = 10 \cdot 8{,}0^2/8 = 80{,}0$ kNm i mitten. Formfelet: $\alpha_h = 2/\sqrt{8{,}0} = 0{,}707$, så ekv. (4.45) och ekv. (4.46) ger

$$\theta_i = \frac{0{,}707}{200} = 3{,}54 \cdot 10^{-3}$$

$$e_i = \theta_i \cdot \frac{l_0}{2} = 3{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{8\,000}{2} = 14{,}1 \text{ mm}$$

Sidolasten är betydande, så M_{0Ed} är det största momentet längs pelaren, i mitten. Ekv. (4.44) ger

$$M_{0Ed} = 80{,}0 + 900 \cdot 0{,}0141 = 80{,}0 + 12{,}7 = 92{,}7 \text{ kNm}$$

Slankhet. Pelaren är avstyvad och ledad i båda ändar, så $l_0 = l = 8{,}0$ m (tabell 4.9), och $i = 400/\sqrt{12} = 115{,}5$ mm ger $\lambda = 8\,000/115{,}5 = 69{,}3$. Vidare är

$$n = \frac{900\,000}{160\,000 \cdot 17{,}0} = 0{,}331, \qquad \omega = \frac{1\,885 \cdot 435}{160\,000 \cdot 17{,}0} = 0{,}301$$

Momentet kommer från transversell last och formfel, så $C = 0{,}7$. Ekv. (4.50) ger med $A = 1/(1 + 0{,}2 \cdot 1{,}7) = 0{,}746$ och $B = \sqrt{1 + 2 \cdot 0{,}301} = 1{,}266$

$$\lambda_{lim} = \frac{20 \cdot 0{,}746 \cdot 1{,}266 \cdot 0{,}7}{\sqrt{0{,}331}} = 23{,}0 < \lambda = 69{,}3$$

Pelaren är slank, och andra ordningens moment måste beaktas.

Nominell krökning. $n_u = 1 + 0{,}301 = 1{,}301$ ger $k_r = (1{,}301 - 0{,}331)/(1{,}301 - 0{,}4) = 1{,}08$, som begränsas till 1,0. Krypningen ger

$$\beta_{fck} = 0{,}35 + \frac{30}{200} - \frac{69{,}3}{150} = 0{,}038, \qquad k_\varphi = 1 + 0{,}038 \cdot 1{,}7 = 1{,}065$$

och ekv. (4.54) ger med $d - d' = 350 - 50 = 300$ mm

$$\frac{1}{r} = 1{,}0 \cdot 1{,}065 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}175 \cdot 10^{-3}}{300} = 1{,}544 \cdot 10^{-5}\,\text{mm}^{-1}$$

Andra ordningens moment. Pelaren är avstyvad, så $c = 8$. Ekv. (4.56) ger

$$e_2 = \frac{8\,000^2}{8} \cdot 1{,}544 \cdot 10^{-5} = 123{,}5 \text{ mm}, \qquad M_2 = 900 \cdot 0{,}1235 = 111{,}2 \text{ kNm}$$

Dimensionerande moment. Ändmomenten är noll, så ekv. (4.57) ger

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 92{,}7 + 111{,}2 = 203{,}9 \text{ kNm}$$

vilket är större än $N_{Ed} \cdot e_{d,min} = 900 \cdot 0{,}020 = 18{,}0$ kNm.

Momentkapacitet. Anta att båda armeringslagren flyter. Armeringskrafterna $942 \cdot 435 = 409{,}9$ kN tar ut varandra, och

$$x = \frac{N_{Ed}}{0{,}8\, b\, f_{cd}} = \frac{900\,000}{0{,}8 \cdot 400 \cdot 17{,}0} = 165{,}4 \text{ mm}$$

Kontroll av antagandet. $\varepsilon_s' = 3{,}5 \cdot (165{,}4 - 50)/165{,}4 = 2{,}44$ ‰ och $\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot (350 - 165{,}4)/165{,}4 = 3{,}91$ ‰, båda större än ε_{yd}, så antagandet var riktigt. Ekv. (4.42) ger

$$M_{Rd} = 900 \cdot (0{,}200 - 0{,}4 \cdot 0{,}1654) + 2 \cdot 409{,}9 \cdot 0{,}150 = 120{,}5 + 123{,}0 = 243{,}4 \text{ kNm}$$

Kontroll. ekv. (4.60):

$$M_{Ed} = 203{,}9 \text{ kNm} \le M_{Rd} = 243{,}4 \text{ kNm}$$

Bärförmågan är tillräcklig, med utnyttjandegraden $203{,}9/243{,}4 = 0{,}84$.

Andra ordningens moment är större än första ordningens (111 mot 93 kNm): utan det skulle utnyttjandegraden bara vara $92{,}7/243{,}4 = 0{,}38$. Det är alltså pelarens slankhet som styr dimensioneringen, inte sidolasten. Med momentförstoring och sekantstyvheten vid flytning från tvärsnittsanalysen i figur 4.44 ($EI_{eff} \approx 12{,}7$ MNm², $\beta_c = 1{,}03$ för en parabolisk fördelning) blir $M_{Ed} \approx 173$ kNm, alltså något mindre. Samma pelare kan prövas i figur 4.46.

Sammanfattning

4.10 Sammanfattning

Det här avsnittet sammanfattar hur pelare av de tre materialen dimensioneras i kursen. Grunden är densamma för alla: en pelare ska klara det totala momentet, första plus andra ordningens, tillsammans med den samtidigt verkande normalkraften (avsnitt 4.2.5). Det som skiljer är hur andra ordningens effekter tas med och vad som jämförs, se tabell 4.11.

Tabell 4.11 Dimensionering av pelare per material i kursen.

Material	**Endast normalkraft N**	**Normalkraft och moment $N + M$**	**Vad som jämförs**
Trä	förenklad metod: knäckkurva, faktorn k_c (avsnitt 4.5)	förenklad metod: k_c och interaktionsvillkor (avsnitt 4.5)	tryck- och böjspänning mot reducerad hållfasthet
Stål	förenklad metod: knäckkurva, faktorn χ (avsnitt 4.6)	snittkraftsmetod: M_{Ed} med andra ordningens moment (avsnitt 4.7)	N_{Ed} mot $N_{b,Rd}$ M_{Ed} mot momentkapaciteten vid N_{Ed}
Betong	snittkraftsmetod (avsnitt 4.8)	snittkraftsmetod: $M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2$ (avsnitt 4.9)	$M_{Ed} \le M_{Rd}$ vid N_{Ed}

Knäckkurvorna för trä och stål utgår från Eulers kurva för en ideal, elastisk pelare (avsnitt 4.1.7) och är modifierade för imperfektioner, egenspänningar och plasticering. Snittkraftsmetoden beräknar i stället momentet uttryckligen och jämför det med tvärsnittets interaktionskurva (avsnitt 4.3).

4.10.1 Arbetsgång

Trä

1. Bestäm knäcklängden $L_{cr} = \beta L$ i båda riktningarna med de praktiska värdena för trä (figur 4.23) och den relativa slankheten (ekv. (4.7)).
2. Beräkna k_c ur knäckkurvan.
3. Kontrollera tryckspänningen mot k_c gånger tryckhållfastheten, med ett eventuellt moment i interaktionsvillkoret. Kontrollera också tryck vinkelrätt mot fibrerna vid upplag (avsnitt 4.4).

Stål

1. Bestäm tvärsnittsklass (avsnitt 1.4) och knäcklängd i båda riktningarna (tabell 4.6).
2. Beräkna N_{cr} (ekv. (4.3)) och $\bar{\lambda}$, välj knäckkurva och beräkna χ och $N_{b,Rd}$.
3. Vid normalkraft och moment: ansätt imperfektionen e_0, förstora första ordningens moment (ekv. (4.11)) och kontrollera tvärsnittet för N_{Ed} och M_{Ed}: plastiskt kring y –y med det linjära sambandet (ekv. (4.41)) och kring z –z med uppdelat spänningsblock (Vilken interaktion får användas?).

Betong

1. Bestäm första ordningens moment med imperfektionen och minimiexcentriciteten (avsnitt 4.8).
2. Bestäm knäcklängden ur inspänningarnas styvhet (tabell 4.9) och kontrollera om pelaren är slank; om den är det, beräkna andra ordningens moment (avsnitt 4.9).
3. Kontrollera att $M_{Ed} \leq M_{Rd}$ vid N_{Ed} med tvärsnittsanalys (avsnitt 1.7.7).

5 Tilläggsmaterial

5.1 Tyngdpunkt

Nästan varje tvärsnittsberäkning börjar med att bestämma tvärsnittets tyngdpunkt. Böjspänningar, yttrögheтsmoment och excentriciteter räknas alla från axlar genom den. Det här avsnittet visar hur tyngdpunkten bestäms för enkla och sammansatta tvärsnitt. Det förklarar också skillnaden mellan geometrisk tyngdpunkt, tyngdpunkt i egentlig mening och styvhetens tyngdpunkt, som sammanfaller bara när materialet är homogent.

5.1.1 Tre sorters tyngdpunkt

Ordet tyngdpunkt används för tre olika punkter:

- **Geometrisk tyngdpunkt** (areacentrum, *centroid*): beror bara på tvärsnittets form. Det är den punkt där en jämnt fördelad egenskap över arean har sin resultant.
- **Tyngdpunkt** i egentlig mening (masscentrum, *centre of gravity*): den punkt där resultanten av egentyngden angriper. Varje del vägs med sin tunghet γ_i (kN/m³).
- **Styvhetens tyngdpunkt** (elastisk tyngdpunkt): den punkt där en normalkraft ger en jämnt fördelad töjning, utan böjning. Varje del vägs med sin elasticitetsmodul E_i. Vid ren böjning går neutrallagret genom denna punkt.

I ett **homogent** tvärsnitt, med samma tunghet och samma elasticitetsmodul överallt, tar vikterna ut varandra och de tre punkterna sammanfaller. Därför talar man i regel bara om tvärsnittets tyngdpunkt (TP), och menar då den geometriska. Hur punkterna skiljer sig åt när tvärsnittet består av flera material visas sist i avsnittet.

5.1.2 Statiskt moment och tyngdpunkt

En areas **statiska moment** (förstagradsmoment, *first moment of area*) kring en axel är summan av varje areaelement gånger dess avstånd till axeln:

$$S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A, \qquad S_z = \int_A y \, \mathrm{d}A. \tag{5.1}$$

Tyngdpunkten är den punkt där hela arean kan tänkas samlad med samma statiska moment. Med koordinaterna ζ_y och ζ_z mätta från valfria referenslinjer är

$$\zeta_y = \frac{S_z}{A}, \qquad \zeta_z = \frac{S_y}{A}. \tag{5.2}$$

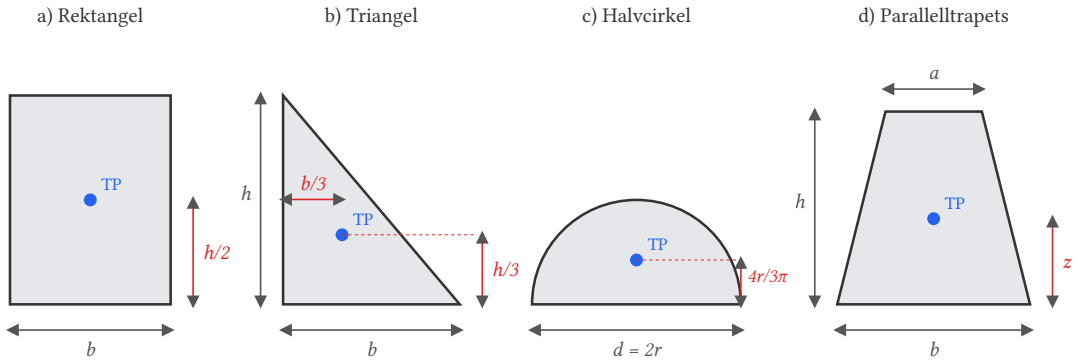
Det statiska momentet kring en axel genom tyngdpunkten är därför noll. Det används till exempel för att bestämma neutrallagret i ett sprucket betongtvärsnitt, där tryckzonens statiska moment är lika stort som dragarmeringens (avsnitt 5.2.3).

Två regler gör det ofta enkelt att hitta tyngdpunkten:

- Har tvärsnittet en **symmetriaxel**, ligger tyngdpunkten på den. Med två symmetriaxlar ligger den i skärningspunkten.
- Referenslinjen får väljas fritt. En kant eller en symmetriaxel ger oftast enklast räkning.

5.1.3 Enkla figurer

Tyngdpunktens läge för några enkla figurer, se figur 5.1. Avstånden är räknade från figurens bas (den nedre kanten), och A är arean.



Figur 5.1 Tyngdpunktens läge för några enkla figurer.

Tabell 5.1 Area och tyngdpunktens läge, räknat från basen, för enkla figurer

Figur	**Area A**	**Tyngdpunkt från basen**
Rektangel $b \times h$	bh	$\dfrac{h}{2}$
Triangel, bas b, höjd h	$\dfrac{bh}{2}$	$\dfrac{h}{3}$
Cirkel, diameter d	$\dfrac{\pi d^2}{4}$	i centrum
Halvcirkel, radie r	$\dfrac{\pi r^2}{2}$	$\dfrac{4r}{3\pi}$
Parallelltrapets, parallella sidor b (bas) och a	$\dfrac{(a+b)h}{2}$	$\dfrac{h}{3}\cdot\dfrac{b+2a}{a+b}$

För en rätvinklig triangel ligger tyngdpunkten också på avståndet $b/3$ från den lodräta kateten. Parallelltrapetsen ger rektangeln när $a = b$ och triangeln när $a = 0$.

5.1.4 Sammansatta tvärsnitt

Ett sammansatt tvärsnitt delas upp i enkla delar i med areorna A_i och kända tyngdpunkter $\zeta_{y,i}, \zeta_{z,i}$. Eftersom statiska moment kan adderas, är hela tvärsnittets tyngdpunkt

$$\zeta_y = \frac{\sum A_i\,\zeta_{y,i}}{\sum A_i}, \qquad \zeta_z = \frac{\sum A_i\,\zeta_{z,i}}{\sum A_i}. \tag{5.3}$$

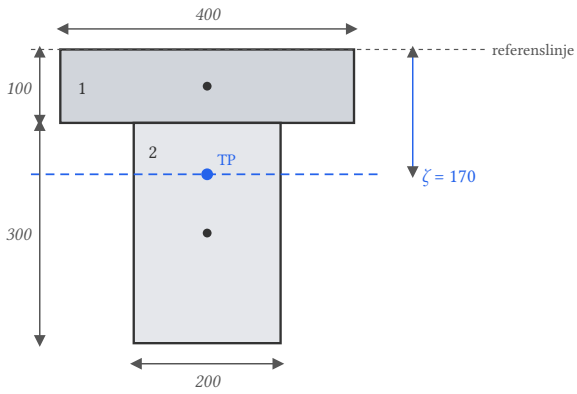
Ett **hål** räknas som en del med negativ area: dess area och statiska moment dras ifrån.

Gången är alltid densamma:

1. Välj referenslinjer och dela upp tvärsnittet i enkla delar.
2. Beräkna varje dels area A_i och tyngdpunktsavstånd ζ_i.
3. Summera A_i och $A_i\zeta_i$, gärna i en tabell, och dividera.

Exempel 5.1 Tyngdpunkt för ett T-tvärsnitt

Ett T-tvärsnitt består av en fläns 400 × 100 mm och ett liv 200 × 300 mm under flänsen, se figur 5.2. Bestäm tyngdpunktens läge.



Figur 5.2 T-tvärsnittet i exemplet. Måtten är i mm.

Symmetri. Tvärsnittet är symmetriskt kring den lodräta axeln, så tyngdpunkten ligger på den. Det återstår att bestämma höjdläget.

Delar. Referenslinjen läggs i överkanten och ζ räknas nedåt:

$$A_1 = 400 \cdot 100 = 40\,000 \text{mm}^2, \zeta_1 = 50 \text{ mm}$$

$$A_2 = 200 \cdot 300 = 60\,000 \text{mm}^2, \zeta_2 = 100 + 150 = 250 \text{ mm}$$

Tyngdpunkt. ekv. (5.3) ger

$$\zeta = \frac{40\,000 \cdot 50 + 60\,000 \cdot 250}{40\,000 + 60\,000} = \frac{17{,}0 \cdot 10^6}{100\,000} = 170 \text{ mm}$$

Tyngdpunkten ligger alltså 170 mm under överkanten, i livet strax under flänsen. Yttröghetsmomentet för samma tvärsnitt beräknas i exempel 5.2.

Ett hål flyttar tyngdpunkten bort från hålet. Ett tvärsnitt 300×500 mm med ett cirkulärt hål med diametern 100 mm, vars centrum ligger 150 mm under överkanten, har till exempel

$$\zeta = \frac{300 \cdot 500 \cdot 250 - \frac{\pi \cdot 100^2}{4} \cdot 150}{300 \cdot 500 - \frac{\pi \cdot 100^2}{4}} = 255{,}5 \text{ mm}$$

under överkanten, i stället för 250 mm utan hål.

5.1.5 Tvärsnitt av flera material

När delarna har olika material vägs de olika beroende på vilken punkt som söks:

$$\zeta_\gamma = \frac{\sum \gamma_i A_i \zeta_i}{\sum \gamma_i A_i}, \qquad \zeta_E = \frac{\sum E_i A_i \zeta_i}{\sum E_i A_i}. \tag{5.4}$$

Den första, med tungheten γ_i, ger var egentyngden angriper. Den andra, med elasticitetsmodulen E_i, ger styvhetens tyngdpunkt, som är den som behövs för spänningar och deformationer. Delas båda leden med en referensmodul E_c fås vikterna E_i/E_c, det vill säga de omräknade areorna i ett **ekvivalent tvärsnitt**. För armerad betong är vikten för armeringen $\alpha = E_s/E_{cm}$, och styvhetens tyngdpunkt är tyngdpunkten x_{tp} för det ekvivalenta betongtvärsnittet (avsnitt 2.1.3).

De två punkterna skiljer sig åt eftersom vikterna inte är proportionella. Stål är ungefär 3 gånger tyngre än betong (78,5/25), men ungefär 6 gånger styvare (E_s/E_{cm}). I ett armerat betongtvärsnitt ligger därför styvhetens tyngdpunkt längre mot armeringen än egentyngdens. Båda skiljer sig från den geometriska tyngdpunkten, som inte bryr sig om materialet alls. Skillnaden är liten i ett normalt armerat tvärsnitt men stor i till exempel samverkansbalkar av stål och betong eller trä och betong.

> **Notera:** I tvärsnittsanalysen i boken avser "tyngdpunkt" alltid styvhetens tyngdpunkt. För ett homogent tvärsnitt är det samma sak som den geometriska tyngdpunkten. För armerad betong är det det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt.

5.2 Yttröghetsmoment

Det här avsnittet samlar formlerna för area och yttröghetsmoment som används i boken. Bruttotvärsnitt kommer först, sedan ekvivalenta betongtvärsnitt i stadium I och II. Tyngdpunkten, som behövs först, behandlas i avsnitt 5.1. Hur formlerna härleds och används för betong förklaras i avsnitt 2.1.3, avsnitt 2.2 och avsnitt 2.3.

5.2.1 Bruttotvärsnitt

Formlerna gäller för tvärsnitt av stål och trä, och för osprucken betong när armeringens bidrag försummas. Axeln y är vågrät och axeln z lodrät och positiv nedåt, som i resten av boken. I_y hör till böjning kring y-axeln, alltså till ett lodrätt böjmoment i en balk.

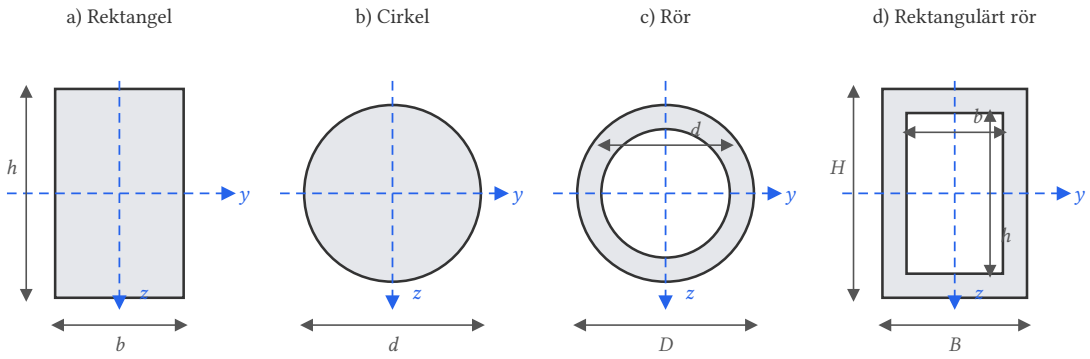
Yttröghetsmomentet kring en axel är summan (integralen) av varje areaelement gånger kvadraten på dess avstånd till axeln:

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A, \qquad I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A. \tag{5.5}$$

Det beror alltså på hur långt från axeln materialet ligger, inte bara på hur mycket material det är.

Grundfigurer

Yttröghetsmomenten kring tyngdpunktsaxlarna för de vanligaste grundfigurerna, se figur 5.3:



Figur 5.3 Grundfigurer med tyngdpunktsaxlarna y och z.

a) Rektangel med bredden b och höjden h:

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \qquad I_z = \frac{hb^3}{12}. \tag{5.6}$$

b) Cirkel med diametern d (radien $r = d/2$):

$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}. \tag{5.7}$$

c) Rör (cirkulärt ringtvärsnitt) med ytterdiametern D och innerdiametern d:

$$I_y = I_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}. \tag{5.8}$$

d) Rektangulärt rör med yttermåtten $B \times H$ och innermåtten $b \times h$, med hålet centrerat:

$$I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}, \qquad I_z = \frac{HB^3 - hb^3}{12}. \tag{5.9}$$

Böjmotståndet $W = I/z_{max}$, där z_{max} är avståndet från tyngdpunkten till den yttersta fibern, ger kantspänningen $\sigma = M/W$. För en rektangel är $W_y = bh^2/6$, för en cirkel $W = \pi d^3/32$ och för ett rör $W = \pi(D^4 - d^4)/(32D)$.

Addition och subtraktion

Eftersom yttröghetsmomentet är en summa över arean, får yttröghetsmoment för delareor **adderas**, och för hål **subtraheras**, förutsatt att de är räknade kring **samma axel**:

$$I_y = \sum_i I_{y,i} - \sum_j I_{y,j}^{\text{hål}}. \tag{5.10}$$

Röret och det rektangulära röret ovan är exempel: när hålet och ytterkonturen har samma tyngdpunkt kan hålets yttröghetsmoment dras direkt från ytterkonturens. Ett I-tvärsnitt kan på samma sätt räknas som en stor rektangel $b \times h$ minus två rektanglar vid livets sidor:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}(b - t_w)\, h_w^3}{12} = \frac{bh^3 - (b - t_w)h_w^3}{12}$$

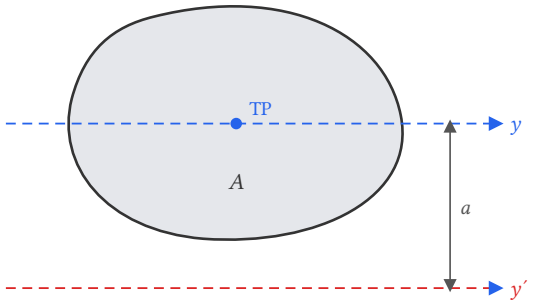
där t_w är livets tjocklek och $h_w = h - 2t_f$ livets höjd mellan flänsarna. Ligger delarnas egna tyngdpunkter inte på samma axel måste varje bidrag först flyttas till den gemensamma axeln med Steiners sats, som följer.

Parallell axel – Steiners sats

Yttröghetsmomentet kring en axel y' som är parallell med tyngdpunktsaxeln y på avståndet a, se figur 5.4, är

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \tag{5.11}$$

där I_y är yttröghetsmomentet kring tyngdpunktsaxeln och A arean. Sambandet följer ur ekv. (5.5) med $z' = z + a$: termen $2a \int z \, \mathrm{d}A$ försvinner eftersom tyngdpunktsaxelns statiska moment är noll.



Figur 5.4 Tyngdpunktsaxeln y och en parallell axel y' på avståndet a.

Två följder är viktiga:

- Tillskottet $a^2 A$ är alltid positivt. Yttröghetsmomentet är därför **minst kring tyngdpunktsaxeln**, och växer med kvadraten på avståndet. Det är därför flänsarna i ett I-tvärsnitt bidrar mest till I_y.
- Steiners sats gäller bara när den ena axeln går genom tyngdpunkten. Ska yttröghetsmomentet flyttas mellan två axlar som ingen av dem går genom tyngdpunkten, flyttas det först till tyngdpunktsaxeln och sedan vidare.

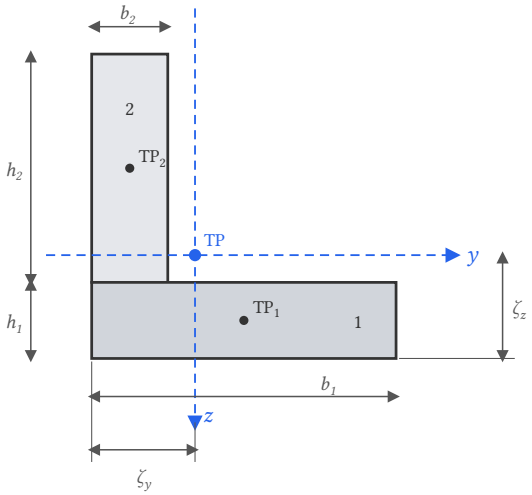
Sammansatta tvärsnitt

Ett sammansatt tvärsnitt delas upp i delar i med kända areor A_i, egna tyngdpunkter och egna yttröghetsmoment $I_{y,i}$. Först bestäms hela tvärsnittets tyngdpunkt med ekv. (5.3), se avsnitt 5.1. Koordinaterna $\zeta_{y,i}$ och $\zeta_{z,i}$ anger var delarnas tyngdpunkter ligger, räknat från valfria referenslinjer.

Yttröghetsmomentet kring hela tvärsnittets tyngdpunktsaxel fås genom att flytta varje dels yttröghetsmoment till den axeln med Steiners sats, ekv. (5.11), och sedan addera. Varje del bidrar med sitt eget yttröghetsmoment plus sin area gånger kvadraten på avståndet a_i mellan delens tyngdpunkt och hela tvärsnittets tyngdpunkt:

$$I_y = \sum \left(I_{y,i} + a_{z,i}^2 \, A_i \right), \qquad a_{z,i} = \zeta_z - \zeta_{z,i}. \tag{5.12}$$

Motsvarande gäller för I_z med avstånden $a_{y,i} = \zeta_y - \zeta_{y,i}$ i sidled.

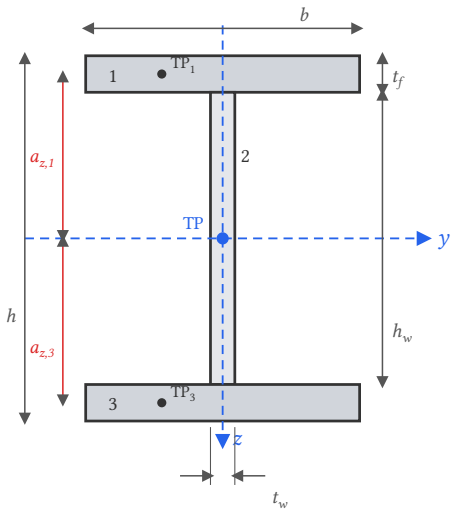


Figur 5.5 L-tvärsnitt uppdelat i två rektanglar, med delarnas tyngdpunkter TP_1 och TP_2 och hela tvärsnittets tyngdpunkt TP.

L-tvärsnitt. Tvärsnittet delas i en liggande rektangel 1 ($b_1 \times h_1$) och en stående rektangel 2 ($b_2 \times h_2$) ovanpå den, se figur 5.5. Med referenslinjerna i vänsterkant och underkant är

$$A_1 = b_1 h_1, \quad \zeta_{y,1} = \frac{b_1}{2}, \quad \zeta_{z,1} = \frac{h_1}{2}; \qquad A_2 = b_2 h_2, \quad \zeta_{y,2} = \frac{b_2}{2}, \quad \zeta_{z,2} = h_1 + \frac{h_2}{2}.$$

Tyngdpunkten fås ur ekv. (5.3). Delarnas egna yttröghetsmoment är $I_{y,i} = b_i h_i^3/12$ och $I_{z,i} = h_i b_i^3/12$, och ekv. (5.12) ger sedan I_y och I_z.



Figur 5.6 Dubbelsymmetriskt I-tvärsnitt uppdelat i två flänsar (1, 3) och ett liv (2), med flänsarnas avstånd till tyngdpunktsaxeln.

I-tvärsnitt. Ett dubbelsymmetriskt I-tvärsnitt delas i två flänsar ($b \times t_f$) och ett liv ($t_w \times h_w$), se figur 5.6. Tyngdpunkten ligger på symmetriaxlarna, så livet har ingen Steinerterm och flänsarna har avståndet $a_{z,1} = a_{z,3} = (h - t_f)/2$:

$$I_y = 2\left(\frac{b t_f^3}{12} + \left(\frac{h - t_f}{2}\right)^2 b t_f\right) + \frac{t_w h_w^3}{12}$$

Eftersom alla delar har sina tyngdpunkter på den lodräta symmetriaxeln behövs inga Steinertermer för I_z. Allmänt gäller alltså:

$$I_y = \sum (I_{y,i} + a_{z,i}^2\, A_i), \qquad I_z = \sum I_{z,i}.$$

Exempel 5.2 Yttröghetsmoment för ett T-tvärsnitt

T-tvärsnittet i exempel 5.1 har flänsen 400 × 100 mm och livet 200 × 300 mm. Tyngdpunkten ligger $\zeta = 170$ mm under överkanten. Bestäm I_y kring tyngdpunktsaxeln.

Avstånd till tyngdpunktsaxeln. Flänsens tyngdpunkt ligger 50 mm och livets 250 mm under överkanten:

$$a_1 = 170 - 50 = 120 \text{ mm}, \qquad a_2 = 250 - 170 = 80 \text{ mm}$$

Steiners sats för varje del (ekv. (5.11)):

$$I_{y,1} + a_1^2 A_1 = \frac{400 \cdot 100^3}{12} + 120^2 \cdot 40\,000 = 33{,}3 \cdot 10^6 + 576 \cdot 10^6 = 609{,}3 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{y,2} + a_2^2 A_2 = \frac{200 \cdot 300^3}{12} + 80^2 \cdot 60\,000 = 450 \cdot 10^6 + 384 \cdot 10^6 = 834 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Summa.

$$I_y = 609{,}3 \cdot 10^6 + 834 \cdot 10^6 = 1\,443 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Steinertermerna står för två tredjedelar av resultatet. Hade delarnas egna yttröghetsmoment bara adderats, utan att flyttas till den gemensamma axeln, hade resultatet blivit alldeles för litet.

5.2.2 Ekvivalent betongtvärsnitt i stadium I

I ett osprucket armerat tvärsnitt räknas armeringen om till betong med förhållandet mellan elasticitetsmodulerna:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}}.$$

Armeringen ligger i betong som redan räknas med i bruttoarean, och därför läggs den till med faktorn $(\alpha - 1)$. För ett rektangulärt tvärsnitt med dragarmering A_s på djupet d och tryckarmering A'_s på djupet d', med x_{tp} mätt från överkanten, gäller

$$A_I = bh + (\alpha - 1)A'_s + (\alpha - 1)A_s,$$

$$x_{tp} = \frac{bh \cdot h/2 + (\alpha - 1)A'_s\, d' + (\alpha - 1)A_s\, d}{A_I},$$

$$I_I = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2} - x_{tp}\right)^2 + (\alpha - 1)A'_s(d' - x_{tp})^2 + (\alpha - 1)A_s(d - x_{tp})^2.$$

Armeringsjärnens egna yttröghetsmoment är försumbara; bara deras Steinertermer tas med. Sammansatta tvärsnitt (till exempel T-tvärsnitt) behandlas som ovan: betongens bruttotvärsnitt delas upp i rektanglar, och armeringen läggs till på samma sätt.

> **Notera:** I stadium I påverkar armeringen tvärsnittskonstanterna ganska lite. Vid beräkning av sprickmomentet räcker det därför oftast att använda betongens bruttotvärsnitt.

5.2.3 Ekvivalent betongtvärsnitt i stadium II

I ett böjsprucket tvärsnitt räknas bara den tryckta betongen med. Armering i tryckzonen läggs till med faktorn $(\alpha - 1)$. Dragarmeringen ligger i sprucken betong, som inte räknas med, och läggs därför till med faktorn α.

Rektangulärt tvärsnitt, ren böjning

Utan normalkraft går neutrallagret genom det ekvivalenta tvärsnittets tyngdpunkt, $x = x_{tp}$. Tryckzonens höjd x fås därför ur en tyngdpunktsekvation, där tryckzonens statiska moment kring neutrallagret är lika med dragarmeringens:

$$bx \cdot \frac{x}{2} + (\alpha - 1)A'_s(x - d') = \alpha A_s(d - x).$$

Ekvationen är av andra graden i x. Därefter är

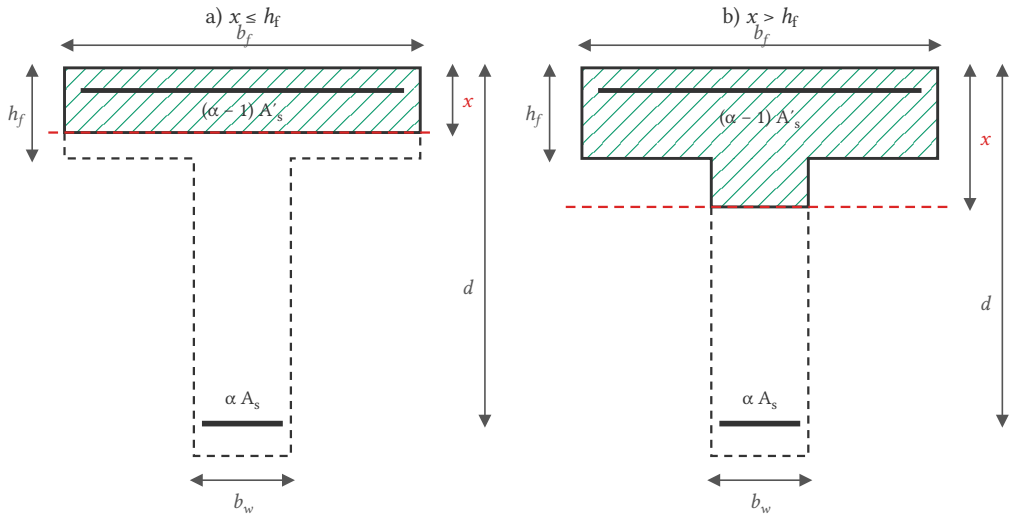
$$A_{II} = bx + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s,$$

$$I_{II} = \frac{bx^3}{3} + (\alpha - 1)A'_s(x - d')^2 + \alpha A_s(d - x)^2.$$

Termen $bx^3/3$ är tryckzonens eget yttröghetsmoment $bx^3/12$ plus dess Steinerterm $bx\,(x/2)^2$.

T-tvärsnitt, ren böjning

För ett T-tvärsnitt beror uttrycken på om tryckzonen ryms i flänsen eller går ner i livet, se figur 5.7. Börja med att anta att $x \leq h_f$. Om det beräknade x blir större än h_f, delas tryckzonen i flänsen och den del av livet som ligger under flänsen.



Figur 5.7 T-tvärsnitt i stadium II. Tryckzonen är skrafferad och den spruckna betongen streckad. a) Tryckzonen ryms i flänsen. b) Tryckzonen går ner i livet.

Om $x \leq h_f$ räknas tvärsnittet som ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b_f:

$$b_f x \cdot \frac{x}{2} + (\alpha - 1)A'_s(x - d') = \alpha A_s(d - x),$$

$$A_{II} = b_f x + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s, \qquad I_{II} = \frac{b_f x^3}{3} + (\alpha - 1)A'_s(x - d')^2 + \alpha A_s(d - x)^2.$$

Om $x > h_f$ består tryckzonen av hela flänsen ($b_f \times h_f$) och livet ($b_w \times (x - h_f)$) under den:

$$b_f h_f\left(x-\frac{h_f}{2}\right)+b_w\frac{(x-h_f)^2}{2}+(\alpha-1)A'_s(x-d')=\alpha A_s(d-x),$$

$$A_{II}=b_f h_f+b_w(x-h_f)+(\alpha-1)A'_s+\alpha A_s,$$

$$I_{II}=\frac{b_f h_f^3}{12}+b_f h_f\left(x-\frac{h_f}{2}\right)^2+\frac{b_w(x-h_f)^3}{3}+(\alpha-1)A'_s(x-d')^2+\alpha A_s(d-x)^2.$$

T-tvärsnitt, böjning med normalkraft

Med en normalkraft går neutrallagret inte längre genom tyngdpunkten, så $x \neq x_{tp}$. En dragande normalkraft flyttar neutrallagret uppåt och en tryckande nedåt. Tryckzonens höjd bestäms då genom iteration enligt avsnitt 2.3.3:

1. Anta x och beräkna det ekvivalenta tvärsnittets konstanter enligt nedan.
2. Lastfallet ersätts med normalkraften N i tyngdpunkten x_{tp} och momentet $M+Ne$, där e är normalkraftens excentricitet i förhållande till x_{tp} (positiv nedåt). Om momentet M är givet kring dragarmeringen är $e=d-x_{tp}$.
3. Beräkna betongspänningen i neutrallagret med Naviers formel, Naviers formel, för $z=x-x_{tp}$:
$$\sigma(z)=\frac{N}{A_{II}}+\frac{M+Ne}{I_{II}}\,z.$$
4. Om $\sigma(x-x_{tp})\neq 0$ väljs ett nytt x och beräkningen upprepas.

Om $x \leq h_f$:

$$A_{II}=b_f x+(\alpha-1)A'_s+\alpha A_s,$$

$$x_{tp}=\frac{b_f x\cdot x/2+(\alpha-1)A'_s\,d'+\alpha A_s\,d}{A_{II}},$$

$$I_{II}=\frac{b_f x^3}{12}+b_f x\left(\frac{x}{2}-x_{tp}\right)^2+(\alpha-1)A'_s\left(x_{tp}-d'\right)^2+\alpha A_s\left(d-x_{tp}\right)^2.$$

Om $x > h_f$:

$$A_{II}=b_f h_f+b_w(x-h_f)+(\alpha-1)A'_s+\alpha A_s,$$

$$x_{tp}=\frac{b_f h_f\cdot h_f/2+b_w(x-h_f)\cdot(x+h_f)/2+(\alpha-1)A'_s\,d'+\alpha A_s\,d}{A_{II}},$$

$$I_{II}=\frac{b_f h_f^3}{12}+b_f h_f\left(x_{tp}-\frac{h_f}{2}\right)^2+\frac{b_w(x-h_f)^3}{12}+b_w(x-h_f)\left(\frac{x+h_f}{2}-x_{tp}\right)^2$$
$$+(\alpha-1)A'_s\left(x_{tp}-d'\right)^2+\alpha A_s\left(d-x_{tp}\right)^2.$$

Här mäts armeringens avstånd från tyngdpunkten x_{tp}, inte från neutrallagret x, eftersom x_{tp} och x inte sammanfaller när det finns en normalkraft.

5.3 Elementarfall för balkar

Tabellerna i detta avsnitt ger stödreaktioner, inspänningsmoment, vinkeländringar och nedböjningar för raka balkar med konstant böjstyvhet EI och fyra olika upplagsförhållanden. Varje tabell har en kolumn per lastfall; ett värde i tabellen multipliceras med lastens storlek. Eftersom balken är linjärt elastisk kan flera laster kombineras genom att resultaten adderas (superposition).

Tabellerna bygger på tabellerna B.1–B.4 i appendix B i *Bärande konstruktioner*, del 1 (Chalmers), med nyritade figurer. Alla värden har kontrollerats genom numerisk integration av krökningen (se avsnitt 2.8.2), och två tryckfel i originalet är rättade.

5.3.1 Beteckningar och tecken

Lasterna betecknas:

- M_1, M_2: moment som angriper i vänster respektive höger balkände;
- P_1: punktlast i balkens mitt (för konsolen: i den fria änden);
- P_2: punktlast på avståndet a från vänster ände, med $b = L - a$
- W_1: jämnt utbredd last (kN/m) över hela balken;
- W_2: triangelformad last med största intensiteten W_2 i den ände som figuren visar;
- W_3: jämnt utbredd last (kN/m) över längden a från vänster ände.

Resultaten är:

- R_1, R_2: stödreaktioner, positiva uppåt;
- M_1, M_2 (som resultat): inspänningsmoment i en fast inspänd ände. De är stödmoment, alltså moment som ger drag i överkant;
- m_1, m_2: vinkeländringar (rad) vid vänster respektive höger ände;
- p_1: nedböjning i balkens mitt (för konsolen: i den fria änden);
- p_2: nedböjning under lasten P_2, det vill säga i $x = a$.

Nedböjningar är positiva nedåt och vinkeländringar är positiva i den riktning som figuren visar, vilket följer bokens teckenkonvention. Ett pålagt ändmoment M_1 eller M_2 vid en fritt upplagd ände ger drag i underkant.

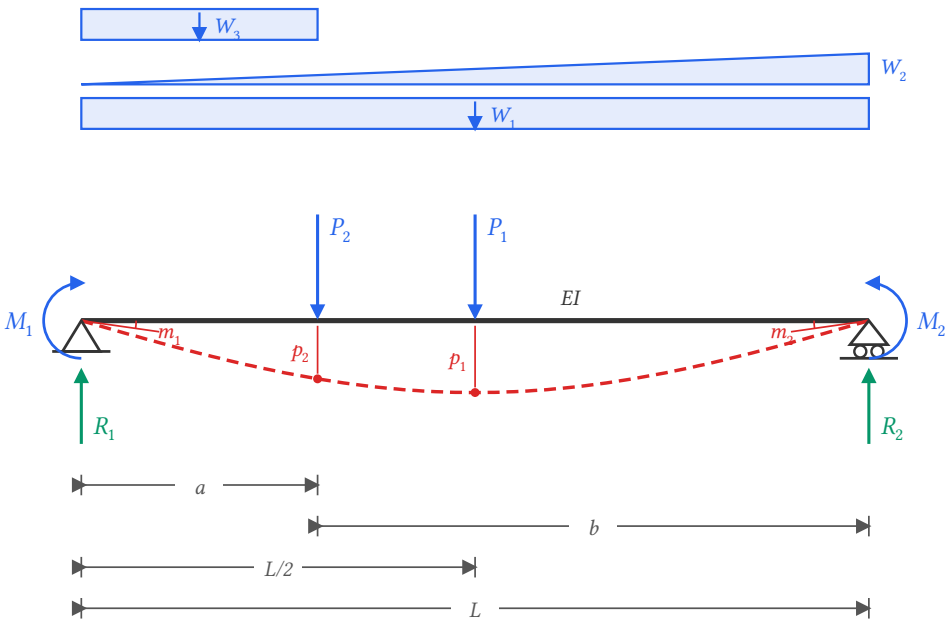
Vinkeländringarna och nedböjningarna i tabellerna är multiplicerade med EI. Till exempel betyder värdet $L^3/48$ i kolumnen $EI \cdot p_1$ för lasten P_1 att nedböjningen i mitten blir

$$p_1 = \frac{P_1 L^3}{48EI}.$$

Ett streck (–) betyder att värdet inte är tabellerat.

5.3.2 Fritt upplagd balk

Laster, stödreaktioner och deformationer för fritt upplagda balken visas i figur 5.8.



Figur 5.8 Fritt upplagd balk: laster, stödreaktioner, vinkeländringar och nedböjningar.

Tabell 5.2 Fritt upplagd balk: stödreaktioner per enhet last

Last	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{R_2}$
M_1	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L}$
M_2	$\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L}$
P_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
P_2	$\frac{b}{L}$	$\frac{a}{L}$
W_1	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$
W_2	$\frac{L}{6}$	$\frac{L}{3}$
W_3	$a\left(1-\frac{a}{2L}\right)$	$\frac{a^2}{2L}$

Tabell 5.3 Fritt upplagd balk: vinkeländringar och nedböjningar multiplicerade med EI

Last	$\boldsymbol{EI\cdot m_1}$	$\boldsymbol{EI\cdot m_2}$	$\boldsymbol{EI\cdot p_1}$	$\boldsymbol{EI\cdot p_2}$
M_1	$\frac{L}{3}$	$\frac{L}{6}$	$\frac{L^2}{16}$	$\frac{bL}{6}\left(1-\frac{b^2}{L^2}\right)$
M_2	$\frac{L}{6}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{L^2}{16}$	$\frac{aL}{6}\left(1-\frac{a^2}{L^2}\right)$
P_1	$\frac{L^2}{16}$	$\frac{L^2}{16}$	$\frac{L^3}{48}$	A
P_2	$\frac{bL}{6}\left(1-\frac{b^2}{L^2}\right)$	$\frac{aL}{6}\left(1-\frac{a^2}{L^2}\right)$	A	$\frac{a^2b^2}{3L}$
W_1	$\frac{L^3}{24}$	$\frac{L^3}{24}$	$\frac{5L^4}{384}$	$\frac{aL^3}{24}\left(1-\frac{2a^2}{L^2}+\frac{a^3}{L^3}\right)$
W_2	$\frac{7L^3}{360}$	$\frac{L^3}{45}$	$\frac{5L^4}{768}$	$\frac{aL^3}{360}\left(7-\frac{10a^2}{L^2}+\frac{3a^4}{L^4}\right)$
W_3	$\frac{a^2L}{24}\left(2-\frac{a}{L}\right)^2$	$\frac{a^2L}{24}\left(2-\frac{a^2}{L^2}\right)$	–	–

där

$$EI\cdot A=\begin{cases}\dfrac{aL^2}{48}\left(3-\dfrac{4a^2}{L^2}\right) & a\le L/2\\[2ex] \dfrac{bL^2}{48}\left(3-\dfrac{4b^2}{L^2}\right) & a\ge L/2\end{cases}$$

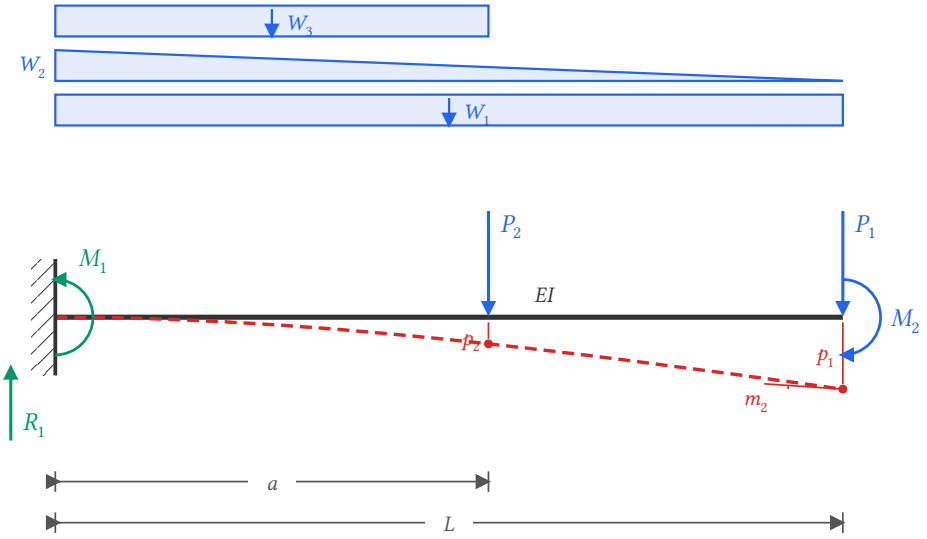
Snittmomentet i mitten av M_1, M_2, P_1, W_1 och W_2 är

$$M_{mitt}=\frac{M_1}{2}+\frac{M_2}{2}+\frac{P_1L}{4}+\frac{W_1L^2}{8}+\frac{W_2L^2}{16}$$

och snittmomentet under P_2 av P_2 är $P_2\,ab/L$.

5.3.3 Konsol

Laster, stödreaktioner och deformationer för konsolen visas i figur 5.9.



Figur 5.9 Konsol, fast inspänd i vänster ände.

Tabell 5.4 Konsol, fast inspänd i vänster ände: stödreaktioner och inspänningsmoment per enhet last

Last	R_1	M_1
P_1	1	L
P_2	1	a
M_2	0	1
W_1	L	$\frac{L^2}{2}$
W_2	$\frac{L}{2}$	$\frac{L^2}{6}$
W_3	a	$\frac{a^2}{2}$

Tabell 5.5 Konsol, fast inspänd i vänster ände: vinkeländringar och nedböjningar multiplicerade med EI

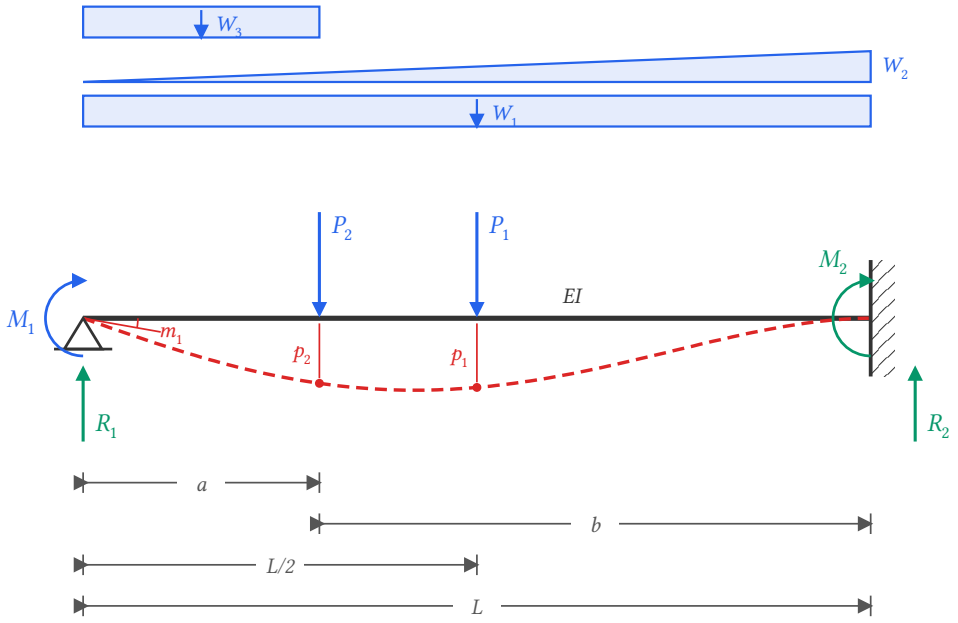
Last	$EI \cdot p_1$	$EI \cdot p_2$	$EI \cdot m_2$
P_1	$\frac{L^3}{3}$	$\frac{a^2 L}{2}\left(1 - \frac{a}{3L}\right)$	$\frac{L^2}{2}$
P_2	$\frac{a^2 L}{2}\left(1 - \frac{a}{3L}\right)$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{a^2}{2}$
M_2	$\frac{L^2}{2}$	$\frac{a^2}{2}$	L
W_1	$\frac{L^4}{8}$	$\frac{a^2 L^2}{24}\left(6 - \frac{4a}{L} + \frac{a^2}{L^2}\right)$	$\frac{L^3}{6}$
W_2	$\frac{L^4}{30}$	$\frac{a^2 L^2}{120}\left(10 - \frac{10a}{L} + \frac{5a^2}{L^2} - \frac{a^3}{L^3}\right)$	$\frac{L^3}{24}$

Last	$EI \cdot p_1$	$EI \cdot p_2$	$EI \cdot m_2$
W_3	$\frac{a^3 L}{24}\left(4 - \frac{a}{L}\right)$	$\frac{a^4}{8}$	$\frac{a^3}{6}$

P_1 och M_2 verkar i den fria änden; p_1 och m_2 är nedböjning och vinkel i den fria änden. W_2 är störst vid inspänningen.

5.3.4 Balk med en fast inspänd ände

Laster, stödreaktioner och deformationer för balken med en fast inspänd ände visas i figur 5.10.



Figur 5.10 Balk fritt upplagd i vänster ände och fast inspänd i höger ände.

Tabell 5.6 Balk fritt upplagd i vänster ände och fast inspänd i höger: stödreaktioner och inspänningsmoment per enhet last

Last	R_1	R_2	M_2
M_1	$-\frac{3}{2L}$	$\frac{3}{2L}$	$\frac{1}{2}$
P_1	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3L}{16}$
P_2	$\frac{b^2}{2L^2}\left(3 - \frac{b}{L}\right)$	$\frac{a}{2L}\left(3 - \frac{a^2}{L^2}\right)$	$\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right)$
W_1	$\frac{3L}{8}$	$\frac{5L}{8}$	$\frac{L^2}{8}$
W_2	$\frac{L}{10}$	$\frac{2L}{5}$	$\frac{L^2}{15}$
W_3	$\frac{a}{8}\left(8 - \frac{6a}{L} + \frac{a^3}{L^3}\right)$	$\frac{a^2}{8L}\left(6 - \frac{a^2}{L^2}\right)$	$\frac{a^2}{8}\left(2 - \frac{a^2}{L^2}\right)$

Tabell 5.7 Balk fritt upplagd i vänster ände och fast inspänd i höger: vinkeländringar och nedböjningar multiplicerade med EI

Last	$EI \cdot m_1$	$EI \cdot p_1$	$EI \cdot p_2$
M_1	$\frac{L}{4}$	$\frac{L^2}{32}$	$\frac{ab^2}{4L}$
P_1	$\frac{L^2}{32}$	$\frac{7L^3}{768}$	B
P_2	$\frac{ab^2}{4L}$	B	$\frac{a^2b^3}{12L^2}\left(4-\frac{b}{L}\right)$
W_1	$\frac{L^3}{48}$	$\frac{L^4}{192}$	$\frac{aL^3}{48}\left(1-\frac{3a^2}{L^2}+\frac{2a^3}{L^3}\right)$
W_2	$\frac{L^3}{120}$	$\frac{3L^4}{1280}$	$\frac{aL^3}{120}\left(1-\frac{2a^2}{L^2}+\frac{a^4}{L^4}\right)$
W_3	$\frac{a^2L}{48}\left(6-\frac{8a}{L}+\frac{3a^2}{L^2}\right)$	-	-

där

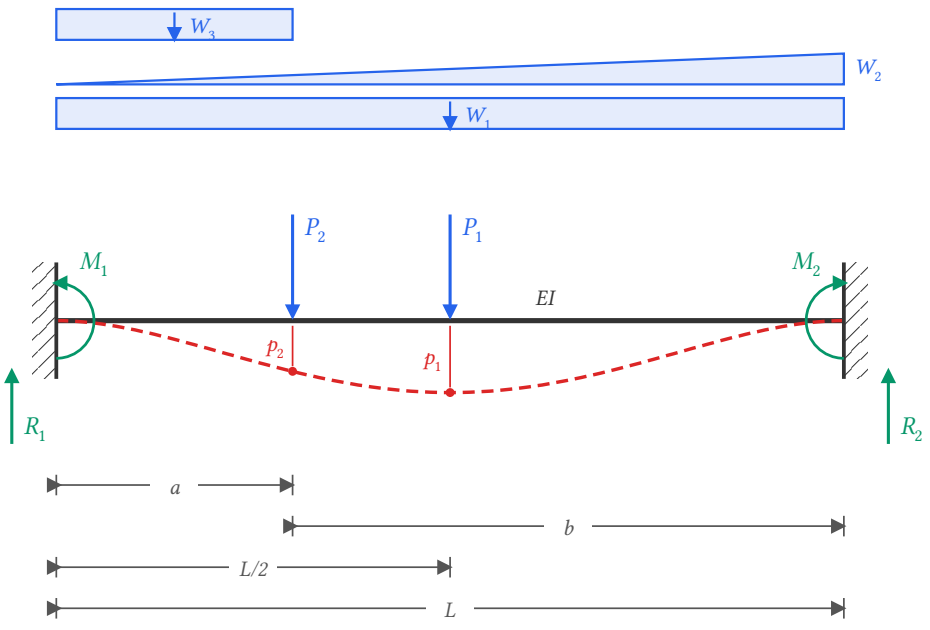
$$EI \cdot B = \begin{cases} \frac{aL^2}{96}\left(3-\frac{5a^2}{L^2}\right) & a \le L/2 \\ \frac{b^2L}{96}\left(9-\frac{11b}{L}\right) & a \ge L/2 \end{cases}$$

Snittmomentet under P_1 av P_1 är $5P_1L/32$, och under P_2 av P_2 är det

$$M_{P_2} = \frac{P_2\, ab^2}{2L^2}\left(2+\frac{a}{L}\right).$$

5.3.5 Balk med två fast inspända ändar

Laster, stödreaktioner och deformationer för balken med två fast inspända ändar visas i figur 5.11.



Figur 5.11 Balk fast inspänd i båda ändarna.

Tabell 5.8 Balk fast inspänd i båda ändarna: stödreaktioner och inspänningsmoment per enhet last

Last	R_1	R_2	M_1	M_2
P_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{L}{8}$	$\frac{L}{8}$
P_2	$\frac{b^2}{L^2}\left(1+\frac{2a}{L}\right)$	$\frac{a^2}{L^2}\left(1+\frac{2b}{L}\right)$	$\frac{ab^2}{L^2}$	$\frac{a^2b}{L^2}$
W_1	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L^2}{12}$	$\frac{L^2}{12}$
W_2	$\frac{3L}{20}$	$\frac{7L}{20}$	$\frac{L^2}{30}$	$\frac{L^2}{20}$
W_3	$a\left(1-\frac{a^2}{L^2}+\frac{a^3}{2L^3}\right)$	$a\left(\frac{a^2}{L^2}-\frac{a^3}{2L^3}\right)$	$\frac{a^2}{12}\left(6-\frac{8a}{L}+\frac{3a^2}{L^2}\right)$	$\frac{a^3}{12L}\left(4-\frac{3a}{L}\right)$

Tabell 5.9 Balk fast inspänd i båda ändarna: vinkeländringar och nedböjningar multiplicerade med EI

Last	$EI\cdot p_1$	$EI\cdot p_2$
P_1	$\frac{L^3}{192}$	C
P_2	C	$\frac{a^3b^3}{3L^3}$
W_1	$\frac{L^4}{384}$	$\frac{a^2L^2}{24}\left(1-\frac{a}{L}\right)^2$
W_2	$\frac{L^4}{768}$	$\frac{a^2L^2}{120}\left(2-\frac{3a}{L}+\frac{a^3}{L^3}\right)$

där

$$EI\cdot C=\begin{cases}\frac{a^2L}{48}\left(3-\frac{4a}{L}\right) & a\le L/2\\ \frac{b^2L}{48}\left(3-\frac{4b}{L}\right) & a\ge L/2\end{cases}$$

Inspänningsmomenten M_1 och M_2 kallas balkens **fixmoment** (för ramberäkning: $F_1=M_1$, $F_2=-M_2$). Snittmomentet i mitten av P_1 och W_1 är $P_1L/8+W_1L^2/24$, och under P_2 av P_2 är det $2P_2\,a^2b^2/L^3$.

5.3.6 Exempel på superposition

En fritt upplagd balk (avsnitt 5.3.2) bär en jämnt utbredd last q och en punktlast F i mitten. Nedböjningen i mitten blir summan av bidragen från kolumnerna W_1 och P_1:

$$p_1=\frac{5qL^4}{384EI}+\frac{FL^3}{48EI}.$$

Om balken i stället är kontinuerlig över ett mellanstöd, med två lika långa fält och samma last i båda, kan den ses som två balkar med en fast inspänd ände (avsnitt 5.3.4), eftersom vinkeländringen över mellanstödet är noll av symmetriskäl. Stödmomentet följer då av kolumnen M_2, och fältets nedböjning av kolumnen p_1.