Konstruktionsteknik

Uppgifter med lösningar

Utkast · 2026-11-20 · A4

Innehåll

1 Förkunskaper 3
Uppgift 1.1 Överslag av armeringsmängd med z ≈ 0,9d 3
Uppgift 1.2 Rektangulärt tvärsnitt med tryckarmering: momentkapacitet 3
Lösningar till kapitel 1 3
2 Bruksgränstillstånd 7
Uppgift 2.1 Böjsprucket balk utsatt av ren moment 7
Uppgift 2.2 Böjsprucket balk utsatt av böjning och normalkraft 7
Uppgift 2.3 Böjsprucken balk utsatt för långtidslast 9
Uppgift 2.4 Gångbro av betong (Ågrändsbron, GBG) 9
Uppgift 2.5 Nedböjning hos balk med normalkraft 11
Uppgift 2.6 Nedböjning hos balk 13
Uppgift 2.7 Plattrambro 14
Uppgift 2.8 Konsol 15
Uppgift 2.9 Nedböjning med superposition 16
Uppgift 2.10 Nedböjning av sprucken betongbalk: överslag med ζ 16
Uppgift 2.11 Nedböjning av stålbalk 17
Uppgift 2.12 Nedböjning av träregel med krypning 17
Lösningar till kapitel 2 17
3 Förband och förankring 89
Uppgift 3.1 Brottyper i ett skjuvbelastat skruvförband 89
Uppgift 3.2 Härledning av största skruvkraft 89
Uppgift 3.3 Spänningar längs en kälsvets och i halssvetsar 89
Uppgift 3.4 Spänningsfördelning i kälsvetsar för en belastad platta 89
Uppgift 3.5 Skruvförband i en hängare 89
Uppgift 3.6 Svetsförband i en hängare 90
Uppgift 3.7 Brottyper och materialsamband i ett skjuvbelastat träförband 91
Uppgift 3.8 Rita brottmoderna för ett skjuvbelastat träförband 91
Uppgift 3.9 Bärförmåga för ett spikat skjuvförband 91
Uppgift 3.10 Skruvförband mellan hängare och balk 91
Uppgift 3.11 Sneda sprickor ökar dragkraftsbehovet 92
Uppgift 3.12 Vidhäftning, spjälkning och förankringsbrott 92
Uppgift 3.13 Dragkraftskapacitet och förankring vid ändstöd 92
Uppgift 3.14 Avkortning av överkantsarmering över ett stöd 93
Lösningar till kapitel 3 93
4 Knäckning 103
Uppgift 4.1 Moment, utböjning och stabilitet i en pelare 103
Uppgift 4.2 Eulers knäcklast och dimensionering av träpelare 103
Uppgift 4.3 Kontakttryck i en gjutform 103
Uppgift 4.4 Tryckt sträva, stagad och ostagad 104
Uppgift 4.5 Andra ordningens effekter i en centriskt tryckt stålpelare 104
Uppgift 4.6 Interaktion mellan moment och normalkraft i en stålpelare 104
Uppgift 4.7 Stålpelare stagad på halva höjden i veka riktningen 104
Uppgift 4.8 Dimensionering av en stålpelare med normalkraft och sidolast 105
Uppgift 4.9 Vad påverkar andra ordningens moment i en betongpelare? 105
Uppgift 4.10 Största horisontallast på en slank betongpelare 105
Uppgift 4.11 Interaktionsdiagram för ett kvadratiskt pelartvärsnitt 106
Uppgift 4.12 Största lastexcentricitet för en konsolpelare 106
Lösningar till kapitel 4 107

Uppgifterna hör till kursboken *Konstruktionsteknik* och är numrerade kapitelvis som den. Hänvisningar till avsnitt, ekvationer, figurer, tabeller och exempel avser kursboken.

1 Förkunskaper

Uppgift 1.1 Överslag av armeringsmängd med z ≈ 0,9d

En fritt upplagd betongbalk med spännvidden $L = 6{,}0$ m bär en jämnt utbredd last. Den dimensionerande lasten i brottgränstillståndet, inklusive egentyngd, är $q_d = 30$ kN/m. Balken har ett rektangulärt tvärsnitt med bredden $b = 300$ mm och höjden $h = 500$ mm, och dragarmeringens tyngdpunkt ligger 50 mm från underkanten.

Betong C30/37 och armering B500B. Lasten förutsätts kunna verka tidigt, så $k_{tc} = 0{,}85$.

1. Beräkna det dimensionerande momentet M_{Ed} i balkens mitt.
2. Uppskatta den dragarmering som behövs med överslagsformeln $z \approx 0{,}9d$ och välj ett antal stänger $\phi 16$.
3. Kontrollera momentkapaciteten M_{Rd} för den valda armeringen med spänningsblocket, och att armeringen flyter.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 1.2 Rektangulärt tvärsnitt med tryckarmering: momentkapacitet

En betongbalk har ett rektangulärt tvärsnitt med bredden $b = 450$ mm och höjden $h = 750$ mm. Den är armerad med 2 $\phi 16$ B500B i överkant (tryckarmering, tyngdpunkt 50 mm från överkanten) och 6 $\phi 16$ B500B i underkant (dragarmering, tyngdpunkt 50 mm från underkanten). Betongen är C25/30. Lasten förutsätts kunna verka tidigt, så $k_{tc} = 0{,}85$.

1. Beräkna tvärsnittets momentkapacitet M_{Rd} noggrant med spänningsblocket.
2. Kontrollera att tvärsnittet går till segt brott.
3. Jämför med överslagsformeln $z \approx 0{,}9d$.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Lösningar till kapitel 1

Uppgift 1.1 Överslag av armeringsmängd med z ≈ 0,9d

Materialvärden

Med värdena i avsnitt 1.5: $f_{cd} = 0{,}85 \cdot 30/1{,}5 = 17{,}0$ MPa och $f_{yd} = 500/1{,}15 = 435$ MPa. Den effektiva höjden är $d = 500 - 50 = 450$ mm.

1. Dimensionerande moment

$$M_{Ed} = \frac{q_d L^2}{8} = \frac{30 \cdot 6{,}0^2}{8} = 135 \text{ kNm}$$

2. Överslag

Med ekv. (1.28):

$$A_s \approx \frac{M_{Ed}}{f_{yd} \cdot 0{,}9d} = \frac{135 \cdot 10^6}{435 \cdot 0{,}9 \cdot 450} = 767 \text{mm}^2$$

En stång $\phi 16$ har arean $\pi \cdot 16^2/4 = 201$ mm². Fyra stänger ger $A_s = 804$ mm² ≥ 767 mm². Välj **4 ϕ16**.

3. Kontroll med spänningsblocket

Anta att armeringen flyter. Jämvikt i horisontalled, ekv. (1.26), ger tryckzonens höjd:

$$x = \frac{f_{yd} A_s}{0{,}8\, f_{cd}\, b} = \frac{435 \cdot 804}{0{,}8 \cdot 17{,}0 \cdot 300} = 85{,}7 \text{ mm}$$

Töjningen i armeringen, ekv. (1.24):

$$\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot \frac{450 - 85{,}7}{85{,}7} = 14{,}9 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2{,}17 \text{ ‰}$$

Armeringen flyter, så antagandet stämmer. Momentkapaciteten, ekv. (1.27):

$$M_{Rd} = f_{yd} A_s (d - 0{,}4x) = 349{,}7 \cdot 10^3 \cdot (450 - 0{,}4 \cdot 85{,}7) = 145{,}4 \text{ kNm} \geq M_{Ed} = 135 \text{ kNm}$$

> **Svar:** 4 ϕ16 räcker: $M_{Rd} = 145$ kNm > $M_{Ed} = 135$ kNm. Med $x/d = 0{,}19$ flyter armeringen med god marginal.

> **Notera:** Den verkliga hävarmen blev $z = d - 0{,}4x = 416$ mm $= 0{,}92d$, alltså något större än $0{,}9d$. Överslaget är därför lite på säkra sidan, vilket är typiskt för måttligt armerade balkar. För kraftigt armerade tvärsnitt blir tryckzonen större och hävarmen kortare än $0{,}9d$ där måste överslaget alltid följas av en kontroll.

Uppgift 1.2 Rektangulärt tvärsnitt med tryckarmering: momentkapacitet

Indata

- Betong C25/30: $f_{cd} = 0{,}85 \cdot 25/1{,}5 = 14{,}2$ MPa.
- Armering B500B: $f_{yd} = 435$ MPa, $E_s = 200$ GPa, $\varepsilon_{yd} = 2{,}17$ ‰.
- Effektiv höjd $d = 750 - 50 = 700$ mm och tryckarmeringens läge $d' = 50$ mm.
- Arean av en stång ϕ16 är 201 mm², så $A_s = 6 \cdot 201 = 1\,206$ mm² och $A_s' = 2 \cdot 201 = 402$ mm².

1. Momentkapacitet

Första försöket: all armering flyter. Jämvikt i horisontalled, ekv. (1.30), med $|\,\sigma_s'| = \sigma_s = f_{yd}$:

$$x = \frac{f_{yd}(A_s - A_s')}{0{,}8\, f_{cd}\, b} = \frac{435 \cdot (1\,206 - 402)}{0{,}8 \cdot 14{,}2 \cdot 450} = 68{,}6 \text{ mm}$$

Kontroll av töjningarna med ekv. (1.24):

$$\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot \frac{700 - 68{,}6}{68{,}6} = 32 \text{ ‰}, \qquad |\,\varepsilon_s'| = 3{,}5 \cdot \frac{68{,}6 - 50}{68{,}6} = 0{,}95 \text{ ‰} < \varepsilon_{yd}$$

Dragarmeringen flyter, men **tryckarmeringen flyter inte**. Antagandet var fel.

Andra försöket: tryckarmeringen är elastisk. Med $|\,\sigma_s'| = E_s \varepsilon_{cu} (x - d')/x$ blir jämviktsekvationen

$$0{,}8\, f_{cd}\, b\, x + E_s \varepsilon_{cu} \frac{x - d'}{x} A_s' = f_{yd} A_s$$

Multiplicera med x och samla termerna:

$$0{,}8\, f_{cd}\, b\, x^2 + \left(E_s \varepsilon_{cu} A_s' - f_{yd} A_s\right) x - E_s \varepsilon_{cu} A_s' d' = 0$$

$$5\,100\, x^2 - 243\,000\, x - 14{,}07 \cdot 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 81{,}5 \text{ mm}$$

Ny kontroll av töjningarna:

$$\varepsilon_s = 3{,}5 \cdot \frac{700 - 81{,}5}{81{,}5} = 26{,}6 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd}, \qquad |\,\varepsilon_s'| = 3{,}5 \cdot \frac{81{,}5 - 50}{81{,}5} = 1{,}35 \text{ ‰} < \varepsilon_{yd}$$

Båda antagandena stämmer. Tryckarmeringens spänning är $|\,\sigma_s'| = 200\,000 \cdot 0{,}00135 = 271$ MPa.

Krafter och moment. Betongens tryckkraft är $F_c = 0{,}8 \cdot 14{,}2 \cdot 450 \cdot 81{,}5 = 416$ kN, tryckarmeringens kraft är $F_s' = 271 \cdot 402 = 109$ kN och dragkraften är $F_s = 435 \cdot 1\,206 = 525$ kN; jämvikten stämmer. Moment kring dragarmeringen, ekv. (1.31):

$$M_{Rd} = 416 \cdot (700 - 0{,}4 \cdot 81{,}5) + 109 \cdot (700 - 50) = 277{,}4 + 70{,}7 = 348 \text{ kNm}$$

2. Seghet

$$\frac{x}{d} = \frac{81{,}5}{700} = 0{,}12$$

Det är långt under gränsen 0,62 då dragarmeringen slutar flyta, ekv. (1.29), och även under 0,25 som EC2 kräver för plastisk analys. Tvärsnittet går till **segt brott**: dragarmeringen töjs 26,6 ‰, tolv gånger flyttöjningen, innan betongen krossas.

3. Jämförelse med överslaget

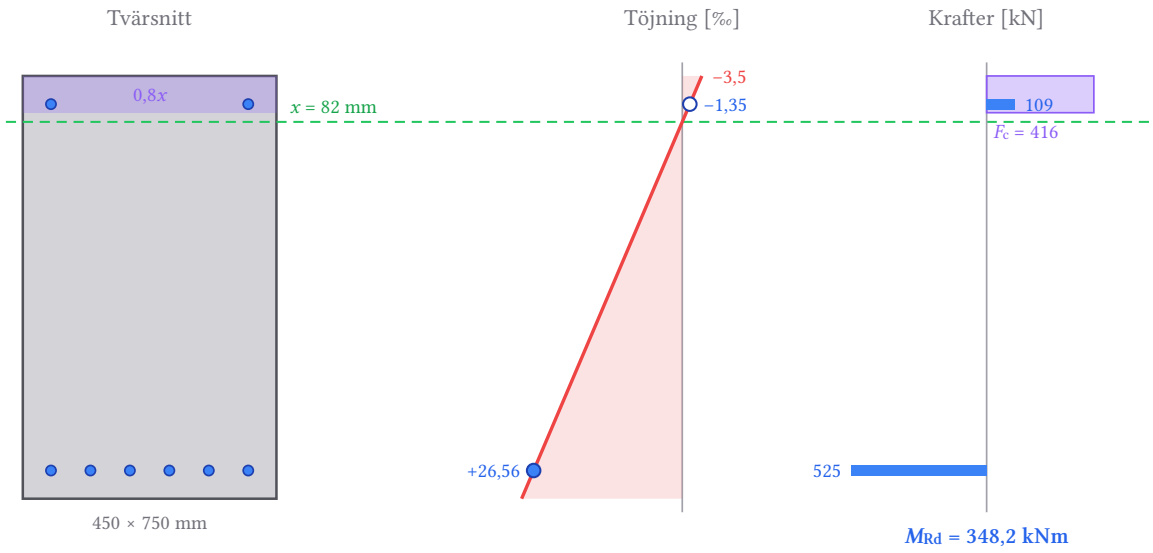
$$M_{Rd} \approx f_{yd} A_s \cdot 0{,}9d = 525 \cdot 0{,}9 \cdot 700 = 330 \text{ kNm}$$

Överslaget ligger 5 % under det noggranna värdet, eftersom den verkliga hävarmen är större än $0{,}9d$ för ett så måttligt armerat tvärsnitt. Tryckarmeringen ökar kapaciteten bara lite, men den gör tryckzonen mindre och tvärsnittet segare.

> **Svar:** $M_{Rd} = 348$ kNm. Tvärsnittet går till segt brott ($x/d = 0{,}12$).

> **Notera:** Med $k_{tc} = 1{,}00$ (last som verkar först efter tre månader) blir $f_{cd} = 16{,}7$ MPa, och samma räkning ger $x = 72{,}7$ mm och $M_{Rd} = 350$ kNm. Det är det värde som fås med den äldre utgåvan av EC2, där $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_C$.

Tvärsnittet med töjningar och krafter i brottgränstillståndet visas i figur U1.1.

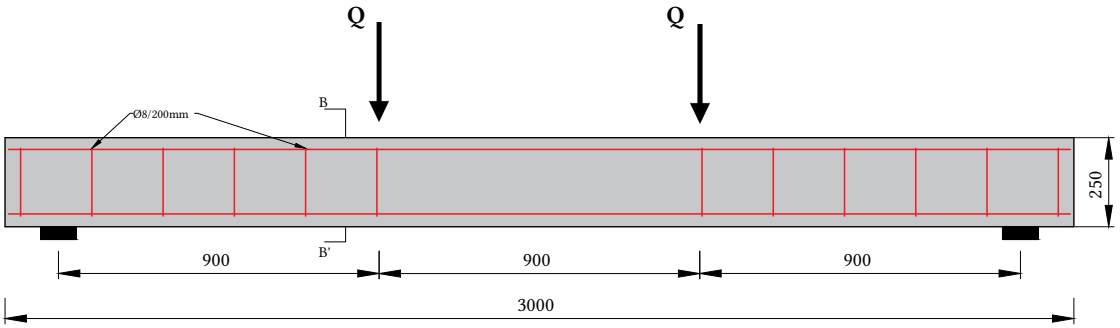


Figur U1.1 Tvärsnittet i uppgiften. Prova att ändra antalet stänger i överkant eller k_{tc} och se hur tryckzonen och momentkapaciteten ändras.

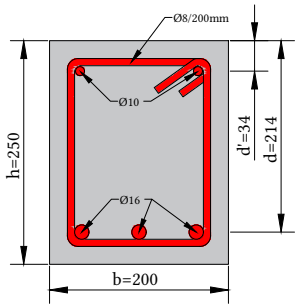
2 Bruksgränstillstånd

Uppgift 2.1 Böjsprucket balk utsatt av ren moment

En armerad fritt upplagd betongbalk har rektangulärt tvärsnitt enligt figur U2.1 och figur U2.2.



Figur U2.1 Balk Uppgift 1



Figur U2.2 Tvärsnitt Uppgift 1

Kontrollera om tvärsnittet spricker och beräkna maximala spänningar i betong och stål för lasten $0{,}5 \cdot Q_{\text{brott}}$, korttidsrespons.

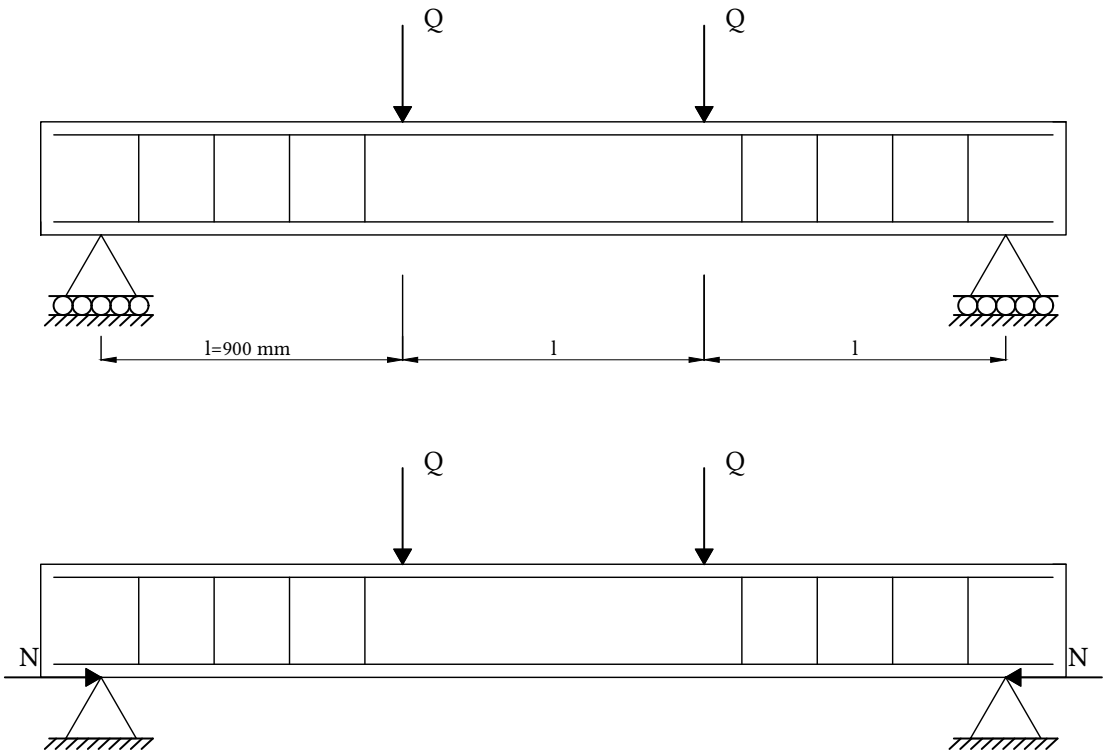
Armeringen i underkant består av 3 ϕ 16 B500B och i överkant av 2 ϕ 10 B500B. $Q_{\text{brott}} = 70$ kN.
Betong $f_{cm} = 50$ MPa, $E_{cm} = 37{,}0$ GPa, $f_{ctm} = 3$ MPa.
Armering B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $E_s = 200$ GPa).

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.2 Böjsprucket balk utsatt av böjning och normalkraft

Efter en av fyrpunkts-böjprovningarna vi utförde tidigare i kursen insåg laboratorieingenjören att han glömt låsa upp balkens stöd. Således förändrades upplagsförhållandena från fritt upplagda till upplagda på fasta stöd (fria att rotera men ej röra sig horisontellt). Den huvudsakliga konsekvensen av detta är att de horisontella reaktionskrafterna från stöden ger upphov till en tryckande normalkraft i balken. Detta innebär att beräkningarna ni utförde i uppgift 1 behöver förändras.

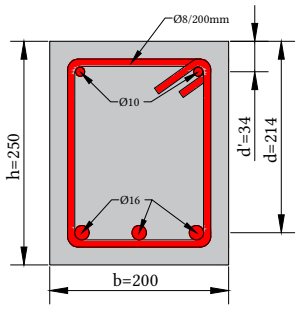
Balken visas i figur U2.8.



Figur U2.8 Balk Uppgift 2

Armeringen i underkant består av 3 ϕ 16 B500B och i överkant av 2 ϕ 10 B500B. Normalkraften vid de nya randvillkoren blir $N = -30$ kN. $Q_{\text{brott}} = 70$ kN.

Tvärsnittet visas i figur U2.9.



Figur U2.9 Tvärsnitt Uppgift 2

Betong $f_{cm} = 50$ MPa, $E_{cm} = 37{,}0$ GPa, $f_{ctm} = 3$ MPa.
Armering B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $E_s = 200$ GPa).

Frågor

a) Beräkna den nya sprickmoment för balken, M_{sprick}, givet de nya upplagsvillkoren. Jämför med det tidigare sprickmomentet ni räknat ut i uppgift 1.

b) Givet de nya upplagsvillkoren, vad blir stålspänningen i dragarmeringen för lasten $0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}}$?

(tips: första gissning för $x = 71$ mm)

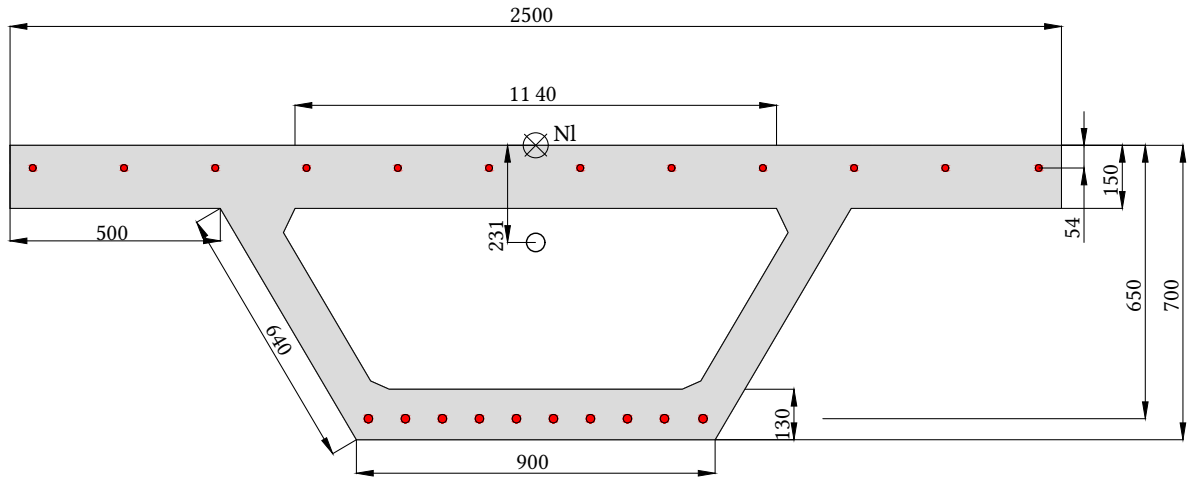
c) Borde den nya beräkningen ge lägre eller högre stålspänning än den ni räknat ut tidigare (den fritt upplagda balken)? Motivera ditt svar!

(tips: ta fram krökningsfördelningar för de olika lasterna)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.3 Böjsprucken balk utsatt för långtidslast

En armerad betongbalk har ett lådformat tvärsnitt enligt figur U2.14. Tryckarmeringen och dragarmeringen består av $\phi 20$ B500B. Balken är fritt upplagd, och har en spännvidd om $l = 10{,}0$ m. Balken belastas med en jämnt utbredd långtidslast om $q_l = 40$ kN/m, samt $N_l = -100$ kN (tryckande normalkraft) som verkar i ovankant tvärsnitt enligt figur.



Figur U2.14 Tvärsnitt Uppgift 3

Beräkna maximal betongpåkänning samt påkänningarna i tryck- och dragarmering efter lång tid.

Dimensionerande materialegenskaper

Betong N C25/30 (kvartsitballast). (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)
Armering $\phi 20$ (underkant) $\phi 16$ (överkant) B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $E_s = 200$ GPa).

Beräkningsförutsättningar

Ålder vid pålastning är 28 dygn. Torrt klimat.

Tvärsnittskonstanter i stadium I: $A_I = 589778\text{mm}^2$, $I_I = 31780301899\text{mm}^4$, $x_{tp} = 231$ mm

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.4 Gångbro av betong (Ågrändsbron, GBG)



Figur U2.20 Photos Uppgift 4

Ågrändsbron (figur U2.20) ligger öster om Ullevi i Göteborg och tillåter gång och cykeltrafik. Bron sträcker sig 19,8 m mellan anläggningarna men kortare sidospänningar (2,8 m) ger effekten av fasta infästa randvillkor. Tvärsnitt till bron fås antas enligt figur U2.21 och figur U2.22. I mittspan kan hela tvärsnittet antas effektivt men i snitt A (över stöd) får flänsens effektiva bredd till balkarna antas vara 1050 mm. (→ Effektiv flänsbredd — EC2 §7.2.3)

Betong C25/30, cementklass N. Armering B500B. Utomhuskonstruktion I normal fuktighet, RH 80%. Pålastning vid 28 dygn.

Nu finns det intresse att undersöka om bron kan användas för motortrafik. Det medför 48% ökning i nyttolast på bron, dvs. till jämnt utbredd last på 7,4 kN/m2 över effektiva bredden av bron (5 m), eller qk=32 kN/m. Brons egenlast kan antas som gk=63 kN/m. T- och M-diagram visas för lasttillfälle med jämnt utbredd nyttolast last på hela bron, dvs. karakterisk combination (gk+qk). Kombinationsfaktor för kvasi-permanent värde av nyttolast kan tas som Y1=0,6.

Frågor

1. Beräkna sprickmomentkapacitet Mcr och kontrollera om tvärsnittet spricker i snitt A samt i mittspan (inverkan av armeringen kan försummas). Skissa också krökningsfördelning längs bron. (karakteristisk lastkombination)
2. Beräkna maximala betong- och stålpåkänningar i snitt A (över stöd) vid långtidslast och kontrollera om beräkningsmodellen är tillämplig. (kvasi-permanent lastkombination)
3. Kontrollera om tvärsnittet uppfyller kravet med hänsyn till begränsning av sprickbredder I brukgränstillstånd. Vid beräkning av stålpåkänningen får inverkan av betongens krympning beaktast approximativt. Med hänsyn till aktuell exponeringsklass (XS2) och livslängdsklass (L50) är tillåten karakteristisk sprickbredd wk,till=0,2 mm. (kvasi-permanent lastkombination)



Figur U2.21 Tvärsnitt Uppgift 4



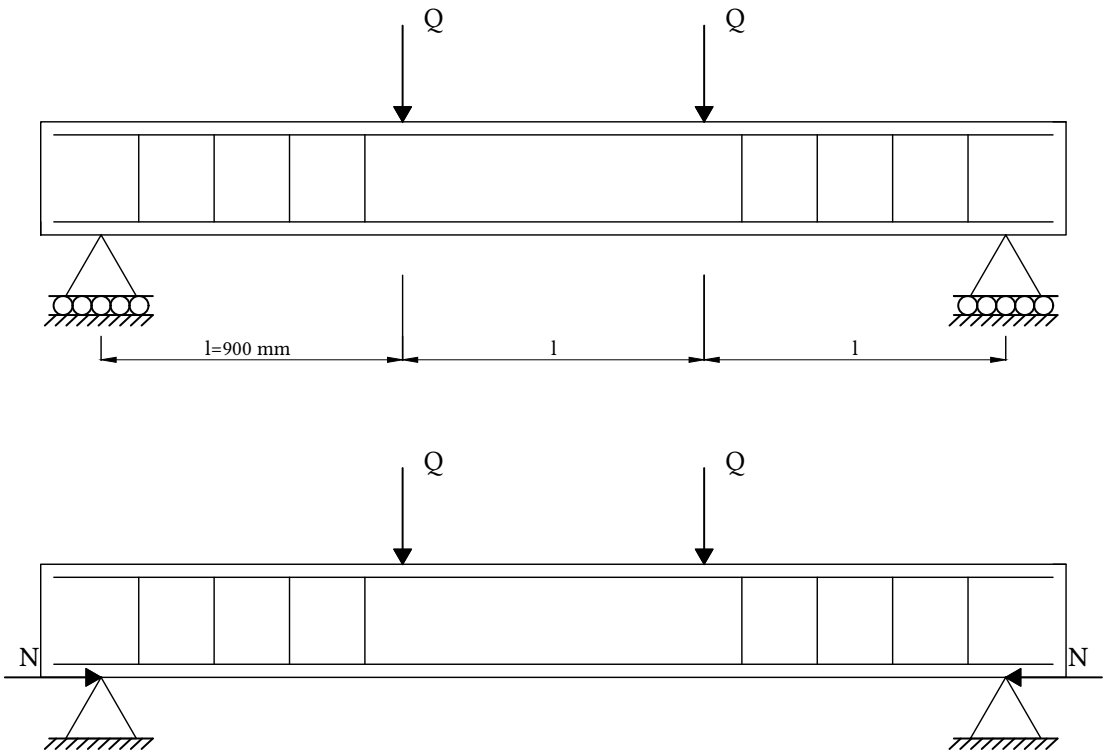
Figur U2.22 Tvärsnitt Uppgift 4

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.5 Nedböjning hos balk med normalkraft

Efter en av fyrpunkts-böjprovningarna vi utförde tidigare i kursen insåg laboratorieingenjören att han glömt låsa upp balkens stöd. Således förändrades upplagsförhållandena från fritt upplagda till upplagda på fasta stöd (fria att rotera men ej röra sig horisontellt). Den huvudsakliga konsekvensen av detta är att de horisontella reaktionskrafterna från stöden ger upphov till en tryckande normalkraft i balken. Detta innebär att beräkningarna ni utförde i uppgift 1 behöver förändras.

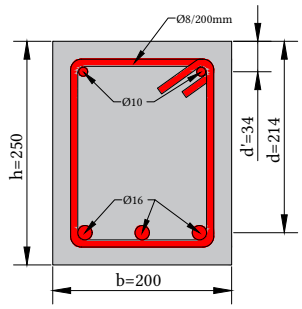
Balken visas i figur U2.30.



Figur U2.30 Balk Uppgift 1

Armeringen i underkant består av 3 ϕ 16 B500B och i överkant av 2 ϕ 10 B500B. Normalkraften vid de nya randvillkoren blir $N = -30$ kN. $Q_{\text{brott}} = 70$ kN.

Tvärsnittet visas i figur U2.31.



Figur U2.31 Tvärsnitt Uppgift 1

Betong $f_{cm} = 50$ MPa, $E_{cm} = 37{,}0$ GPa, $f_{ctm} = 3$ MPa.
Armering B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $E_s = 200$ GPa).

Frågor

a) Beräkna balksnedböjningen i mitten av fältet för lasten $0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}}$, utan att ta hänsyn till sprickbildning (Stadium I) och N kraften. Använd elementarfall.

b) Beräkna balksnedböjningen i mitten av fältet för lasten $0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}}$, med hänsyn till sprickbildning (Stadium II) och utan N kraften. Använd elementarfall.

c) Beräkna balksnedböjningen i mitten av fältet för lasten $0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}}$, med hänsyn till sprickbildning (Stadium II) och utan N kraften. Använd grafiksa metod.

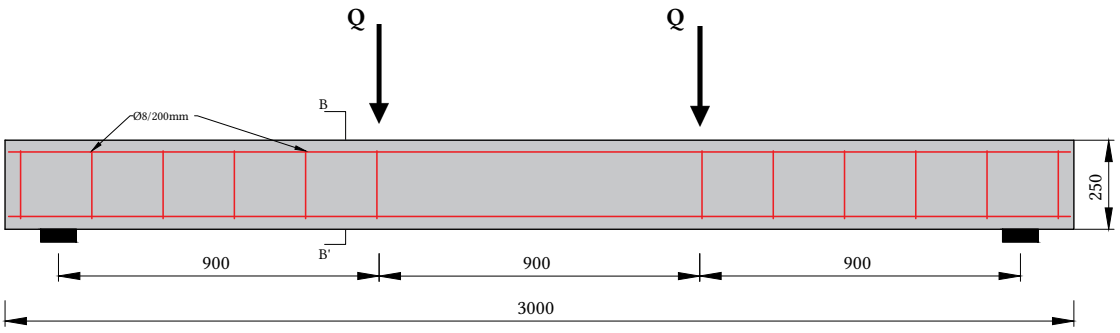
d) Beräkna balksnedböjningen i mitten av fältet för lasten $0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}}$, med hänsyn till sprickbildning (Stadium II) och N kraften. Använd grafiksa metod.

(tips: första gissning för $x = 71$ mm)

Lösning: se slutet av kapitlet.

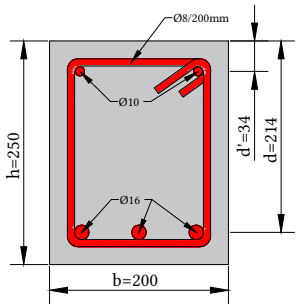
Uppgift 2.6 Nedböjning hos balk

På Chalmers har vi investerat i ett nytt mätsystem baserat på distribuerad fiberoptik. Mätsystemet läser av töjningar längs med fibersensorn. Den huvudsakliga utdatan från sensorn är en profil över töjningsfördelningen längs med de olika komponenter den är kopplad till. I figur U2.39 ses töjningsfördelningen för de olika armeringslagren, överkant och underkant. Balken provas enligt figur U2.37, med tvärsnittet i figur U2.38. Tyvärr kan man inte veta om balken var belastad med enbart moment eller med moment och normalkraft. (*Elementarfall kan inte användas i denna uppgift, utan nedböjningen måste beräknas med hjälp av grafiska metoden.*)



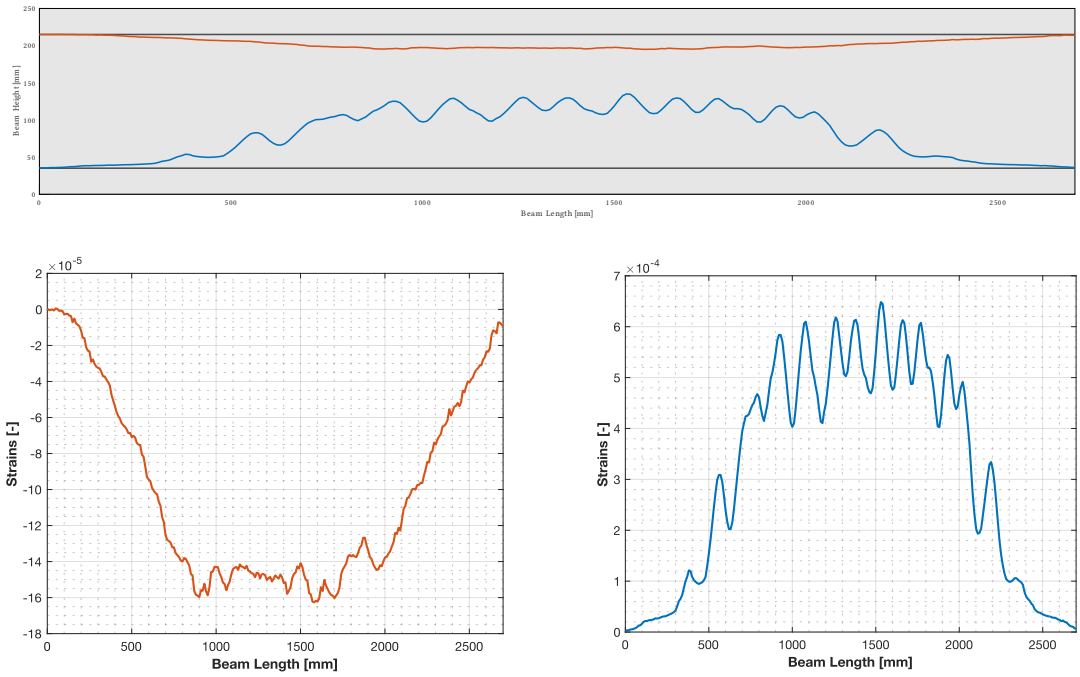
Figur U2.37 Balk Uppgift 1

Armeringen i underkant består av 3 ϕ 16 B500B och i överkant av 2 ϕ 10 B500B.



Figur U2.38 Tvärsnitt Uppgift 1

Betong $f_{cm} = 50$ MPa, $E_{cm} = 31{,}0$ GPa, $f_{ctm} = 3$ MPa.
Armering B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $E_s = 200$ GPa).



Figur U2.39 Uppmätt töjningsfördelning längs armeringslagren, överkant och underkant.

Frågor

a) Beräkna en övre gräns för nedböjningen i mitten av fältet

b) Beräkna en övre gräns för balkens sprickbredd.

c) Beräkna lasten Q som är applicerad på en av punktlasterna som ger upphov till följande töjningsfördelning. Ren böjning antas, dvs. ingen normalkraft verkar på tvärsnittet.

Lösning: se slutet av kapitlet.

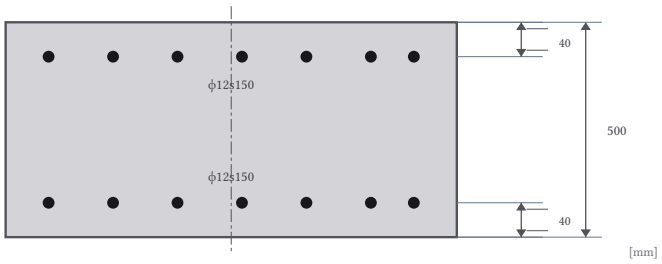
Uppgift 2.7 Plattrambro

Tvärledsarmeringen för brobaneplattan i en plattrambro har dimensionerats för en tillåten sprickbredd $w_{k,\text{till}} = 0{,}3$ mm och konstruktören har kommit fram till en armeringsutformning enligt figur U2.43. För att undvika orimliga tvångseffekter i tvärled i FE-modellen så sätts temperaturutvidgningskoefficienten till 0 i tvärled. Konstruktören glömde dock bort att tillåten sprickbredd därför måste reduceras med 0,025 mm, dvs att $w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275$ mm.

Kontrollera om den maximala sprickbredden uppfylls om centrumavståndet mellan armeringsjärnen sänks till $s = 125$ mm. Tvärsnittets mått beskrivs i figur U2.43. Moment (och dragkraft som angriper i mitten av tvärsnittet) för den dimensionerande meterremsan visas i figur U2.44.



Figur U2.43 Tvärsnitt: h = 500 mm, c = 40 mm, ø12s150 överkant och underkant



Figur U2.44 Strukturmodell med tvärkraft-, moment- och normalkraftdiagram

Dessutom, under plattbroinspektionen visades sprickor 5 meters från bronsväggar på underkanten. Inga sprickor visades på överkantssidan. På grund av de observerade sprickorna är det inte säkert att nedböjningskravet kommer att uppfyllas. Därför vill broägarna veta:

- Vilket moment orsakade sprickbildning i bron?
- Vad är nedböjningen i mitten av bron (långtidslaster)? o Använd den grafiska metoden. De små paraboliska arealerna kan förenklas som triangulära.

Man kan anta att broплattan har samma höjd längs brolängden.

Lasterna beaktas som långtidslaster vid beräkning av sprickbredd och nedböjning. Gränser för påkänningar i betong och armering behöver inte kontrolleras.

Materialegenskaper i bruksgränstillstånd

Parameter	**Värde**
Betong C30/37	$f_{ctm} = 2{,}9$ MPa, $E_{cm} = 33$ GPa
Armering B500B	$E_s = 200$ GPa

Man kan anta att $|\ \sigma_c(-x_{tp})| < 0{,}4 \cdot f_{ck}$.

Frågor

1. Kontrollera om den maximala sprickbredden uppfylls (med $s = 125$ mm och $w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275$ mm).
2. Vilket moment orsakade sprickbildning i bron?
3. Vad är nedböjningen i mitten av bron (långtidslaster)? *(Grafiska metoden; små paraboliska arealer kan förenklas som triangulära.)*

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.8 Konsol

En betongpelare med rektangulärt tvärsnitt $b \times h = 350 \times 400$ mm är fastinspänd i botten. Pelarhöjden är $H = 2400$ mm. I toppen har pelaren en horisontell konsol med samma tvärsnitt. Konsolens kraftangreppspunkt (lastens läge) befinner sig på avstånd $L = 1200$ mm från pelarens neutrala axel i Stadium I. En vertikal punktlast $P = 15$ kN verkar nedåt i konsolens ände.

På grund av initiala imperfektioner har pelaren en sidoförskjutning som enligt normen kan översättas till en horisontell last $F_h = 30$ kN verkande i ogynnsam riktning vid pelartoppen.

Betongen är C40/50 och armeringen är B500B med 4ø20 i drag- respektive tryckzonen. Analysen gäller korttidsrespons.

Tips: neutrallagrets läge i Stadium II kan antas $x = 91$ mm, och $x_{tp} = 95$ mm.

Andra ordningens effekter kan försummas. Momentet i pelare pga den normalkraft som verkar i Stadium II kan försummas.

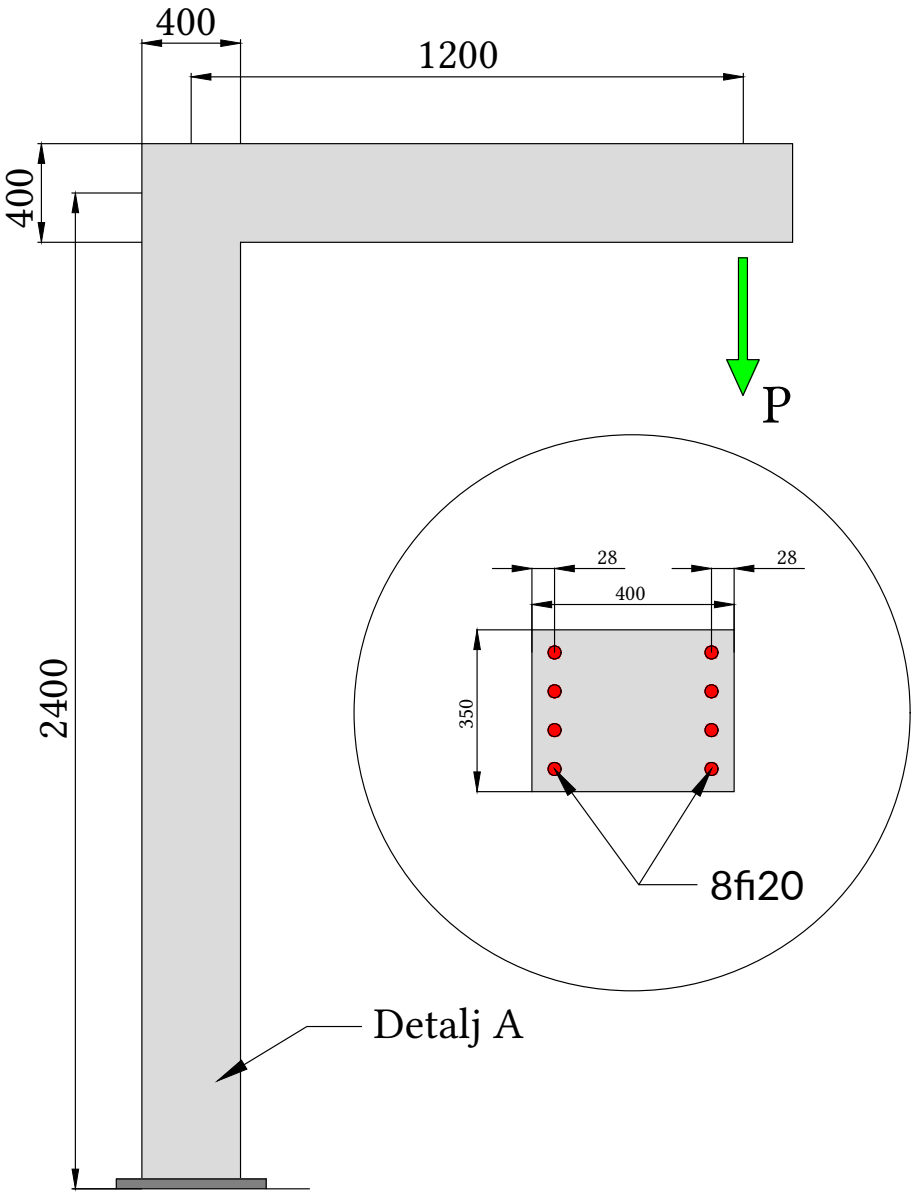
Frågor

a) Beräkna sprickmomentet M_{cr}.

b) Beräkna hur stor del av pelarhöjden som är sprucken.

c) Beräkna nedböjningen (horisontell förskjutning) i konsolens ände med hänsyn till både sprucken och osprucken del av pelaren.

Pelaren med konsolen och dess snittkraftsdiagram visas i figur U2.50.



Figur U2.50 Strukturmodell med tvärkrafts-, moment- och normalkraftsdiagram

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.9 Nedböjning med superposition

En fritt upplagd balk med spännvidden $L = 5{,}0$ m och böjstyvheten $EI = 5{,}8 \cdot 10^{12}$ Nmm² bär en jämnt utbredd last $q = 4{,}0$ kN/m och en punktlast $P = 10$ kN i mitten. Båda lasterna är bruksgränslaster.

1. Beräkna nedböjningen i balkens mitt.
2. Klarar balken kravet $L/300$?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.10 Nedböjning av sprucken betongbalk: överslag med ζ

Betongbalken i avsnitt 2.9 ($L = 6{,}0$ m, 300×500 mm, 4 $\phi 16$, C30/37) bär nu den kvasipermanenta lasten $q = 20$ kN/m. Givet: $E_{cm} = 31{,}9$ GPa, $I_I = 3\,290 \cdot 10^6$ mm⁴, $I_{II} = 715 \cdot 10^6$ mm⁴ och $M_{cr} = 42{,}9$ kNm. Lasten är långvarig ($\beta_t = 0{,}5$); bortse från krypning och krympning.

1. Beräkna momentet i mitten och fördelningsfaktorn ζ.
2. Uppskatta nedböjningen med ekv. (2.108).

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.11 Nedböjning av stålbalk

En fritt upplagd IPE 270 ($I_y = 57{,}9 \cdot 10^6$ mm⁴, $E = 210$ GPa) har spännvidden $L = 5{,}4$ m. Karakteristiska laster: permanent $g_k = 4{,}0$ kN/m och nyttig last i bostad $q_k = 6{,}0$ kN/m ($\psi_1 = 0{,}5$).

1. Beräkna nedböjningen av respektive last.
2. Kontrollera $L/300$ i den karakteristiska kombinationen.
3. Hur stor är nedböjningen i den frekventa kombinationen?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 2.12 Nedböjning av träregel med krypning

Bjälklagsreglar av konstruktionsvirke C24, 45×245 mm ($E_{0,mean} = 11\,000$ MPa), spänner $L = 4{,}2$ m i ett ouppvärmt men skyddat utrymme (klimatklass 2, $k_{def} = 0{,}8$). Lasterna per regel är $g_k = 0{,}3$ kN/m och $q_k = 1{,}2$ kN/m med $\psi_2 = 0{,}3$.

1. Beräkna w_1, w_2 och w_3 enligt ekv. (2.109).
2. Kontrollera den totala nedböjningen mot $L/300$.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Lösningar till kapitel 2

Uppgift 2.1 Böjsprucket balk utsatt av ren moment

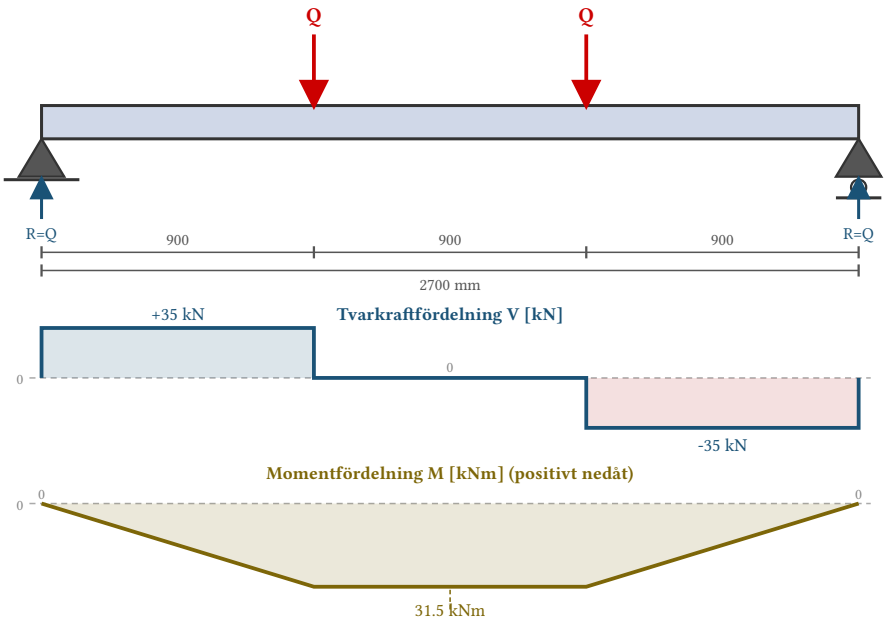
Beräkningsgång

1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last
2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Stadium I - Kontroll av dragspänningar** - Kontrollera om tvärsnittet spricker genom att beräkna sprickmoment och jämföra med påfört moment
4. **Analys i Stadium II** - Om tvärsnittet är uppsprucket, beräkna spänningar med hänsyn till sprickor

1. Lasteffekt

Balken är fritt upplagd med spännvidd $L = 2700$ mm och belastad med två punktlaster Q i en 4-punktsböjning, placerade vid 900 mm från vardera stöd ($a = 900$ mm). Stöden är ledat upplagda, vilket innebär att momentet vid stöden är noll och ökar linjärt till punktlasterna. På grund av lastsetupets symmetri är zonen mellan punktlasterna utsatt för konstant böjmoment och noll tvärkraft.

Strukturmodellen med tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.3.



Figur U2.3 Strukturmodell med tvärkraft- och momentdiagram

Jämviktsanalys ger reaktionskrafterna $R_A = R_B = Q$ (symmetri). Tvärkraft- och momentfördelningen längs balken:

$$V(x) = \begin{cases} +Q & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x \le L - a \\ -Q & L - a < x \le L \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} Q \cdot x & 0 \le x \le a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) = Q \cdot a & a \le x \le L - a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) - Q \cdot (x - (L - a)) = Q \cdot (L - x) & L - a \le x \le L \end{cases}$$

där $a = 0{,}9$ m och $L = 2{,}7$ m.

Beräkna det verkande momentet för $Q = 0{,}5 \cdot Q_{\text{brott}} = 0{,}5 \cdot 70 = 35$ kN i mitten av fältet:

$$M_d = Q \cdot 0{,}9 \text{ m} = 35 \text{ kN} \cdot 0{,}9 \text{ m} = 31{,}5 \text{ kNm}$$

2. Geometri och materialegenskaper

Geometri

- $b = 200$ mm, $h = 250$ mm
- $d' = 34$ mm, $d = 214$ mm
- $\phi_p = 10$ mm (Överkantsarmering), $\phi = 16$ mm (Underkantsarmering)

Armeringsareor

$$A_s = 3 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 603{,}186\text{mm}^2, A_s' = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \phi_p^2}{4} = 157{,}08\text{mm}^2$$

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)

- $f_{cm} = 50$ MPa *(karakteristisk cylinderhållfasthet)*
- $f_{ck} = f_{cm} - 8$ MPa $= 42$ MPa *(medelhållfasthet minus standardavvikelse)*
- $f_{ctm} = 3$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*

- $E_{cm} = 37$ GPa _(modul för betong i bruksstadiet, kan beräknas enligt EC2 som $E_{cm} = k*E \cdot f*cm^{1/3}$ där $k_E = 9000$_)

Armering B500S / B500B

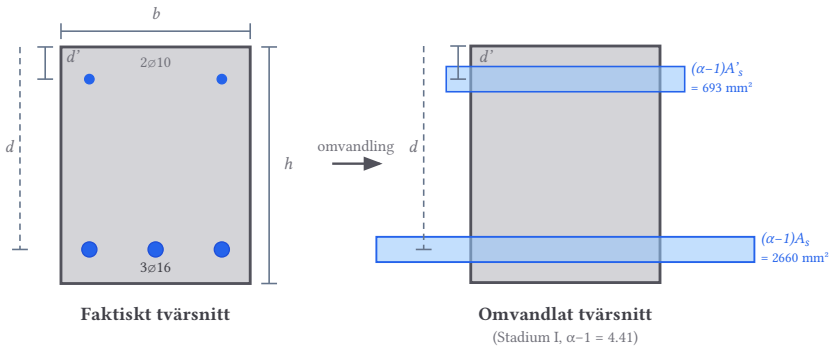
- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = 5{,}41$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I - Kontroll av sprickbildning

(Se relaterad teori: Osprucket armerat tvärsnitt - Stadium I)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringsstång ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen. Det omvandlade tvärsnittet består alltså enbart av betong och kan analyseras med klassisk tvärsnittsteori *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Det faktiska och det omvandlade tvärsnittet visas i figur U2.4.



Figur U2.4 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt

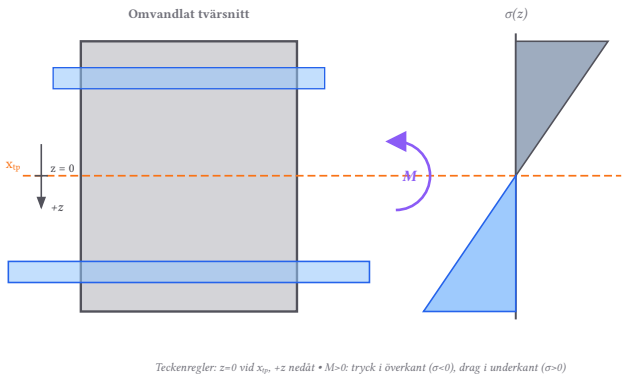
Spänningsberäkning m.h.a. Navier i Stadium I

Det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet kan analyseras med Naviers formel:

$$\sigma_c(z) = \frac{M_d}{I_I} \cdot z$$

> **Obs:** Naviers formel måste tillämpas med konsekventa teckenregler. Se teckenregler för Naviers formel.

Spänningsfördelningen i stadium I visas i figur U2.5.



Figur U2.5 Spänningsfördelning i Stadium I — tryck i överkant, drag i underkant

Övergången från Stadium I till Stadium II sker när dragspänningen i det mest dragna fibret når betongens dragkapacitet. Vid sprickbildning kan σ_c i underkant antas vara lika med betongens böjdraghållfasthet $f_{ctm,fl}$, som beräknas enligt:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\ f_{ctm}\right\} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{250}{1000}\right) \cdot 3;\ 3\right\} = \max\{4{,}05;\ 3\} = 4{,}05\ \text{MPa}$$

För att kunna beräkna sprickmomentet M_{cr} ur Naviers formel behöver vi bestämma de återstående storheterna: tröghetsmomentet I_I och avståndet z till det mest dragna fibret.

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, alltså kan x lösas med tyngdpunktsekvation *(se ekv. (2.29))*.

Inverkan av armeringen på tvärsnittets tyngdpunkt kan försummas i Stadium I, således kan x och I beräknas baserat på oarmerat betongtvärsnitt:

$$x = x_{tp} \Rightarrow x_{tp} \approx x_c = \frac{h}{2} \quad \text{i Stadium I}$$

Därför z i Naviers formel kan sättas till $z = h - x_{tp} = 250\ \text{mm} - 125\ \text{mm} = 125\ \text{mm}$.

Troghetsmomentet i Stadium I (I_I) kan beräknas som tröghetsmomentet för det oarmerade betongtvärsnittet:

$$I_I \approx I_c = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 250^3 = 2{,}604 \cdot 10^{-4}\text{m}^4 \quad \text{i Stadium I}$$

Nu kan lösas för sprickmomentet M_{cr} från Naviers formel:

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm,fl} \cdot I_c}{h - x_{tp}} = \frac{4{,}05 \cdot 2{,}604 \cdot 10^{-4}}{0{,}125} = 8{,}438\ \text{kNm}$$

Då det applicerade momentet är mycket större än sprickmomentet:

$$M_d = 31{,}5\ \text{kNm} \quad > \quad M_{cr} = 8{,}438\ \text{kNm}$$

Tvärsnittet är uppsprucket! Fortsätt beräkningarna i Stadium II.

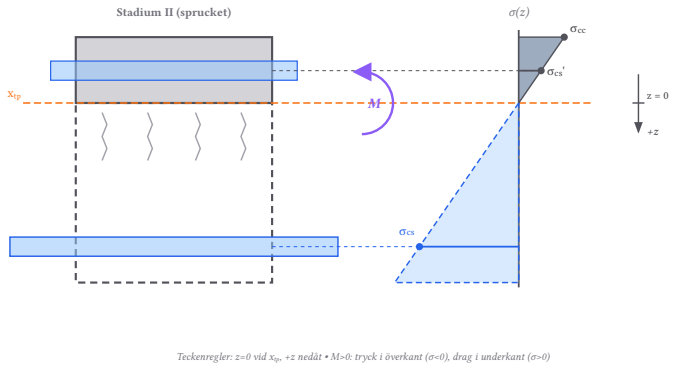
4. Analys i Stadium II

(Se relaterad teori: Sprucket armerat tvärsnitt - Stadium II)

Även i Stadium II kan spänningarna i det omvandlade betongtvärsnittet beräknas med Naviers formel *(se ekv. (2.41))*:

$$\sigma_c(z) = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot z$$

Spänningsfördelningen i stadium II visas i figur U2.6.



Figur U2.6 Spänningsfördelning i Stadium II — tryck i betongens tryckszon, drag i stål

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, dvs. från horisontell jämvikt *(se ekv. (2.37))* sammanfaller neutrala lagrets läge med tyngdpunkten hos det omvandlade tvärsnittet i Stadium II. Neutrala lagrets läge beräknas ur:

$$\frac{b \cdot x^2}{2} + (\alpha - 1)A_s'(x - d') - \alpha A_s(d - x) = 0$$

Expandera och samla termer i standardform $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\frac{b}{2}\,x^2 + \left[(\alpha - 1)A_s' + \alpha A_s\right] x - \left[(\alpha - 1)A_s' d' + \alpha A_s d\right] = 0$$

med koefficienterna:

$$A = \frac{b}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

$$B = (\alpha - 1)A_s' + \alpha A_s = 4{,}41 \cdot 157{,}08 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 = 693{,}1 + 3263{,}2 = 3956{,}4 \text{mm}^2$$

$$C = -\left[(\alpha - 1)A_s' d' + \alpha A_s d\right] = -\left[4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot 34 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot 214\right] = -722\,099 \text{mm}^3$$

Lösning med andragradformeln (positiv rot):

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{3956{,}4^2 + 4 \cdot 100 \cdot 722\,099}}{2 \cdot 100}$$

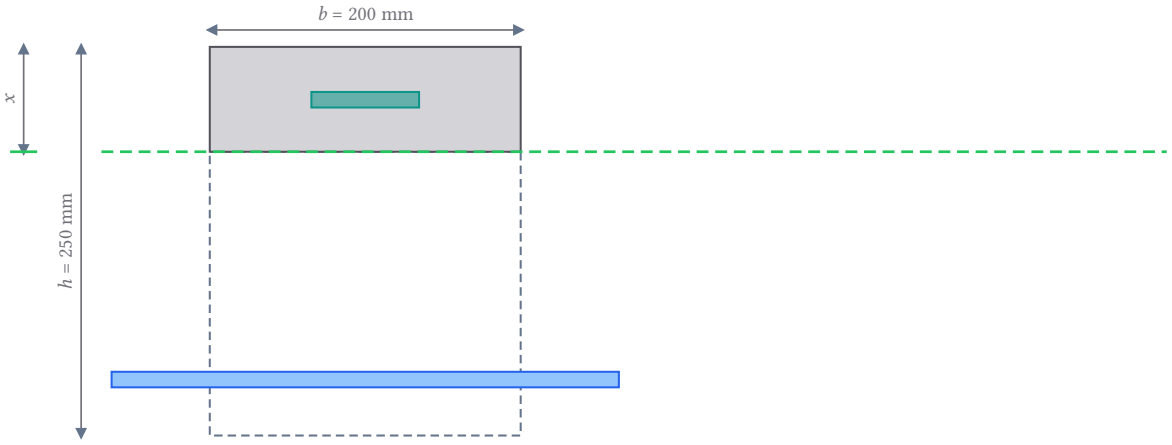
$$x = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{15{,}65 \cdot 10^6 + 288{,}84 \cdot 10^6}}{200} = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{304{,}49 \cdot 10^6}}{200} = \frac{-3956{,}4 + 17\,450}{200}$$

$$x_{TP} = \frac{13\,494}{200} \approx 67{,}5 \text{ mm} = 0{,}0675 \text{ m}$$

Sätt $x = x_{TP}$.

Beräkning av tröghetsmoment i stadium II (I_{II}):

Delarna och deras Steinertermer visas i figur U2.7.



Figur U2.7 Tröghetsmomentet I_{II} för det spruckna tvärsnittet: delarna och deras Steinertermer.

Varje tvärsnittsdel bidrar med sitt eget tröghetsmomentet kring den egna tyngdpunkten (TP) plus Steiners sats (parallellaxelteoremet) till tyngspunkten för det omvandlade tvärsnittet (neutrala lagret):

- **Betong** (tryckzon): $I_{c,eg} = \frac{b \cdot x^3}{12}$, Steiner $= b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow$ totalt $= \frac{b \cdot x^3}{3}$
- **Stål** (A_s', A_s): $I_{s,eg} \approx 0$ (punktformiga), bidrar enbart via Steiner $= A_s \cdot e^2$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x^3}{3} + (\alpha - 1)A_s'(x - d')^2 + \alpha A_s(d - x)^2$$

$$= \frac{0{,}200 \cdot 0{,}0675^3}{3} + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \times 10^{-6} \cdot (0{,}0675 - 0{,}034)^2 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \times 10^{-6} \cdot (0{,}214 - 0{,}0675)^2$$

$$= 2{,}050 \times 10^{-5} + 7{,}774 \times 10^{-7} + 7{,}004 \times 10^{-5} = 9{,}132 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

Betongspänning

I överkant är avståndet $z = -x$:

$$\sigma_{cc} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot (-x) = \frac{31{,}5 \times 10^3}{9{,}132 \times 10^{-5}} \cdot (-0{,}0675) = -23{,}284 \text{ MPa}$$

Kontroll: $|\sigma_{cc}| = 23{,}284 \text{ MPa} < 0{,}6 \cdot f_{ck} = 25{,}2 \text{ MPa}$

Stålspänning (dragarmering)

Avståndet för dragarmeringen $z = d - x = 0{,}1465$ m:

$$\sigma_{cs} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot z = \frac{31{,}5 \times 10^3}{9{,}132 \times 10^{-5}} \cdot 0{,}1465 = 50{,}534 \text{ MPa}$$

Stålspänningen blir då:

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_{cs} = 5{,}41 \cdot 50{,}534 = 273{,}389 \text{ MPa}$$

Kontroll: $\sigma_s = 273{,}4 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 400 \text{ MPa}$

Stålspänning i tryckarmering

Avståndet för tryckarmeringen $z = x - d' = 0{,}0335$ m:

$$\sigma'_{cs} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot (-z) = \frac{31{,}5 \times 10^3}{9{,}132 \times 10^{-5}} \cdot (-0{,}0335) = -11{,}556 \text{ MPa}$$

Stålspänningen blir då:

$$\sigma'_s = \alpha \cdot \sigma'_{cs} = 5{,}41 \cdot (-11{,}556) = -62{,}518 \text{ MPa}$$

Kontroll: $|\sigma'_s| = 62{,}5 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 400 \text{ MPa}$

Alla spänningar är inom tillåtna gränser, så tvärsnittet befinner sig i stadium II.

Sammanfattning av svar

- **Maximal betongpåkänning:** $\sigma_{cc} = -23{,}3 \text{ MPa}$
- **Påkänning i tryckarmering:** $\sigma'_s = -62{,}5 \text{ MPa}$
- **Påkänning i dragarmering:** $\sigma_s = 273{,}4 \text{ MPa}$

Uppgift 2.2 Böjsprucket balk utsatt av böjning och normalkraft

Beräkningsgång

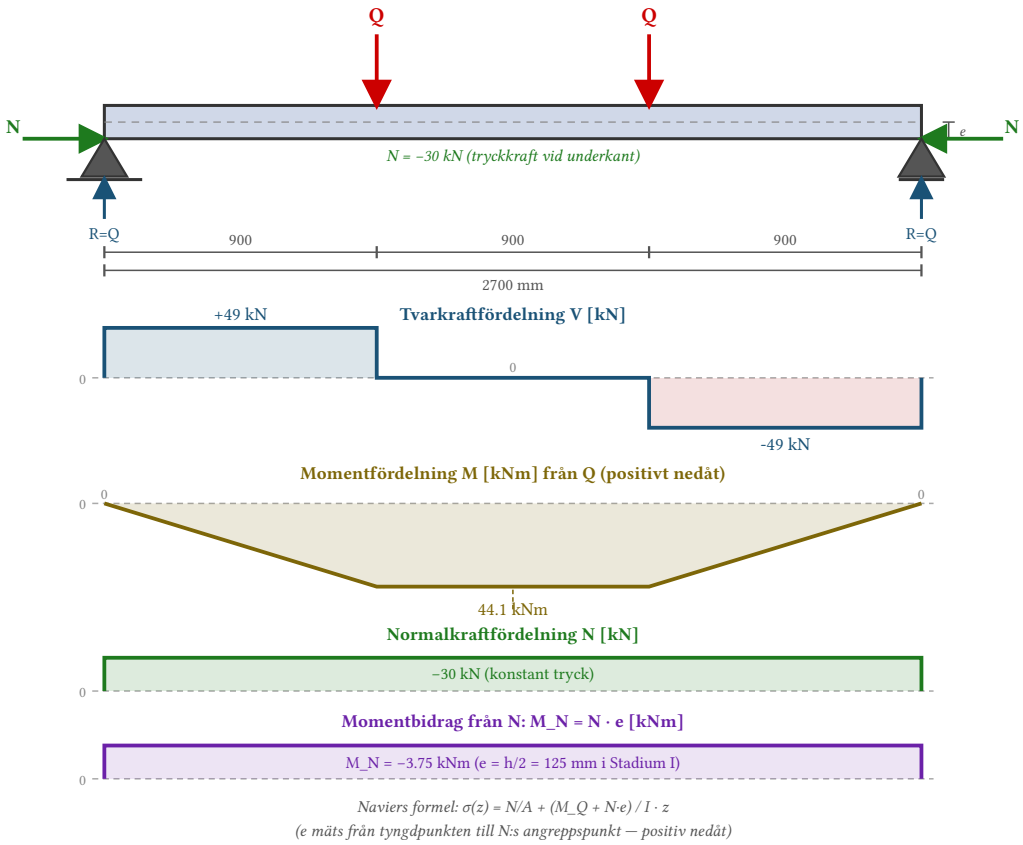
1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last
2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Stadium I - Kontroll av dragspänningar** - Kontrollera om tvärsnittet spricker genom att beräkna sprickmoment och jämföra med påfört moment
4. **Analys i Stadium II** - Om tvärsnittet är uppsprucket, beräkna spänningar med hänsyn till sprickor
5. **Krökningsfördelning** - Ta fram krökningsfördelning över balkens längd för att analysera stålspänningar

1. Lasteffekt

Balken är fritt upplagd med spännvidd $L = 2700$ mm och belastad med två punktlaster Q i en 4-punktsböjning, placerade vid 900 mm från vardera stöd ($a = 900$ mm). Stöden är ledat upplagda, vilket innebär

att momentet vid stöden är noll och ökar linjärt till punktlasterna. På grund av lastsetupets symmetri är zonen mellan punktlasterna utsatt för konstant böjmoment och noll tvärkraft.

Strukturmodellen med tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.10.



Figur U2.10 Strukturmodell med tvärkraft- och momentdiagram

Jämviktsanalys ger reaktionskrafterna $R_A = R_B = Q$ (symmetri). Tvärkraft- och momentfördelningen längs balken:

$$V(x) = \begin{cases} +Q & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x \le L - a \\ -Q & L - a < x \le L \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} Q \cdot x & 0 \le x \le a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) = Q \cdot a & a \le x \le L - a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) - Q \cdot (x - (L - a)) = Q \cdot (L - x) & L - a \le x \le L \end{cases}$$

där $a = 0{,}9$ m och $L = 2{,}7$ m.

Beräkna det verkande momentet för $Q = 0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}} = 0{,}7 \cdot 70 = 49$ kN i mitten av fältet:

$$M_d = Q \cdot a = 49 \text{ kN} \cdot 0{,}9 \text{ m} = 44{,}1 \text{ kNm}$$

Normalkraftens bidrag $N \cdot e$ läggs till separat i Naviers formel nedan (e_I i stadium I, e_{II} i stadium II).

2. Geometri och materialegenskaper

Geometri

- $b = 200$ mm, $h = 250$ mm
- $d' = 34$ mm, $d = 214$ mm
- $\phi_p = 10$ mm (Överkantsarmering), $\phi = 16$ mm (Underkantsarmering)

Armeringsareor

$$A_s = 3 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 603{,}186\text{mm}^2, A'_s = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \phi_p^2}{4} = 157{,}08\text{mm}^2$$

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong

- $f_{cm} = 50$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ck} = f_{cm} - 8$ MPa $= 42$ MPa *(medelhållfasthet minus standardavvikelse)*
- $f_{ctm} = 3$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = 37$ GPa _(modul för betong i bruksstadiet, kan beräknas enligt EC2 som $E_{cm} = k*E \cdot f*cm^{1/3}$ där $k_E = 9000$)_

Armering B500S / B500B

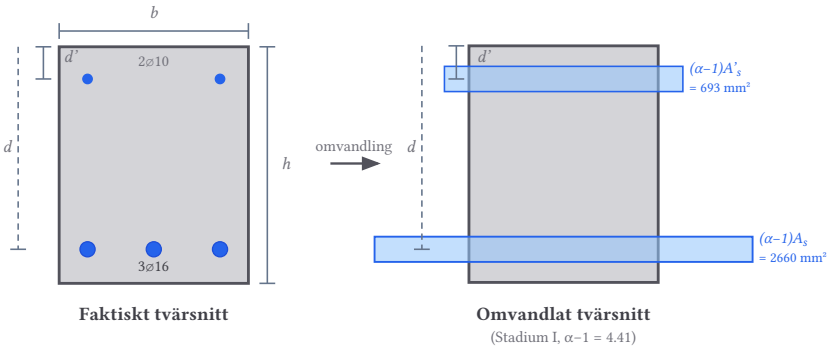
- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = 5{,}41$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I - Kontroll av sprickbildning

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringsstång ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen. Det omvandlade tvärsnittet består alltså enbart av betong och kan analyseras med klassisk tvärsnittsteori *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Det faktiska och det omvandlade tvärsnittet visas i figur U2.11.



Figur U2.11 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt

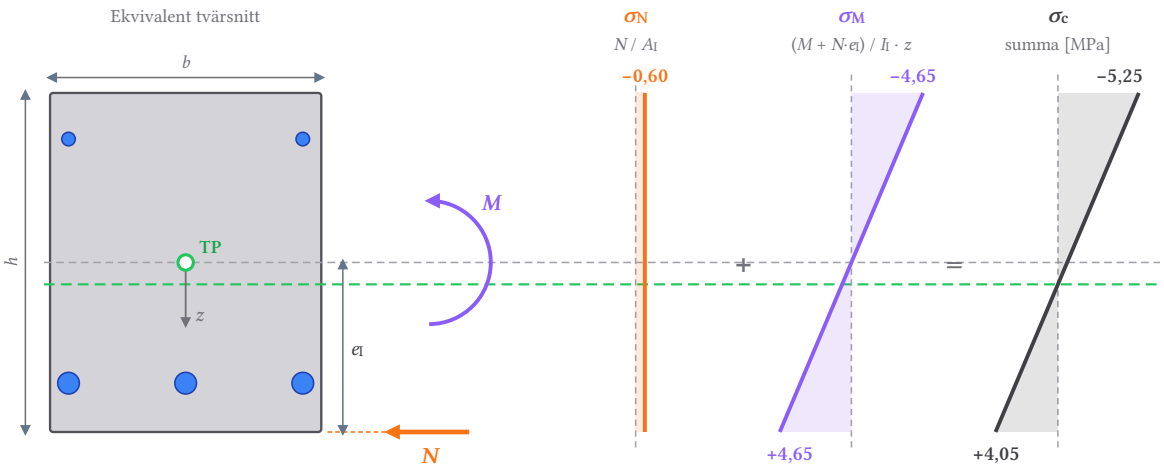
Spänningsberäkning m.h.a. Navier i Stadium I

Det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet kan analyseras med Naviers formel:

$$\sigma_c(z) = \frac{N}{A_I} + \frac{M_d + N \cdot e_I}{I_I} \cdot z$$

> **Obs:** Naviers formel måste tillämpas med konsekventa teckenregler. Se teckenregler för Naviers formel.

Spänningsbidragen från normalkraft och moment och deras summa visas i figur U2.12.



Figur U2.12 Spänningsbidragen från normalkraft och moment och deras summa (osprucket tvärsnitt).

Övergången från Stadium I till Stadium II sker när dragspänningen i det mest dragna fibret når betongens dragkapacitet. Vid sprickbildning kan σ_c i underkant antas vara lika med betongens böjdraghållfasthet $f_{ctm,fl}$, som beräknas enligt:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\, f_{ctm}\right\} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{250}{1000}\right) \cdot 3;\, 3\right\} = \max\{4{,}05;\, 3\} = 4{,}05 \text{ MPa}$$

För att kunna beräkna sprickmomentet M_{cr} ur Naviers formel behöver vi bestämma de återstående storheterna: tröghetsmomentet I_I, avståndet e_I från tyngdpunkten till Normalkraft position och avståndet z till det mest dragna fibret.

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, alltså kan x lösas med tyngdpunktsekvation *(se ekv. (2.29))*.

Inverkan av armeringen på tvärsnittets tyngdpunkt kan försummas i Stadium I, således kan x och I beräknas baserat på oarmerat betongtvärsnitt:

$$x_{tp} \approx x_c = \frac{h}{2} \quad \text{i Stadium I}$$

Därför z i Naviers formel kan sättas till $z = h - x_{tp} = 250 \text{ mm} - 125 \text{ mm} = 125 \text{ mm}$, och e_I kan sättas till $e_I = h - x_{tp} = 125 \text{ mm}$.

Troghetsmomentet och tvärsnittsarea i Stadium I (I_I och A_I) kan beräknas som tröghetsmomentet och tvärsnittsarean för det oarmerade betongtvärsnittet:

$$I_I \approx I_c = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 250^3 = 2{,}604 \cdot 10^{-4} \text{m}^4 \quad \text{i Stadium I}$$

$$A_I = b \cdot h = 200 \cdot 250 = 50000 \text{mm}^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \quad \text{i Stadium I}$$

Nu kan lösas för sprickmomentet M_{cr} från Naviers formel:

$$M_{cr} = \left(f_{ctm,fl} - \frac{N}{A_I}\right) \cdot \frac{I_c}{h - x_{tp}} - N \cdot e_I = \frac{(4{,}05 - (-0{,}6)) \cdot 2{,}604 \cdot 10^{-4}}{0{,}125} - (-30 \cdot 0{,}125)$$

$$= 9{,}688 + 3{,}75 = 13{,}438 \text{ kNm}$$

Då det applicerade momentet är mycket större än sprickmomentet:

$$M_d = 44{,}1 \text{ kNm} \quad > \quad M_{cr} = 13{,}438 \text{ kNm}$$

> **Obs:** Sprickmomentet $M_{cr} = 13{,}438$ kNm är högre än det i Uppgift 1 (8,438 kNm). Anledningen är att normalkraften $N = -30$ kN (tryck) angriper i underkantsfibern, nedanför tvärsnittets tyngdpunkt.

> Detta ger dels en jämnt fördelad tryckning $N/A = -0{,}6$ MPa som minskar dragspänningen i underkant, dels ett *negativt* excentricitetsmoment $N \cdot e_I = -3{,}75$ kNm som även det bidrar till tryck i underkant. Båda effekterna motverkar sprickbildning och kräver ett högre böjmoment för att nå betongens dragkapacitet.

Tvärsnittet är uppsprucket! Fortsätt beräkningarna i Stadium II.

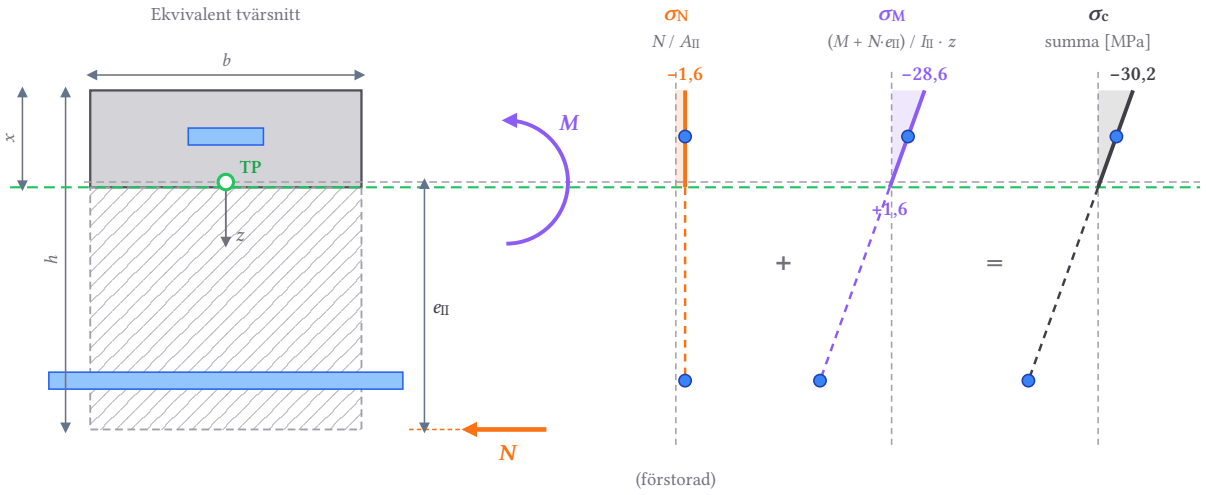
4. Analys i Stadium II

(Se relaterad teori: Sprucket armerat tvärsnitt - Stadium II)

Även i Stadium II kan spänningarna i det omvandlade betongtvärsnittet beräknas med Naviers formel *(se ekv. (2.41))*:

$$\sigma_c(z) = \frac{N}{A_{II}} + \frac{M_d + N \cdot e_{II}}{I_{II}} \cdot z$$

Motsvarande uppdelning för det spruckna tvärsnittet visas i figur U2.13.



Figur U2.13 Spänningsbidragen och deras summa för det spruckna tvärsnittet.

När tvärsnittet är sprucket och utsatt med normalkraft och moment kan inte neutrallagrets läge x antas vara lika med tyngdpunkten x_{tp}, utan måste lösas iterativt så att spänningen i det mest dragna fibret är noll. Detta innebär att det ekvivalenta betongtvärsnittets storlek inte är känd i förväg, och därmed inte heller tvärsnittsarean A_{II}, tröghetsmomentet I_{II} eller avståndet e_{II}.

Iterativ analys med hjälp av Naviers formel

Steg 1: Gissa x

Första gissning: $x = 71$ mm (föreslagen i uppgiftens tips)

Steg 2: Beräkna tvärsnittskonstanter från gissning

$$A_{II} = A_{cc} + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s = b \cdot x + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s$$

$$= 200 \cdot 71 + (5{,}41 - 1) \cdot 157{,}08 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 = 18156\text{mm}^2$$

$$x_{tp} = \frac{b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot d' + \alpha \cdot A_s \cdot d}{A_{II}}$$

$$= \frac{200 \cdot 71 \cdot 35{,}5 + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot 34 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot 214}{18156} = 67{,}5 \text{ mm}$$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2} - x_{tp}\right)^2 + (\alpha - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{tp} - d')^2 + \alpha \cdot A_s \cdot (d - x_{tp})^2$$

$$= \frac{200 \cdot 71^3}{12} + 200 \cdot 71 \cdot (35{,}5 - 67{,}5)^2 + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot (67{,}5 - 34)^2 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot (214 - 67{,}5)^2$$

$$= 9{,}132 \cdot 10^7 \text{mm}^4$$

$$e_{II} = h - x_{tp} = 250 - 67{,}5 = 182{,}5 \text{ mm}$$

Steg 3: Beräkna betongspänningen i neutrala lagret

$$\sigma_c(x - x_{tp}) = \frac{N}{A_{II}} + \frac{M_d + N \cdot e_{II}}{I_{II}} \cdot (x - x_{tp})$$

$$= \frac{-30 \cdot 10^3}{18156} + \frac{44{,}1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^3 \cdot 182{,}5}{9{,}132 \cdot 10^7} \cdot (71 - 67{,}5) = -0{,}172 \text{ MPa} \neq 0$$

> **Obs:** Spänningen i neutrala lagret är $-0{,}172$ MPa $\neq 0$ (svagt tryck), vilket innebär att gissningen $x = 71$ mm inte är exakt (konvergerat värde $x \approx 71{,}4$ mm). Ytterligare iterationer skulle ge ett mer exakt värde. Avvikelsen är dock tillräckligt liten för att vi ska kunna acceptera $x = 71$ mm och fortsätta beräkningarna.

Betongspänning

Betongspänningen i det mest tryckta fibret (överkant) kan nu beräknas:

$$\sigma_c(-x_{tp}) = \frac{N}{A_{II}} + \frac{M_d + N \cdot e_{II}}{I_{II}} \cdot (-x_{tp})$$

$$= \frac{-30 \cdot 10^3}{18156} + \frac{44{,}1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^3 \cdot 182{,}5}{9{,}132 \cdot 10^7} \cdot (-67{,}5) = -30{,}2 \text{ MPa}$$

Uppgift 2.3 Böjsprucken balk utsatt för långtidslast

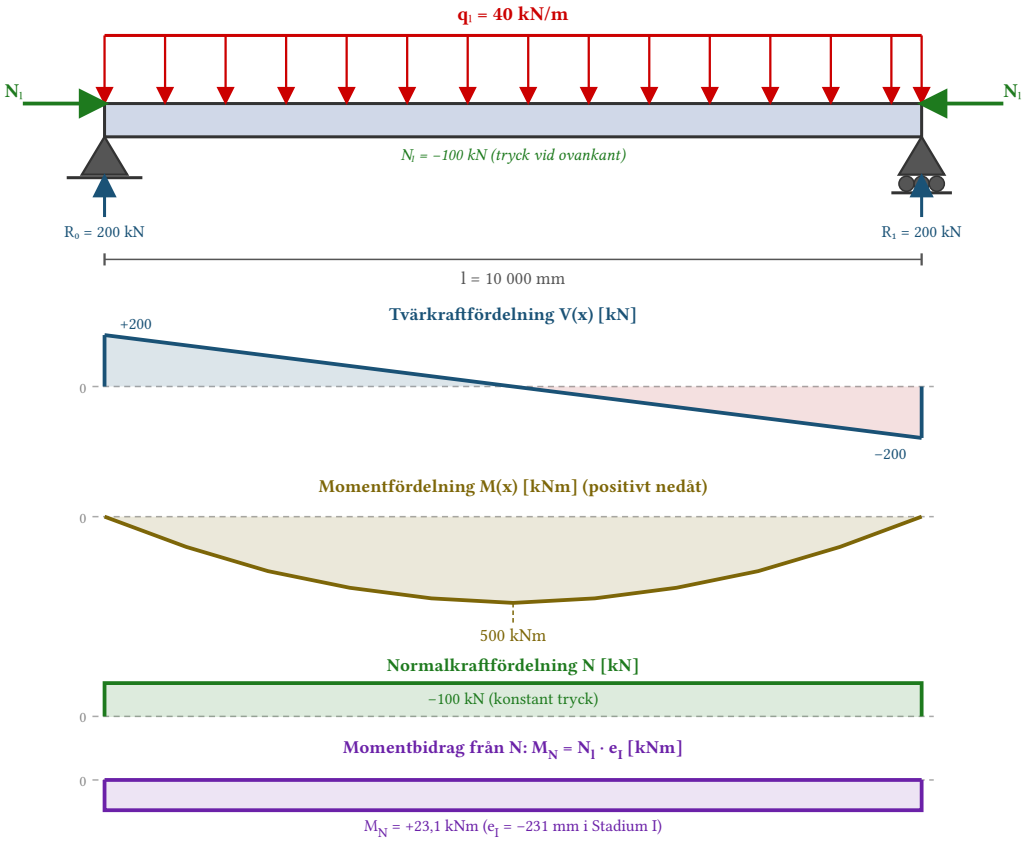
Beräkningsgång

1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last
2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Stadium I - Kontroll av dragspänningar** - Kontrollera om tvärsnittet spricker genom att beräkna sprickmoment och jämföra med påfört moment
4. **Analys i Stadium II** - Om tvärsnittet är uppsprucket, beräkna spänningar med hänsyn till sprickor
5. **Långtidseffekter** - Beräkna krympning och krypning, och bestäm det ekvivalenta betongtvärsnittet
6. **Analys i Stadium II med långtidseffekter** - Beräkna spänningar i betong och armering med hänsyn till krympning och krypning

1. Lasteffekt

Balken är fritt upplagd med spännvidd $l = 10{,}0$ m och belastad med en jämnt utbredd långtidslast $q_l = 40$ kN/m samt en tryckande normalkraft $N_l = -100$ kN som verkar i ovankant tvärsnitt.

Strukturmodellen med tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.15.



Figur U2.15 Strukturmodell med tvärkrafts- och momentdiagram

Jämviktsanalys ger reaktionskrafterna $R_A = R_B = \frac{q_l \cdot l}{2} = \frac{40 \cdot 10}{2} = 200$ kN (symmetri). Tvärkraft- och momentfördelningen längs balken:

$$V(x) = R_A - q_l \cdot x = 200 - 40x \quad [\text{kN}]$$

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{q_l \cdot x^2}{2} = 200x - 20x^2 \quad [\text{kNm}]$$

Maximalt moment uppstår i mitten av fältet ($x = l/2 = 5{,}0$ m):

$$M_l = \frac{q_l \cdot l^2}{8} = \frac{40 \cdot 10^2}{8} = 500 \text{ kNm}$$

Momentbidrag från normalkraften

Normalkraften $N_l = -100$ kN verkar i ovankant tvärsnitt. Excentriciteten e mäts från det ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt till normalkraftens angreppspunkt, positiv nedåt.

I **Stadium I** är excentriciteten $e_I = 231$ mm, vilket ger ett konstant momentbidrag från normalkraften:

$$M_N = N_l \cdot e_I = (-100) \cdot (-0{,}231) = +23{,}1 \text{ kNm}$$

I **Stadium II** är excentriciteten $e_{II} = x_{tp,II}$ (avstånd från det spruckna ekvivalenta betongtvärsnittets tyngdpunkt till normalkraftens angreppspunkt), som beror på det iterativt bestämda neutrallagrets läge.

Det totala verkande momentet kring tyngdpunkten i Naviers formel blir alltså:

$$M_d = M_l + N_l \cdot e = 500 + N_l \cdot e \quad [\text{kNm}]$$

> **Obs:** Naviers formel måste tillämpas med konsekventa teckenregler, även för momentet, normalkraften och excentriciteten. Se teckenregler för Naviers formel.

2. Geometri och materialegenskaper

Geometri

- $b = 2500$ mm, $h = 700$ mm
- $d' = 50$ mm, $d = 650$ mm
- $\phi_p = 16$ mm (Överkantsarmering), $\phi = 20$ mm (Underkantsarmering)

Armeringsareor

$$A_s = 10 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 3141{,}6\text{mm}^2, \quad A_s' = 12 \cdot \frac{\pi \cdot \phi_p^2}{4} = 12 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 2412{,}7\text{mm}^2$$

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)

- $f_{ck} = 25$ MPa *(karakteristisk cylinderhållfasthet)*
- $f_{cm} = 33$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ctm} = 2{,}6$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = k_E \cdot f_{cm}^{1/3} = 9000 \cdot 33^{1/3} = 28{,}872$ GPa *(modul för betong i bruksstadiet)*

Armering B500S / B500B

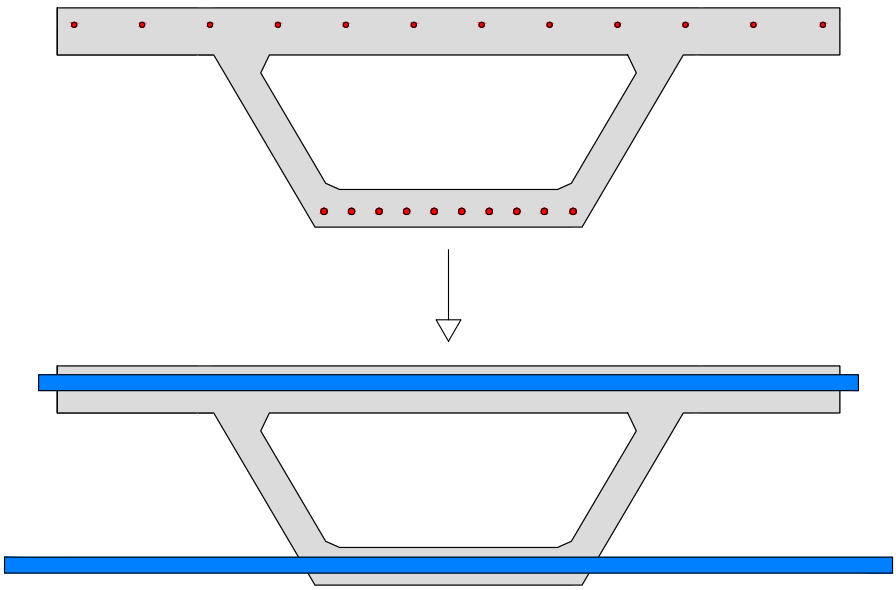
- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{28{,}9} = 6{,}93$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I - Kontroll av dragspänningar

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringsstång ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen. Det omvandlade tvärsnittet består alltså enbart av betong och kan analyseras med klassisk tvärsnittsteori *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Det faktiska och det omvandlade tvärsnittet i stadium I visas i figur U2.16.



Figur U2.16 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt

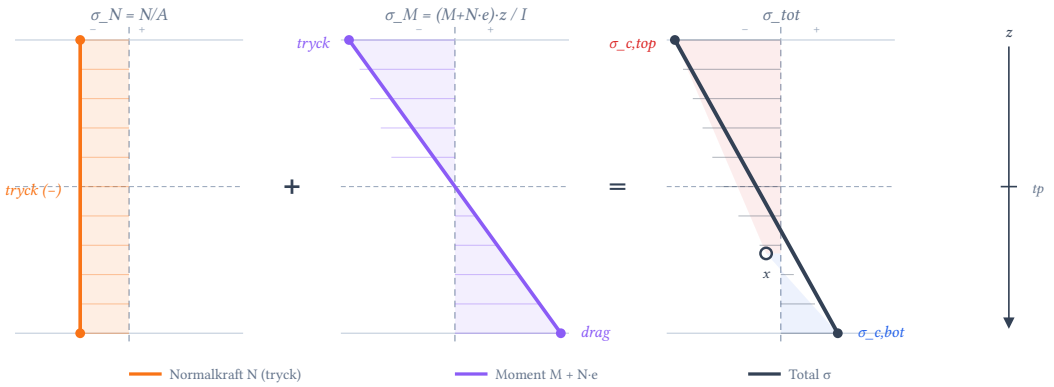
Spänningsberäkning m.h.a. Navier i Stadium I

Det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet kan analyseras med Naviers formel:

$$\sigma_c(z) = \frac{N_l}{A_I} + \frac{M_l + N_l \cdot e_I}{I_I} \cdot z$$

> **Obs:** Naviers formel måste tillämpas med konsekventa teckenregler. Se teckenregler för Naviers formel.

Spänningsbidragen och deras summa i stadium I visas i figur U2.17.



Figur U2.17 Spänningsuppdelning: σ_N (jämnt tryck) + σ_M (linjär) = σ_tot

Övergången från Stadium I till Stadium II sker när dragspänningen i det mest dragna fibern når betongens dragkapacitet. Vid sprickbildning kan σ_c i underkant antas vara lika med betongens böjdraghållfasthet $f_{ctm,fl}$, som beräknas enligt:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\, f_{ctm}\right\} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{700}{1000}\right) \cdot 2{,}6;\, 2{,}6\right\}$$

$$= \max\{2{,}34;\, 2{,}6\} = 2{,}6 \text{ MPa}$$

Tvärsnittskonstanterna i Stadium I är givna (se Beräkningsförutsättningar):

$$A_I = 589\,778 \text{mm}^2, \quad I_I = 3{,}178 \cdot 10^{10} \text{mm}^4, \quad x_{tp} = 231 \text{ mm}$$

Avståndet från tyngdpunkten till det mest dragna fibern (underkant):

$$z = h - x_{tp} = 700 - 231 = 469 \text{ mm}$$

Excentriciteten från tyngdpunkten till normalkraftens angreppspunkt (ovankant, positiv nedåt):

$$e_I = -x_{tp} = -231 \text{ mm}$$

Sprickmoment

Nu kan sprickmomentet M_{cr} lösas ur Naviers formel, genom att sätta $\sigma_c = f_{ctm,fl}$ i det mest dragna fibern:

$$M_{cr} = \left(f_{ctm,fl} - \frac{N_l}{A_I}\right) \cdot \frac{I_I}{h - x_{tp}} - N_l \cdot e_I$$

$$= \left(2{,}6 - \frac{-100 \cdot 10^3}{589\,778}\right) \cdot \frac{3{,}178 \cdot 10^{10}}{469} - (-100 \cdot 10^3) \cdot (-231)$$

$$= (2{,}6 + 0{,}170) \cdot 67{,}76 \cdot 10^6 - 23{,}1 \cdot 10^6 = 187{,}7 \cdot 10^6 - 23{,}1 \cdot 10^6 = 164{,}6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_{cr} = 164{,}6 \text{ kNm}$$

Då det applicerade momentet är mycket större än sprickmomentet:

$$M_l = 500 \text{ kNm} \quad \gg \quad M_{cr} = 164{,}6 \text{ kNm}$$

> **Obs:** Trots att normalkraftens tryckverkan motverkar sprickbildning (bidrar med $N_l \cdot e_I = 23{,}1$ kNm extra sprickmotkapacitet), är det applicerade momentet $M_l = 500$ kNm betydligt större.

Tvärsnittet är uppsprucket! Fortsätt beräkningarna i Stadium II.

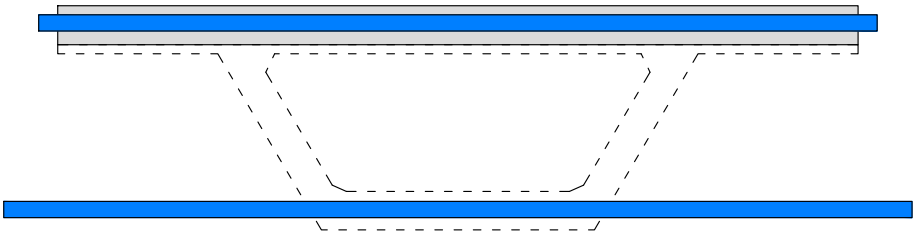
4. Analys i Stadium II

(Se relaterad teori: Sprucket armerat tvärsnitt - Stadium II)

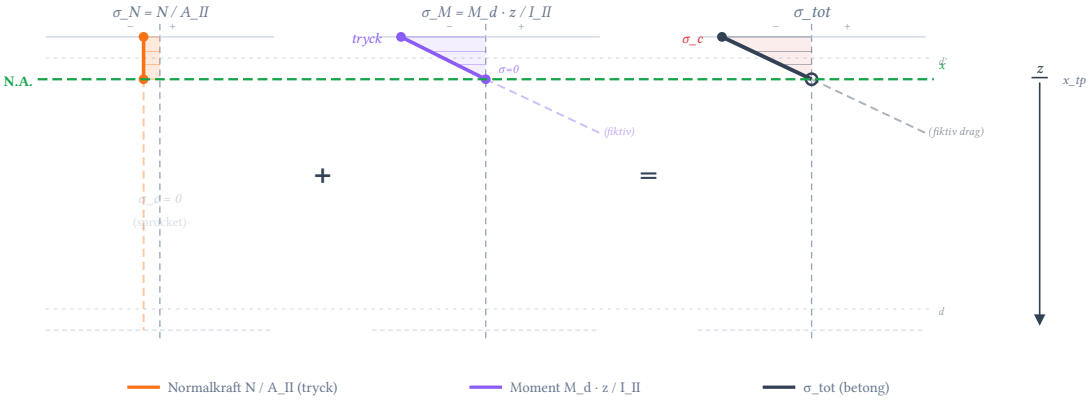
Även i Stadium II kan spänningarna i det omvandlade betongtvärsnittet beräknas med Naviers formel *(se ekv. (2.41))*:

$$\sigma_c(z) = \frac{N_l}{A_{II}} + \frac{M_l + N_l \cdot e_{II}}{I_{II}} \cdot z$$

Det omvandlade tvärsnittet i stadium II och spänningsuppdelningen visas i figur U2.18 och figur U2.19.



Figur U2.18 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt



Figur U2.19 Spänningsuppdelning Stadium II: σ_N + σ_M = σ_tot (betong ovan N.A., sprucket under)

När tvärsnittet är sprucket och utsatt för normalkraft och moment kan inte neutrallagrets läge x antas vara lika med tyngdpunkten x_{tp}, utan måste lösas iterativt så att spänningen vid neutrallagret är noll. Detta innebär att det ekvivalenta betongtvärsnittets storlek inte är känd i förväg, och därmed inte heller tvärsnittsarean A_{II}, tröghetsmomentet I_{II} eller avståndet e_{II}.

> **Obs:** Eftersom neutrallagret förväntas ligga inom övre flänsen ($x < t_f$) används flänsbredden $b = 2500$ mm som tryckzonens bredd i beräkningen. Under detta antagande kan det iterativa lösningsförfarandet tillämpas utan att behöva ta hänsyn till att tryckzonen kan vara smalare än flänsbredden, således att det omvandlade betongtvärsnittet i Stadium II kan analyseras som ett sprucket rektangulärt tvärsnitt.

Iterativ analys med hjälp av Naviers formel

Iteration 1: $x = 120$ mm

Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II} = b \cdot x + (\alpha - 1)A_s' + \alpha A_s = 2500 \cdot 120 + 5{,}93 \cdot 2412{,}7 + 6{,}93 \cdot 3141{,}6 = 336\,079 \text{mm}^2$$

$$x_{tp} = \frac{2500 \cdot 120 \cdot 60 + 5{,}93 \cdot 2412{,}7 \cdot 50 + 6{,}93 \cdot 3141{,}6 \cdot 650}{336\,079} = \frac{32{,}87 \cdot 10^6}{336\,079} = 97{,}8 \text{ mm}$$

$$I_{II} = \frac{2500 \cdot 120^3}{12} + 300\,000 \cdot (60 - 97{,}8)^2 + 14\,307 \cdot (97{,}8 - 50)^2 + 21\,771 \cdot (650 - 97{,}8)^2$$

$$= 360 \cdot 10^6 + 429 \cdot 10^6 + 32{,}7 \cdot 10^6 + 6638 \cdot 10^6 = 7{,}46 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

$$e_{II} = -x_{tp} = -97{,}8 \text{ mm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp} = 120 - 97{,}8 = 22{,}2$ mm):

$$\sigma_c = \frac{-100 \cdot 10^3}{336\,079} + \frac{500 \cdot 10^6 + 100 \cdot 10^3 \cdot 97{,}8}{7{,}46 \cdot 10^9} \cdot 22{,}2 = -0{,}298 + 1{,}52 = +1{,}2 \text{ MPa} \neq 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $+1{,}2$ MPa (drag), vilket innebär att gissningen $x = 120$ mm är för stor — tryckhöjden måste minskas.

Det teoretiska neutrallagret fås genom $\sigma = 0$:

$$z_0 = -\frac{N_l \cdot I_{II}}{A_{II} \cdot M_d} = -\frac{-100 \cdot 10^3 \cdot 7{,}46 \cdot 10^9}{336\,079 \cdot 509{,}8 \cdot 10^6} = +4{,}4 \text{ mm}$$

$$x = x_{tp} + z_0 = 97{,}8 + 4{,}4 = 102{,}2 \text{ mm} \approx 100 \text{ mm}$$

Iteration 2: $x = 100$ mm

Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II} = 2500 \cdot 100 + 5{,}93 \cdot 2412{,}7 + 6{,}93 \cdot 3141{,}6 = 286\,079 \text{mm}^2$$

$$x_{tp} = \frac{2500 \cdot 100 \cdot 50 + 5{,}93 \cdot 2412{,}7 \cdot 50 + 6{,}93 \cdot 3141{,}6 \cdot 650}{286\,079} = \frac{27{,}37 \cdot 10^6}{286\,079} = 95{,}7 \text{ mm}$$

$$I_{II} = \frac{2500 \cdot 100^3}{12} + 250\,000 \cdot (50 - 95{,}7)^2 + 14\,307 \cdot (95{,}7 - 50)^2 + 21\,771 \cdot (650 - 95{,}7)^2$$

$$= 208 \cdot 10^6 + 522 \cdot 10^6 + 29{,}9 \cdot 10^6 + 6689 \cdot 10^6 = 7{,}45 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

$$e_{II} = -x_{tp} = -95{,}7 \text{ mm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp} = 100 - 95{,}7 = 4{,}3$ mm):

$$\sigma_c = \frac{-100 \cdot 10^3}{286\,079} + \frac{500 \cdot 10^6 + 100 \cdot 10^3 \cdot 95{,}7}{7{,}45 \cdot 10^9} \cdot 4{,}3 = -0{,}350 + 0{,}294 = -0{,}06 \text{ MPa} \approx 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $-0{,}06$ MPa ≈ 0. Gissningen $x = 100$ mm ger tillräcklig noggrannhet. Antagandet att neutrallagret ligger inom övre flänsen ($x < t_f$) är också bekräftat.

Spänningar i Stadium II

Med $x = 100$ mm, $x_{tp} = 95{,}7$ mm, $A_{II} = 286\,079 \text{mm}^2$, $I_{II} = 7{,}45 \cdot 10^9 \text{mm}^4$ och $M_l + N_l \cdot e_{II} = 509{,}6 \cdot 10^6$ Nmm:

Betongspänning i överkant ($z = -x_{tp} = -95{,}7$ mm):

$$\sigma_c = \frac{-100 \cdot 10^3}{286\,079} + \frac{509{,}6 \cdot 10^6}{7{,}45 \cdot 10^9} \cdot (-95{,}7) = -0{,}350 - 6{,}54 = -6{,}9 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i dragarmering ($z = d - x_{tp} = 650 - 95{,}7 = 554{,}3$ mm):

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_c(z) = 6{,}93\left(\frac{-100 \cdot 10^3}{286\,079} + \frac{509{,}6 \cdot 10^6}{7{,}45 \cdot 10^9} \cdot 554{,}3\right) = 6{,}93 \cdot 37{,}5 = 260 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i tryckarmering ($z = d' - x_{tp} = 50 - 95{,}7 = -45{,}7$ mm):

$$\sigma_s' = \alpha \cdot \sigma_c(z) = 6{,}93\left(\frac{-100 \cdot 10^3}{286\,079} + \frac{509{,}6 \cdot 10^6}{7{,}45 \cdot 10^9} \cdot (-45{,}7)\right) = 6{,}93 \cdot (-3{,}48) = -24{,}1 \text{ MPa}$$

5. Långtidseffekter

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - krympning och krypning)

Förenklad metod — kontroll

Den maximala betongspänningen i Stadium II är $\sigma_c = -6{,}9$ MPa. Villkoret för att den förenklade metoden (tabellvärden) får tillämpas är:

$$|\,\sigma_c| \leq 0{,}4 \cdot f_{ck} = 0{,}4 \cdot 25 = 10{,}0 \text{ MPa}$$

$$6{,}9 \text{ MPa} < 10{,}0 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

> Villkoret uppfyllt — kryptal och krympvärden kan avläsas direkt från tabellerna 5.2 och 5.3 i SS-EN 1992-1-1:2023.

Nominell tvärsnittsdimension h_0

Den nominella tvärsnittsdimensionen (ekvivalent tjocklek) beräknas som:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}$$

där A_c är betongens tvärsnittsarea och u är omslutande omfång som exponeras för uttorkning.

Omfånget u beräknas genom att summera alla exponerade kanter i lådtvärsnittet:

$$u = 2500 + 500 + 500 + 150 + 150 + 640 + 640 + 900 = 5980 \text{ mm}$$

Med $A_c \approx A_I = 589\,778 \text{mm}^2$:

$$h_0 = \frac{2 \cdot 589\,778}{5980} = 197{,}3 \text{ mm} \approx 200 \text{ mm}$$

Kryptal — Tabell 5.2 **(→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)**

Betong N C25/30, cementklass CN, belastningsålder $t_0 = 28$ d, torrt klimat ($RH = 50\%$), $h_0 = 200$ mm:

Tabellvärde för $f_{ck} = 35$ MPa: $\varphi_{35} = 2{,}2$

Korrektionsfaktor för $f_{ck} = 25$ MPa:

$$\left(\frac{35}{f_{ck}}\right)^{A} = \left(\frac{35}{25}\right)^{0{,}79} = 1{,}4^{0{,}79} = 1{,}30$$

$$\varphi(50 \text{ y}, t_0) = 2{,}2 \cdot 1{,}30 = 2{,}86$$

Effektiv elasticitetsmodul

Med kryptalet $\varphi = 2{,}86$ fås den effektiva elasticitetsmodulen för långtidsanalys:

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05 \cdot E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{1{,}05 \cdot 28{,}9}{1 + 2{,}86} = \frac{30{,}3}{3{,}86} = 7{,}85 \text{ GPa}$$

$$\alpha_{eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{7{,}85} = 25{,}5$$

Krympning — Tabell 5.3 (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)
Betong N C25/30, cementklass CN, torrt klimat ($RH = 50\%$), $h_0 = 200$ mm:

Avläst ur tabell (linjärt interpolerat mellan $f_{ck} = 20$ och $f_{ck} = 35$ MPa):

$$\varepsilon_{cs,50y} = 0{,}63 \text{ ‰}$$

Krympningskrafter
Krympningen orsakar tvångskrafter i armeringen. Varje armeringslager bidrar med en ekvivalent normalkraft som verkar som **drag** på betongtvärsnittet:

$$F_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A_s = 126 \cdot 3141{,}6 = 395{,}8 \text{ kN} \quad \text{(dragarmering)}$$

$$F'_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A'_s = 126 \cdot 2412{,}7 = 304{,}0 \text{ kN} \quad \text{(tryckarmering)}$$

där $E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} = 200\,000 \cdot 0{,}63 \cdot 10^{-3} = 126$ MPa.
Total ekvivalent normalkraft från krympning:

$$N_{cs} = F_{cs} + F'_{cs} = 395{,}8 + 304{,}0 = 699{,}8 \text{ kN}$$

6. Analys i Stadium II med långtidseffekter

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - böjspruckna tvärsnitt)

Med hänsyn till krypning och krympning används $\alpha_{eff} = 25{,}5$ i stället för $\alpha = 6{,}93$. Krympningskrafterna F_{cs} och F'_{cs} adderas som yttre normalkrafter med tillhörande excentriciteter i Naviers formel:

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{N_{eff}}{A_{II,eff}} + \frac{M_{d,eff}}{I_{II,eff}} \cdot z$$

där:

$$N_{eff} = N_l + N_{cs} = -100 + 699{,}8 = +599{,}8 \text{ kN (drag)}$$

$$M_{d,eff} = M_l + N_l \cdot (-x_{tp,eff}) + F_{cs} \cdot (d - x_{tp,eff}) + F'_{cs} \cdot (d' - x_{tp,eff})$$

> **Obs:** Eftersom krympningen ger en nettodragkraft kan neutrallagrets läge inte bestämmas med en enkel tyngdpunktsekvation — ett iterativt förfarande krävs ($x \neq x_{tp}$).

Stålspänningarna beräknas med hänsyn till den fria krympningens bidrag:

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y}$$

Iterativ analys

Iteration 1: $x = 100$ mm (från korttidsanalysen)
Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II,eff} = b \cdot x + (\alpha_{eff} - 1)A'_s + \alpha_{eff} A_s = 2500 \cdot 100 + 24{,}5 \cdot 2412{,}7 + 25{,}5 \cdot 3141{,}6 = 389\,222 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{2500 \cdot 100 \cdot 50 + 24{,}5 \cdot 2412{,}7 \cdot 50 + 25{,}5 \cdot 3141{,}6 \cdot 650}{389\,222} = \frac{67{,}53 \cdot 10^6}{389\,222} = 173{,}5 \text{ mm}$$

$$I_{II,eff} = \frac{2500 \cdot 100^3}{12} + 250\,000 \cdot (50 - 173{,}5)^2 + 59\,111 \cdot (173{,}5 - 50)^2 + 80\,111 \cdot (650 - 173{,}5)^2$$

$$= 208 \cdot 10^6 + 3813 \cdot 10^6 + 902 \cdot 10^6 + 18\,190 \cdot 10^6 = 23{,}1 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

Ekvivalent moment kring tyngdpunkten:

$$M_{d,eff} = 500 \cdot 10^6 + 100 \cdot 10^3 \cdot 173{,}5 + 395{,}8 \cdot 10^3 \cdot 476{,}5 + 304{,}0 \cdot 10^3 \cdot (-123{,}5) = 668{,}5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp,eff} = 100 - 173{,}5 = -73{,}5$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{599{,}8 \cdot 10^3}{389\,222} + \frac{668{,}5 \cdot 10^6}{23{,}1 \cdot 10^9} \cdot (-73{,}5) = 1{,}54 - 2{,}13 = -0{,}58 \text{ MPa} \neq 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $-0{,}58$ MPa (tryck vid antaget neutrallager), vilket innebär att $x = 100$ mm inte stämmer.

Det teoretiska neutrallagret fås genom $\sigma = 0$:

$$z_0 = -\frac{N_{eff} \cdot I_{II,eff}}{A_{II,eff} \cdot M_{d,eff}} = -\frac{599{,}8 \cdot 10^3 \cdot 23{,}1 \cdot 10^9}{389\,222 \cdot 668{,}5 \cdot 10^6} = -53{,}3 \text{ mm}$$

$$x = x_{tp,eff} + z_0 = 173{,}5 + (-53{,}3) = 120{,}2 \text{ mm} \approx 120 \text{ mm}$$

Iteration 2: $x = 120$ mm

Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II,eff} = 2500 \cdot 120 + 24{,}5 \cdot 2412{,}7 + 25{,}5 \cdot 3141{,}6 = 439\,222 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{2500 \cdot 120 \cdot 60 + 24{,}5 \cdot 2412{,}7 \cdot 50 + 25{,}5 \cdot 3141{,}6 \cdot 650}{439\,222} = \frac{73{,}03 \cdot 10^6}{439\,222} = 166{,}3 \text{ mm}$$

$$I_{II,eff} = \frac{2500 \cdot 120^3}{12} + 300\,000 \cdot (60 - 166{,}3)^2 + 59\,111 \cdot (166{,}3 - 50)^2 + 80\,111 \cdot (650 - 166{,}3)^2$$

$$= 360 \cdot 10^6 + 3390 \cdot 10^6 + 800 \cdot 10^6 + 18\,740 \cdot 10^6 = 23{,}3 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

Ekvivalent moment kring tyngdpunkten:

$$M_{d,eff} = 500 \cdot 10^6 + 100 \cdot 10^3 \cdot 166{,}3 + 395{,}8 \cdot 10^3 \cdot 483{,}7 + 304{,}0 \cdot 10^3 \cdot (-116{,}3) = 672{,}7 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp,eff} = 120 - 166{,}3 = -46{,}3$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{599{,}8 \cdot 10^3}{439\,222} + \frac{672{,}7 \cdot 10^6}{23{,}3 \cdot 10^9} \cdot (-46{,}3) = 1{,}37 - 1{,}34 = +0{,}03 \text{ MPa} \approx 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $+0{,}03$ MPa ≈ 0. Gissningen $x = 120$ mm ger tillräcklig noggrannhet.

Spänningar i Stadium II med långtidseffekter

Med $x = 120$ mm, $x_{tp,eff} = 166{,}3$ mm, $A_{II,eff} = 439\,222\text{mm}^2$, $I_{II,eff} = 23{,}3 \cdot 10^9\text{mm}^4$:

Betongspänning i överkant ($z = -x_{tp,eff} = -166{,}3$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{599{,}8 \cdot 10^3}{439\,222} + \frac{672{,}7 \cdot 10^6}{23{,}3 \cdot 10^9} \cdot (-166{,}3) = 1{,}37 - 4{,}80 = -3{,}4 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i dragarmering ($z = d - x_{tp,eff} = 650 - 166{,}3 = 483{,}7$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(483{,}7) = 1{,}37 + 28{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot 483{,}7 = 15{,}3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 25{,}5 \cdot 15{,}3 - 126 = 391 - 126 = 265 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i tryckarmering ($z = d' - x_{tp,eff} = 50 - 166{,}3 = -116{,}3$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(-116{,}3) = 1{,}37 + 28{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot (-116{,}3) = -2{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z'_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 25{,}5 \cdot (-2{,}0) - 126 = -51 - 126 = -177 \text{ MPa}$$

Sammanfattning

Spänning	Korttid (Avsnitt 4)	Långtid (Avsnitt 6)
σ_c (överkant)	$-6{,}9$ MPa	$-3{,}4$ MPa

Spänning	Korttid (Avsnitt 4)	Långtid (Avsnitt 6)
σ_s (dragarmering)	260 MPa	265 MPa
σ'_s (tryckarmering)	$-24{,}1$ MPa	-177 MPa

> **Slutsats:** Krypningen orsakar en kraftig omfördelning av spänningar från betongen till armeringen. Betongspänningen i överkant halveras ($-6{,}9 \rightarrow -3{,}4$ MPa), medan tryckarmeringen tar upp betydligt mer kraft ($-24 \rightarrow -177$ MPa). Krympningens direkta bidrag ($-E_s \cdot \varepsilon_{cs} = -126$ MPa) dominerar ökningen i tryckarmeringen.

Uppgift 2.4 Gångbro av betong (Ågrändsbron, GBG)

Beräkningsgång

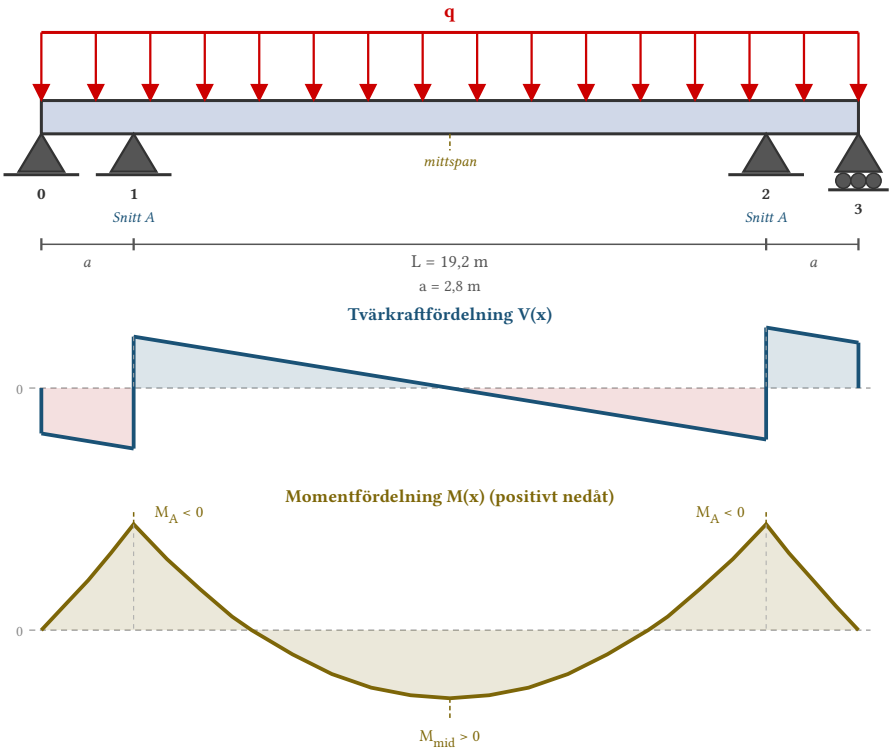
1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last
2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Stadium I - Kontroll av dragspänningar** - Kontrollera om tvärsnittet spricker genom att beräkna sprickmoment och jämföra med påfört moment
4. **Analys i Stadium II** - Om tvärsnittet är uppsprucket, beräkna spänningar med hänsyn till sprickor
5. **Långtidseffekter** - Beräkna krympning och krypning, och bestäm det ekvivalenta betongtvärsnittet
6. **Analys i Stadium II med långtidseffekter** - Beräkna spänningar i betong och armering med hänsyn till krympning och krypning
7. **Kontroll av sprickbredd** - Kontrollera att sprickbredd är inom tillåtna gränser i brukgränstillstånd

1. Lasteffekt

Bron modelleras som en **kontinuerlig balk med tre spännvidder**: sidospännvidderna $a = 2{,}8$ m och huvudspännvidden $L = 19{,}2$ m, totalt $2{,}8 + 19{,}2 + 2{,}8 = 24{,}8$ m.

Ändarstöden (0 och 3) är fria leder, medan mellanstöden (1 och 2) utgör kontinuiteten. Snitt A ligger vid mellanstöden, och mittspan avser mitten av huvudspännvidden.

Den kontinuerliga balken med momentdiagram visas i figur U2.23.



Figur U2.23 Kontinuerlig balk med tre spännvidder och momentdiagram

Lastkombinationer

Egenlast $g_k = 63$ kN/m och nyttolast $q_k = 32$ kN/m. Den jämnt utbredda lasten beror på vilken kombination som betraktas:

Karakteristisk kombination (Fråga 1):

$$q_{char} = g_k + q_k = 63 + 32 = 95 \text{ kN/m}$$

Kvasi-permanent kombination (Fråga 2 & 3):

$$q_{qp} = g_k + \psi_2 \cdot q_k = 63 + 0{,}6 \cdot 32 = 82{,}2 \text{ kN/m}$$

> **Obs:** Last på alla tre spännvidderna antas — ingen lastpatternanalys med ogynnsammast placerade nyttolaster.

Stödmoment — Clapeyrons ekvation (the three moment theorem)

Systemet är symmetriskt ($M_1 = M_2 = M_A$) med $M_0 = M_3 = 0$. Tre-moment-ekvationen vid stöd 1 ger:

$$M_A \cdot (2a + 3L) = -\frac{q}{4}(a^3 + L^3)$$

$$M_A = -\frac{q(a^3 + L^3)}{4(2a + 3L)} = -\frac{q(2{,}8^3 + 19{,}2^3)}{4(2 \cdot 2{,}8 + 3 \cdot 19{,}2)} = -\frac{q \cdot 7100}{4 \cdot 63{,}2} = -28{,}1 \cdot q$$

Fältmoment i mittspan

Fältmomentet i mitten av huvudspannet fås genom superposition av det fritt upplagda momentet och stödmomenten:

$$M_{mid} = \frac{q \cdot L^2}{8} + M_A = q \cdot 46{,}1 + (-28{,}1 \cdot q) = 18{,}0 \cdot q$$

Dimensionerande moment

Lastkombination	q [kN/m]	M_A (stöd) [kNm]	M_{mid} (fält) [kNm]
Karakteristisk	95	-2670	$+1710$
Kvasi-permanent	82,2	-2310	$+1480$

> **Snitt A** (över stöd) utsätts för **negativt böjmoment** (hängning) — dragspänningarna uppstår i **överkant**.
>
> **Mittspan** utsätts för **positivt böjmoment** (fältmoment) — dragspänningarna uppstår i **underkant**.

2. Geometri och materialegenskaper

Effektiv flänsbredd (→ Effektiv flänsbredd — EC2 §7.2.3)
Effektiv flänsbredd beräknas enligt EC2 §5.3.2.1 (ekvation 5.7). Den ekvivalenta spännvidden l_0 beror på snittets placering (Figur 5.2) och påverkar hur stor del av flänsen som samverkar med livet.

Flänsöverhäng — halva fria avståndet mellan liven:

$$b_1 = \frac{5000}{2} = 2500 \text{ mm}$$

Mittspan (positivt moment — fält)
Vid **mittspan** (positivt moment) är plattan i tryck. Ekvivalent spännvidd för mittfältet av huvudspannet (innerspann, Figur 5.2):

$$l_0 = 0{,}7\,L = 0{,}7 \cdot 19\,200 = 13\,440 \text{ mm}$$

$$b_{eff,1} = 0{,}2\,b_1 + 0{,}1\,l_0 = 0{,}2 \cdot 2500 + 0{,}1 \cdot 13\,440 = 500 + 1344 = 1844 \text{ mm}$$

med begränsning $b_{eff,1} \le 0{,}2\,l_0 = 0{,}2 \cdot 13\,440 = 2688$ mm och $b_{eff,1} \le b_1 = 2500$ mm:

$$b_{eff,1} = 1844 \text{ mm}$$

Effektiv bredd per balk (fält):

$$b_{eff} = b_w + b_{eff,1} = 400 + 1844 = 2244 \text{ mm}$$

> Beräknad effektiv flänsbredd (2244 mm per balk) är mycket nära det fulla avståndet (2500 mm) — dvs. i mittspan kan i princip hela tvärsnittet antas effektivt.

Snitt A (negativt moment — stöd)
Vid **snitt A** (negativt moment) är plattan i tryck och varje liv bildar med den effektiva plattdelen ett **L-tvärsnitt**. Ekvivalent spännvidd vid mellanstöd (Figur 5.2):

$$l_0 = 0{,}15\,(l_1 + l_2) = 0{,}15\,(2800 + 19\,200) = 3300 \text{ mm}$$

$$b_{eff,1} = 0{,}2\,b_1 + 0{,}1\,l_0 = 0{,}2 \cdot 2500 + 0{,}1 \cdot 3300 = 830 \text{ mm}$$

med begränsning $b_{eff,1} \le 0{,}2\,l_0 = 0{,}2 \cdot 3300 = 660$ mm:

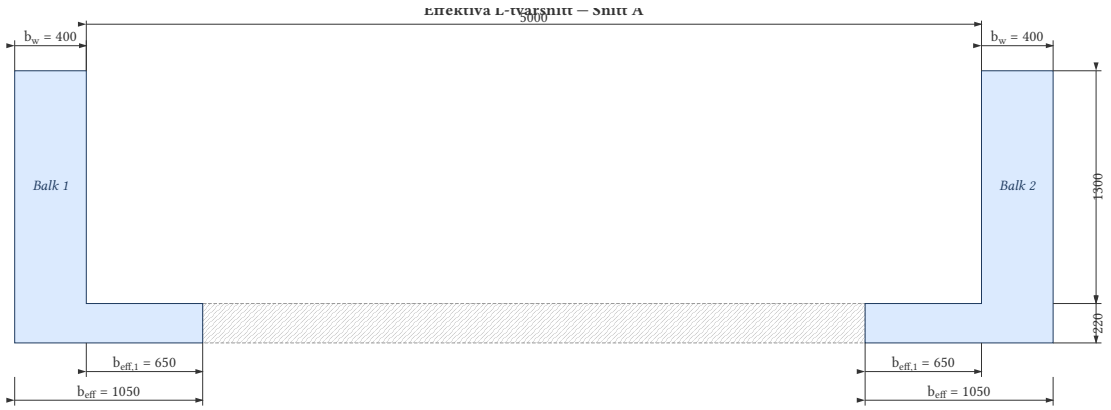
$$b_{eff,1} = 660 \text{ mm} \approx 650 \text{ mm}$$

Effektiv bredd per balk (stöd):

$$b_{eff} = b_w + b_{eff,1} = 400 + 650 = 1050 \text{ mm}$$

> Reduktionen i effektiv bredd vid stödet beror på den korta ekvivalenta spännvidden ($l_0 = 3300$ mm jämfört med $l_0 = 13\,440$ mm i fält). Den begränsade shear-lag-längden gör att en mindre del av flänsen hinner aktiveras.

De effektiva L-tvärsnitten vid snitt A visas i figur U2.24.



Figur U2.24 Effektiva L-tvärsnitt vid snitt A med beff

Geometri (per balk)

- $b_w = 400$ mm, $h = 1520$ mm, $h_f = 220$ mm *(bottenplattans tjocklek)*

Armering (från ritning)

Tvärsnittet har följande armering (per balk = per liv):

Livarmering (överkant av liv):

- Lag 1: 6 ø20, $y = 50$ mm från överkant
- Lag 2: 6 ø20, $y = 100$ mm från överkant
- Totalt per liv: $2 \times 6 = 12$ ø20

Plattarmering (bottenplatta, ø12 @ 300 mm):

- Lag 1: ø12 @ 300, $y = 50$ mm från underkant
- Lag 2: ø12 @ 300, $y = 170$ mm från underkant
- Totalt per lag: 20 stänger över hela bredden (5800 mm)

Armeringsareor per balk

Antal plattarmeringsstänger inom effektiv bredd bestäms av stångavståndet $s = 300$ mm.

Snitt A (stöd, $b_{eff} = 1050$ mm)

Negativt moment — överkant i drag, bottenplattan i tryck.

Dragarmering A_s (livarmering i överkant, 2 lag × 6 ø20):

$$A_s = 12 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 3770\text{mm}^2$$

Tyngdpunkt för dragarmeringens läge:

$$\bar{y}_s = \frac{6 \cdot 50 + 6 \cdot 100}{12} = 75 \text{ mm från överkant}, \quad d = 1520 - 75 = 1445 \text{ mm}$$

Tryckarmering A'_s (plattarmering inom b_{eff}):

Inom $b_{eff} = 1050$ mm ryms $\lfloor 1050/300 \rfloor + 1 = 4$ stänger per lag:

$$A'_s = 2 \times 4 \cdot \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 8 \cdot 113{,}1 = 905\text{mm}^2$$

Tyngdpunkt för tryckarmeringens läge:

$$\bar{y}'_s = \frac{4 \cdot 50 + 4 \cdot 170}{8} = 110 \text{ mm från underkant}, \quad d' = 110 \text{ mm}$$

Mittspan (fält, hela tvärsnittet effektivt)
Positivt moment — underkant i drag, överkant i tryck.

Dragarmering A_s (plattarmering inom halva bredden per balk):

Per balk tas halva tvärsnittet, dvs. $5800/2 = 2900$ mm. Inom denna bredd ryms 10 stänger per lag:

$$A_s = 2 \times 10 \cdot \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 20 \cdot 113{,}1 = 2262\text{mm}^2$$

Tyngdpunkt för dragarmeringens läge:

$$\bar{y}_s = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 170}{20} = 110 \text{ mm från underkant}, \quad d = 1520 - 110 = 1410 \text{ mm}$$

Tryckarmering A'_s (livarmering i överkant, 2 lag × 6 ø20):

$$A'_s = 12 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 3770\text{mm}^2, \quad d' = 75 \text{ mm}$$

Sammanfattning armeringsareor

Snitt	**Dragarmering A_s**	**d [mm]**	**Tryckarmering A'_s**	**d' [mm]**
Snitt A (stöd)	12 ø20 = 3770 mm²	1445	8 ø12 = 905 mm²	110
Mittspan (fält)	20 ø12 = 2262 mm²	1410	12 ø20 = 3770 mm²	75

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)

- $f_{ck} = 25$ MPa *(karakteristisk cylinderhållfasthet)*
- $f_{cm} = 33$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ctm} = 2{,}6$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = k_E \cdot f_{cm}^{1/3} = 9000 \cdot 33^{1/3} = 28{,}872$ GPa *(modul för betong i bruksstadiet)*

Armering B500S / B500B

- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{28{,}9} = 6{,}93$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I - Kontroll av sprickbildning

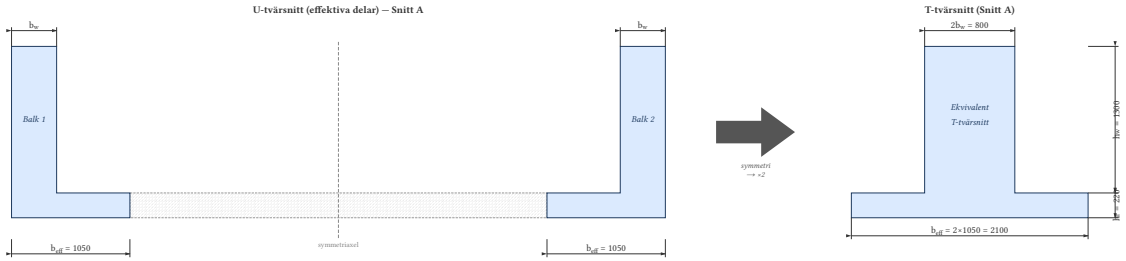
(Se relaterad teori: Osprucket armerat tvärsnitt - Stadium I)

Förenkling: U-tvärsnitt → T-tvärsnitt

Brodäckets faktiska tvärsnitt är U-format (lådtvärsnitt med öppet ovankant). Eftersom tvärsnittet är **symmetriskt kring den vertikala mittlinjen** kan det modelleras som ett ekvivalent **T-tvärsnitt** genom att kombinera bägge liven:

- **Livbredd:** $2b_w = 2 \times 400 = 800$ mm
- **Flänsbredd:** b_{eff} (slab effektiv bredd, beroende på snitt)
- **Livhöjd:** $h_w = 1300$ mm, **flänstjocklek:** $h_f = 220$ mm
- **Totalhöjd:** $h = 1520$ mm

Hur U-tvärsnittets två L-delar kombineras till ett T-tvärsnitt visas i figur U2.25.



Figur U2.25 U-tvärsnittets två symmetriska L-delar kombineras till ett ekvivalent T-tvärsnitt med dubbel livbredd.

Denna förenkling bevarar exakt tvärsnittets area och tröghetsmoment (alla tvärsnittskonstanter skalas med faktor 2 jämfört med "per balk"-beräkningen). Alla beräkningar i Stadium I nedan utgår från detta ekvivalenta T-tvärsnitt.

> **Obs:** I Stadium I kan armeringens inverkan försummas (se angivelse i uppgiften). Beräkningarna nedan avser enbart det oarmerade betongtvärsnittet.

Böjdraghållfasthet

Övergången från Stadium I till Stadium II sker när dragspänningen i det mest dragna fibret når betongens böjdraghållfasthet $f_{ctm,fl}$:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\, f_{ctm}\right\} = \max\{(1{,}6 - 1{,}52)\cdot 2{,}6;\, 2{,}6\} = \max\{0{,}21;\, 2{,}6\} = 2{,}6 \text{ MPa}$$

> För stora tvärsnitt ($h > 600$ mm) ger storleksfaktorn inget tillskott – $f_{ctm,fl} = f_{ctm}$.

3.1 Snitt A (stöd, negativt moment)

Det effektiva T-tvärsnittet vid stödet har $2b_w = 800$ mm och $b_{eff} = 2 \times 1050 = 2100$ mm. Tvärsnittskonstanter i Stadium I beräknas utifrån det oarmerade betongtvärsnittet (armeringen försummas):

Tvärsnittsarea:

$$A_c = 2b_w \cdot h_w + b_{eff} \cdot h_f = 800 \times 1300 + 2100 \times 220 = 1\,040\,000 + 462\,000 = 1\,502\,000 \text{mm}^2$$

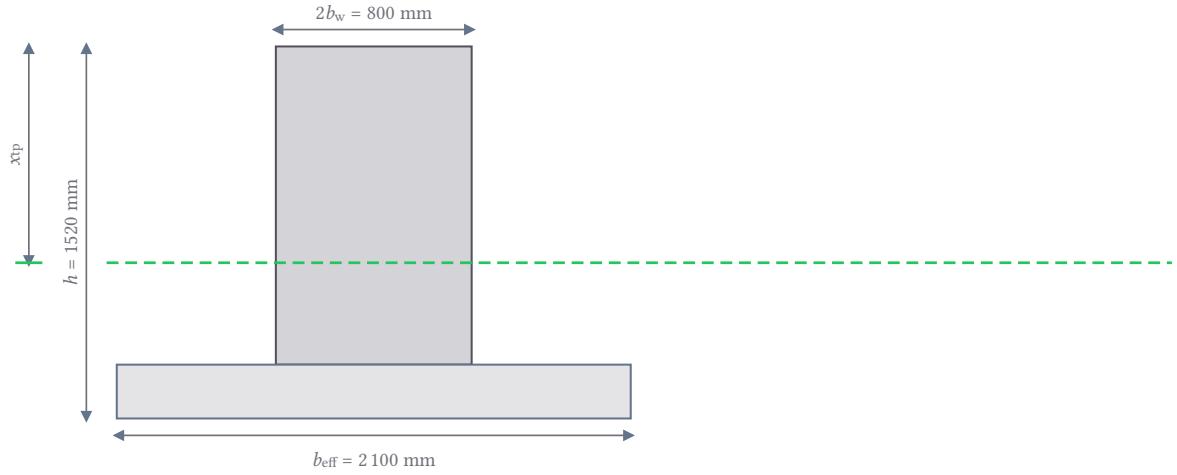
Tyngdpunkt (från överkant):

$$x_{tp} = \frac{A_w \cdot \bar{y}_w + A_f \cdot \bar{y}_f}{A_c} = \frac{1\,040\,000 \times 650 + 462\,000 \times 1410}{1\,502\,000} = \frac{1{,}327 \times 10^9}{1{,}502 \times 10^6} = 884 \text{ mm}$$

Tröghetsmoment – beräknat med Steiners sats (parallellaxelteoremet) för de två rektangulära delarna (liv + fläns):

$$I_c = I_w + I_f = \left(\frac{2b_w \cdot h_w^3}{12} + A_w \cdot e_w^2\right) + \left(\frac{b_{eff} \cdot h_f^3}{12} + A_f \cdot e_f^2\right)$$

Delarna och deras Steinertermer visas i figur U2.26.



Figur U2.26 T-tvärsnittet i stadium I: delarna och deras Steinertermer.

$$I_c = 20{,}33 \times 10^{10} + 12{,}98 \times 10^{10} = 33{,}31 \times 10^{10}\text{mm}^4 = 3{,}331 \times 10^{11}\text{mm}^4$$

Sprickmoment — vid negativt moment uppstår drag i **överkant**, dvs. vid avstånd $x_{tp} = 884$ mm från tyngdpunkten:

$$M_{cr,A} = \frac{f_{ctm,fl} \cdot I_c}{x_{tp}} = \frac{2{,}6 \times 3{,}331 \times 10^{11}}{884} = 980 \text{ kNm}$$

Kontroll (karakteristisk kombination):

$$|M_A| = 2670 \text{ kNm} \quad \gg \quad M_{cr,A} = 980 \text{ kNm}$$

> **Snitt A spricker!** Tvärsnittet är kraftigt uppsprucket. Fortsätt beräkningarna i Stadium II.

3.2 Mittspan (fält, positivt moment)

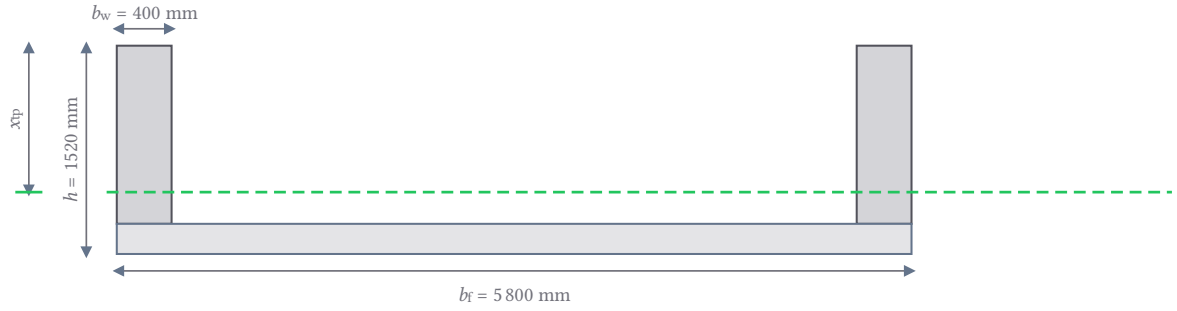
Vid mittspan är hela tvärsnittet effektivt: $2b_w = 800$ mm, $b_{eff} = 5800$ mm.

$$A_c = 800 \times 1300 + 5800 \times 220 = 1\,040\,000 + 1\,276\,000 = 2\,316\,000\text{mm}^2$$

$$x_{tp} = \frac{1\,040\,000 \times 650 + 1\,276\,000 \times 1410}{2\,316\,000} = 1069 \text{ mm från överkant}$$

$$I_c = 2I_w + I_f$$

Motsvarande för U-tvärsnittet visas i figur U2.27.



Figur U2.27 U-tvärsnittet i stadium I: delarna och deras Steinertermer.

$$I_c = 2I_w + I_f = 3{,}288 \times 10^{11} + 1{,}538 \times 10^{11} = 4{,}826 \times 10^{11}\text{mm}^4$$

Sprickmoment — vid positivt moment uppstår drag i **underkant**, dvs. vid avstånd $h - x_{tp} = 1520 - 1069 = 451$ mm från tyngdpunkten:

$$M_{cr,mid} = \frac{f_{ctm,fl} \cdot I_c}{h - x_{tp}} = \frac{2{,}6 \times 4{,}826 \times 10^{11}}{451} = 2782 \text{ kNm}$$

Kontroll (karakteristisk kombination):

$$|M_{mid}| = 1710 \text{ kNm} \quad < \quad M_{cr,mid} = 2782 \text{ kNm}$$

> **Mittspan spricker INTE!** Den breda bottenplattan ($b_{eff} = 5800$ mm) ger ett betydligt större tröghetsmoment och sektionsmodul i underkant, vilket gör tvärsnittet mer sprickmotståndigt vid positivt moment.

Sammanfattning — Sprickkontroll

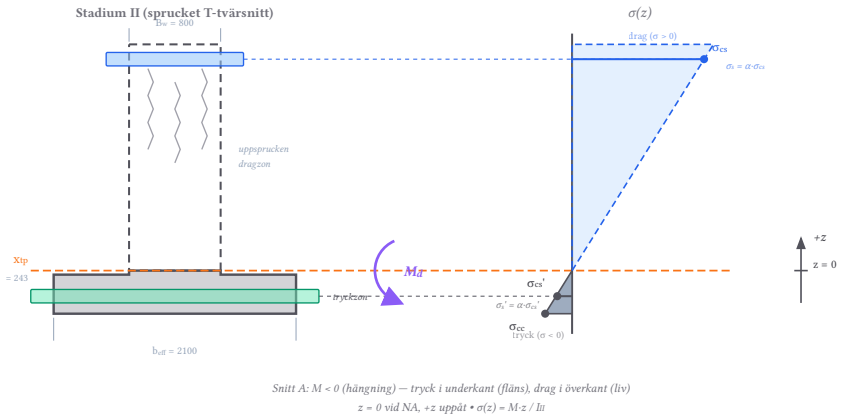
Snitt	M [kNm]	M_{cr} [kNm]	Spricker?
Snitt A (stöd)	2670	980	**Ja**
Mittspan (fält)	1710	2782	**Nej**

4. Analys i Stadium II vid snitt A (stöd)

Även i Stadium II kan spänningarna i det omvandlade betongtvärsnittet beräknas med Naviers formel *(se ekv. (2.41))*:

$$\sigma_c(z) = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot z$$

Spänningsfördelningen i stadium II visas i figur U2.28.



Figur U2.28 Spänningsfördelning i Stadium II — T-tvärsnitt med tryck i underkant (fläns) och drag i överkant (liv)

Tvärsnitt och dimensionerande moment

Vi arbetar med samma **ekvivalenta T-tvärsnitt** som i avsnitt 3, med sammanlagd armering för båda liven. Vid snitt A (negativt moment) uppstår **tryck i underkant** (flänsen/bottenplattan) och **drag i överkant** (liven). Flänsen (b_{eff}) utgör alltså trycksidan — en gynnsam situation som ger bred tryckzon.

Dimensionerande moment (kvasi-permanent kombination, Fråga 2):

$$M_d = |M_A| = 2310 \text{ kNm}$$

T-tvärsnitt (hela bron, båda liven sammanlagda):

Parameter	Värde
Flänsbredd (tryck)	$b_{eff} = 2 \times 1050 = 2100$ mm
Livbredd	$B_w = 2\,b_w = 800$ mm
Flänstjocklek	$h_f = 220$ mm
Totalhöjd	$h = 1520$ mm
Dragarmering	$A_s = 2 \times 3770 = 7540\text{mm}^2$, $d = 1445$ mm
Tryckarmering	$A_s' = 2 \times 905 = 1810\text{mm}^2$, $d' = 110$ mm
Omvandlingsfaktor	$\alpha = 6{,}93$

> **Obs:** d och d' mäts från **tryckrand (underkant)**. Dragarmeringen (livstänger, överkant) ligger vid $d = h - 75 = 1445$ mm och tryckarmeringen (plattstänger, underkant) vid $d' = 110$ mm.

Neutrala lagrets läge

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, dvs. neutrala lagrets läge sammanfaller med tyngdpunkten hos det omvandlade tvärsnittet i Stadium II *(se ekv. (2.37))*. Avståndet x mäts från tryckranden (underkant).

Kontroll: faller x inom flänsen?

Om neutrala lagret ligger inom flänsen ($x \le h_f = 220$ mm) behandlas tvärsnittet som **rektangulärt** med $b = b_{eff}$:

$$\frac{b_{eff}}{2}\,x^2 + \left[(\alpha - 1)\,A_s' + \alpha\,A_s\right] x - \left[(\alpha - 1)\,A_s'\,d' + \alpha\,A_s\,d\right] = 0$$

$$1050\,x^2 + 62\,985\,x - 76\,685\,000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{rekt} \approx 242 \text{ mm}$$

Eftersom $x_{rekt} = 242 > h_f = 220$, ligger neutrala lagret **i livet** — T-tvärsnittets ekvation krävs.

T-tvärsnittsekvation ($x > h_f$)

Jämvikt av statiskt moment kring neutrala lagret (flänsen i tryck, livet sträcker sig uppåt):

$$b_{eff}\,h_f\!\left(x - \tfrac{h_f}{2}\right) + \frac{B_w\,(x - h_f)^2}{2} + (\alpha - 1)\,A_s'\,(x - d') = \alpha\,A_s\,(d - x)$$

Omskrivning till standardform $A\,x^2 + B\,x + C = 0$:

$$A = \frac{B_w}{2} = 400$$

$$B = (b_{eff} - B_w)\,h_f + (\alpha - 1)\,A_s' + \alpha\,A_s = 1300 \times 220 + 10\,733 + 52\,252 = 349\,000$$

$$C = -\left[\frac{(b_{eff} - B_w)\,h_f^2}{2} + (\alpha - 1)\,A_s'\,d' + \alpha\,A_s\,d\right] = -(31{,}5 + 1{,}2 + 75{,}5) \times 10^6 = -108{,}1 \times 10^6$$

Lösning med andragradformeln (positiv rot):

$$x = \frac{-349\,000 + \sqrt{349\,000^2 + 4 \times 400 \times 108{,}1 \times 10^6}}{2 \times 400} = \frac{-349\,000 + \sqrt{1{,}218 \times 10^{11} + 1{,}730 \times 10^{11}}}{800}$$

$$x = \frac{-349\,000 + \sqrt{2{,}948 \times 10^{11}}}{800} = \frac{-349\,000 + 543\,000}{800} = \frac{194\,000}{800} \approx 243 \text{ mm}$$

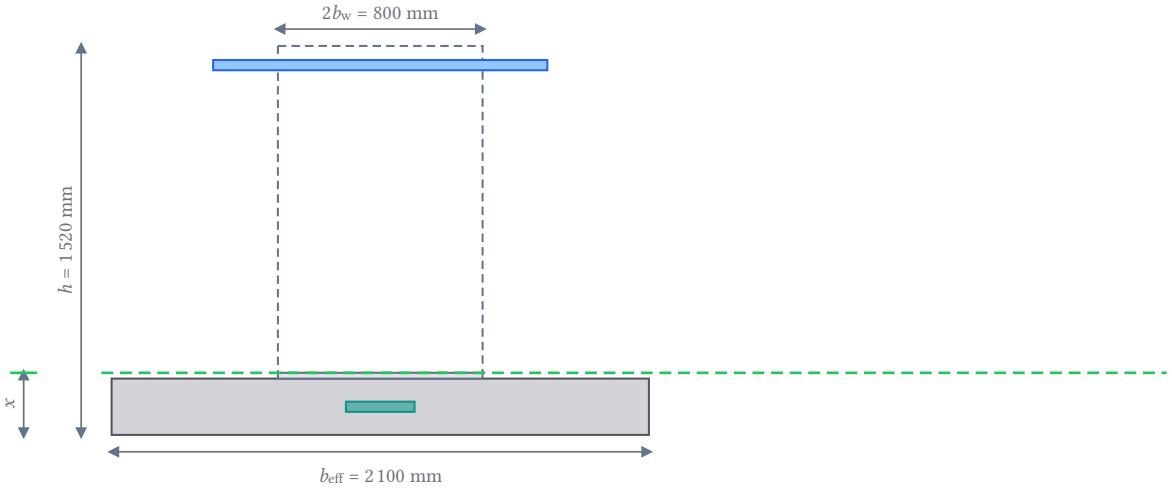
> Neutrala lagret vid $x = 243$ mm (från underkant) bekräftar att det ligger strax ovanför flänsen ($h_f = 220$), dvs. i princip hela flänsbredden utnyttjas i tryck — bara 23 mm av livet ingår i tryckzonen.

Tröghetsmoment I_{II}

Varje tvärsnittsdel bidrar med sitt eget tröghetsmoment plus Steiners sats (parallellaxelteoremet) till neutrala lagret:

$$I_{II} = \underbrace{\frac{b_{eff}\,h_f^3}{12} + b_{eff}\,h_f\left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2}_{\text{fläns (betong)}} + \underbrace{\frac{B_w\,(x-h_f)^3}{3}}_{\text{liv, tryckzon}} + \underbrace{(\alpha-1)\,A_s'\,(x-d')^2}_{\text{tryckstål}} + \underbrace{\alpha\,A_s\,(d-x)^2}_{\text{dragstål}}$$

Delarna i stadium II och deras Steinertermer visas i figur U2.29.



Figur U2.29 T-tvärsnittet i stadium II: delarna och deras Steinertermer.

Del	Beräkning	Bidrag
Fläns (betong)	$\frac{2100\times220^3}{12} + 462\,000 \times 133^2$	$1{,}86\times10^9 + 8{,}17\times10^9 = 1{,}00\times10^{10}$
Liv, tryckzon	$\frac{800\times23^3}{3}$	$3{,}2\times10^6$ *(försumbart)*
Tryckstål	$5{,}93\times1810\times133^2$	$1{,}90\times10^8$
Dragstål	$6{,}93\times7540\times1202^2$	$7{,}55\times10^{10}$
Summa		$I_{II} \approx 8{,}57\times10^{10}\,\text{mm}^4$

> **Dragstålet dominerar** tröghetsmomentet (~88 %) tack vare det stora avståndet ($d - x = 1202$ mm) till neutrala lagret.

Betongspänning

I underkant (tryckrand) är avståndet $z = -x = -243$ mm:

$$\sigma_{cc} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot (-x) = \frac{2310\times10^6}{8{,}57\times10^{10}} \cdot (-243) = -6{,}5\ \text{MPa}$$

Kontroll: $|\sigma_{cc}| = 6{,}5\ \text{MPa} < 0{,}6 \cdot f_{ck} = 0{,}6\times25 = 15{,}0\ \text{MPa}$ ✓

Stålspänning (dragarmering)

Dragarmeringens avstånd från neutrala lagret: $z = d - x = 1445 - 243 = 1202$ mm:

$$\sigma_{cs} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot z = \frac{2310\times10^6}{8{,}57\times10^{10}} \cdot 1202 = 32{,}4\ \text{MPa}$$

Stålspänningen:

$$\sigma_s = \alpha \cdot \sigma_{cs} = 6{,}93 \times 32{,}4 = 225 \text{ MPa}$$

Kontroll: $\sigma_s = 225 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 0{,}8 \times 500 = 400 \text{ MPa}$ ✓

Stålspänning (tryckarmering)
Tryckarmeringens avstånd från neutrala lagret: $z = -(x - d') = -(243 - 110) = -133$ mm:

$$\sigma'_{cs} = \frac{M_d}{I_{II}} \cdot (-133) = \frac{2310 \times 10^6}{8{,}57 \times 10^{10}} \cdot (-133) = -3{,}6 \text{ MPa}$$

Stålspänningen:

$$\sigma'_s = \alpha \cdot \sigma'_{cs} = 6{,}93 \times (-3{,}6) = -24{,}9 \text{ MPa}$$

Kontroll: $|\sigma'_s| = 24{,}9 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ ✓

Sammanfattning — Spänningar i Stadium II

Spänning	Värde	Gräns	Kontroll
σ_{cc} (betong, tryck)	$-6{,}5$ MPa	$0{,}6\, f_{ck} = 15$ MPa	✓
σ_s (stål, drag)	225 MPa	$0{,}8\, f_{yk} = 400$ MPa	✓
σ'_s (stål, tryck)	-25 MPa	$0{,}8\, f_{yk} = 400$ MPa	✓

Alla spänningar är inom tillåtna gränser — tvärsnittet befinner sig i Stadium II med god marginal.

5. Långtidseffekter

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - krympning och krypning)

Förenklad metod — kontroll
Den maximala betongspänningen i Stadium II är $\sigma_c = -6{,}5$ MPa. Villkoret för att den förenklade metoden (tabellvärden) får tillämpas är:

$$|\sigma_c| \leq 0{,}4 \cdot f_{ck} = 0{,}4 \cdot 25 = 10{,}0 \text{ MPa}$$

$$6{,}5 \text{ MPa} < 10{,}0 \text{ MPa} \quad ✓$$

> Villkoret uppfyllt — kryptal och krympvärden kan avläsas direkt från tabellerna 5.2 och 5.3 i SS-EN 1992-1-1:2023.

Nominell tvärsnittsdimension h_0
Den nominella tvärsnittsdimensionen (ekvivalent tjocklek) beräknas som:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}$$

där A_c är betongens tvärsnittsarea och u är omslutande omfång som exponeras för uttorkning. Båda beräknas för **hela U-tvärsnittet** (Stadium I), inte det effektiva tvärsnittet.

Betongens tvärsnittsarea (hela U-tråget):

$$A_c = 2\, b_w \cdot h_w + b_{platta} \cdot h_f = 2 \times 400 \times 1300 + 5800 \times 220 = 1\,040\,000 + 1\,276\,000 = 2\,316\,000 \text{mm}^2$$

Omfång exponerat för uttorkning — samtliga ytor på U-tråget är exponerade (utomhuskonstruktion):

$$u = \underbrace{5800}_{\text{undersida platta}} + \underbrace{2 \times 1520}_{\text{yttre livytor}} + \underbrace{2 \times 400}_{\text{topp av liv}} + \underbrace{2 \times 1300}_{\text{inre livytor}} + \underbrace{5000}_{\text{insida platta}} = 17\,240 \text{ mm}$$

$$h_0 = \frac{2 \times 2\,316\,000}{17\,240} = 269 \text{ mm}$$

> $h_0 = 269$ mm ligger mellan tabellvärdena $h_n = 200$ och $h_n = 500$. Eftersom φ_{35} är lika vid båda dessa h_n-värden (för RH = 80 %) används $h_n = 200$ mm vid tabelluppslag.

Kryptal — Tabell 5.2 (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)
Betong N C25/30, cementklass CN, belastningsålder $t_0 = 28$ d, fuktigt klimat ($RH = 80\%$), $h_n = 200$ mm:

Tabellvärde för $f_{ck} = 35$ MPa: $\varphi_{35} = 1{,}6$

Korrektionsfaktor för $f_{ck} = 25$ MPa:

$$\left(\frac{35}{f_{ck}}\right)^{A} = \left(\frac{35}{25}\right)^{0{,}68} = 1{,}4^{0{,}68} = 1{,}26$$

$$\varphi(50\text{ y}, t_0) = 1{,}6 \cdot 1{,}26 = 2{,}02$$

> Jämfört med torrt inomhusklimat ($RH = 50\%$, $\varphi \approx 2{,}9$) ger utomhusklimatet ($RH = 80\%$) betydligt lägre krypning — uttorkningskrypningen minskar med ökad relativ fuktighet.

Effektiv elasticitetsmodul
Med kryptalet $\varphi = 2{,}02$ fås den effektiva elasticitetsmodulen för långtidsanalys:

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05 \cdot E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{1{,}05 \cdot 28{,}9}{1 + 2{,}02} = \frac{30{,}3}{3{,}02} = 10{,}0\text{ GPa}$$

$$\alpha_{eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{10{,}0} = 20{,}0$$

Krympning — Tabell 5.3 (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)
Betong N C25/30, cementklass CN, fuktigt klimat ($RH = 80\%$), $h_n = 200$ mm:

Avläst ur tabell (linjärt interpolerat mellan $f_{ck} = 20$ och $f_{ck} = 35$ MPa):

$$\varepsilon_{cs,50y} = 0{,}36\text{ ‰}$$

> Vid $RH = 80\%$ halveras ungefär krympningen jämfört med $RH = 50\%$ ($\varepsilon_{cs} = 0{,}63$ ‰). Fuktigheten begränsar uttorkningskrympningens bidrag.

Krympningskrafter
Krympningen orsakar tvångskrafter i armeringen. Varje armeringslager bidrar med en ekvivalent normalkraft som verkar som **drag** på betongtvärsnittet. Armeringsareorna avser hela bron (båda liven):

$$F_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A_s = 72 \cdot 7540 = 542{,}9\text{ kN} \quad \text{(dragarmering)}$$

$$F'_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A'_s = 72 \cdot 1810 = 130{,}3\text{ kN} \quad \text{(tryckarmering)}$$

där $E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} = 200\,000 \cdot 0{,}36 \cdot 10^{-3} = 72$ MPa.

Total ekvivalent normalkraft från krympning:

$$N_{cs} = F_{cs} + F'_{cs} = 542{,}9 + 130{,}3 = 673{,}2\text{ kN}$$

6. Analys i Stadium II med långtidseffekter

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - böjspruckna tvärsnitt)

Med hänsyn till krypning och krympning används $\alpha_{eff} = 20{,}0$ i stället för $\alpha = 6{,}93$. Krympningskrafterna F_{cs} och F'_{cs} adderas som ekvivalenta yttre krafter i Naviers formel:

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{N_{eff}}{A_{II,eff}} + \frac{M_{d,eff}}{I_{II,eff}} \cdot z$$

där z mäts från tyngdpunkten av det omvandlade tvärsnittet (positiv mot dragsidan, dvs. uppåt). Inget yttre normalkraft verkar ($N_l = 0$), så:

$$N_{eff} = N_{cs} = 673{,}2 \text{ kN (drag)}$$

$$M_{d,eff} = M_d + F_{cs} \cdot (d - x_{tp,eff}) + F'_{cs} \cdot (d' - x_{tp,eff})$$

> **Obs:** Eftersom krympningen ger en nettodragkraft sammanfaller inte neutrallagret med tyngdpunkten — ett iterativt förfarande krävs ($x \neq x_{tp}$). x anger djupet av tryckzonen (mätt från underkant/tryckrand), och iterationen konvergerar när beräknat nollspänningsläge överensstämmer med antaget x.

Stålspänningarna beräknas med hänsyn till den fria krympningens bidrag:

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs}$$

Iterativ analys

Iteration 1: $x = 400$ mm (ren böjning med α_{eff})
Startgissningen baseras på ren böjning ($N_{cs} = 0$) med $\alpha_{eff} = 20{,}0$ — tyngdpunktsekvationen för T-tvärsnittet ger $x \approx 400$ mm. Eftersom $x > h_f = 220$ ligger tryckzonen i både fläns och liv.

Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II,eff} = \underbrace{b_{eff} \cdot h_f}_{462\,000} + \underbrace{B_w \cdot (x - h_f)}_{144\,000} + \underbrace{(\alpha_{eff} - 1)\, A'_s}_{34\,390} + \underbrace{\alpha_{eff}\, A_s}_{150\,800} = 791\,190 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{462\,000 \times 110 + 144\,000 \times 310 + 34\,390 \times 110 + 150\,800 \times 1445}{791\,190} = \frac{317{,}1 \times 10^6}{791\,190} = 401 \text{ mm}$$

Del	$\boldsymbol{I_0 + A \cdot e^2}$	**Bidrag**
Fläns	$\frac{2100 \cdot 220^3}{12} + 462\,000 \cdot 291^2$	$41{,}0 \times 10^9$
Liv (tryckzon)	$\frac{800 \cdot 180^3}{12} + 144\,000 \cdot 91^2$	$1{,}6 \times 10^9$
Tryckstål	$19 \cdot 1810 \cdot 291^2$	$2{,}9 \times 10^9$
Dragstål	$20 \cdot 7540 \cdot 1044^2$	$164{,}4 \times 10^9$
Summa		$I_{II,eff} \approx 210 \times 10^9 \text{mm}^4$

Ekvivalent moment kring tyngdpunkten:

$$M_{d,eff} = 2310 \times 10^6 + 542{,}9 \times 10^3 \cdot (1445 - 401) + 130{,}3 \times 10^3 \cdot (110 - 401)$$

$$= 2310 \times 10^6 + 567 \times 10^6 - 38 \times 10^6 = 2839 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid antaget neutrallager ($z = x - x_{tp,eff} = 400 - 401 = -1$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{673{,}2 \times 10^3}{791\,190} + \frac{2839 \times 10^6}{210 \times 10^9} \cdot (-1) = 0{,}85 - 0{,}01 = +0{,}84 \text{ MPa} \neq 0$$

> Spänningen vid antaget neutrallager är $+0{,}84$ MPa (drag), vilket innebär att tryckzonen inte sträcker sig ända till $x = 400$. Krympningens nettodragkraft lyfter neutrallagret mot tryckranden.

Det teoretiska nollspänningsläget:

$$z_0 = -\frac{N_{eff}/A_{II,eff}}{M_{d,eff}/I_{II,eff}} = -\frac{0{,}85}{13{,}5 \times 10^{-3}} = -63 \text{ mm}$$

$$x = x_{tp,eff} + z_0 = 401 - 63 = 338 \approx 335 \text{ mm}$$

Iteration 2: $x = 335$ mm

Tvärsnittskonstanter ($x - h_f = 115$ mm av livet i tryck):

$$A_{II,eff} = 462\,000 + 800 \cdot 115 + 34\,390 + 150\,800 = 739\,190 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{462\,000 \times 110 + 92\,000 \times 277{,}5 + 34\,390 \times 110 + 150\,800 \times 1445}{739\,190} = \frac{298{,}0 \times 10^6}{739\,190} = 403 \text{ mm}$$

Del	**Bidrag**
Fläns	$41{,}5 \times 10^9$
Liv (tryckzon)	$1{,}6 \times 10^9$
Tryckstål	$3{,}0 \times 10^9$
Dragstål	$163{,}7 \times 10^9$
Summa	$I_{II,eff} \approx 210 \times 10^9 \text{mm}^4$

Ekvivalent moment:

$$M_{d,eff} = 2310 \times 10^6 + 542{,}9 \times 10^3 \cdot 1042 + 130{,}3 \times 10^3 \cdot (-293) = 2838 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid antaget neutrallager ($z = 335 - 403 = -68$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{673{,}2 \times 10^3}{739\,190} + \frac{2838 \times 10^6}{210 \times 10^9} \cdot (-68) = 0{,}91 - 0{,}92 = -0{,}01 \text{ MPa} \approx 0$$

> Spänningen vid antaget neutrallager är i praktiken noll – gissningen $x = 335$ mm ger tillräcklig noggrannhet.

Spänningar i Stadium II med långtidseffekter

Med $x = 335$ mm, $x_{tp,eff} = 403$ mm, $A_{II,eff} = 739\,190 \text{mm}^2$, $I_{II,eff} = 210 \times 10^9 \text{mm}^4$:

Betongspänning i underkant (tryckrand, $z = -x_{tp,eff} = -403$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{673{,}2 \times 10^3}{739\,190} + \frac{2838 \times 10^6}{210 \times 10^9} \cdot (-403) = 0{,}91 - 5{,}44 = -4{,}5 \text{ MPa}$$

Kontroll: $|\sigma_{c,\infty}| = 4{,}5 \text{ MPa} < 0{,}6 \cdot f_{ck} = 15{,}0 \text{ MPa}$ ✓

Armeringsspänning – dragarmering ($z = d - x_{tp,eff} = 1445 - 403 = 1042$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(1042) = 0{,}91 + 13{,}5 \times 10^{-3} \cdot 1042 = 0{,}91 + 14{,}1 = 15{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 20{,}0 \times 15{,}0 - 72 = 300 - 72 = 228 \text{ MPa}$$

Kontroll: $\sigma_s = 228 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ ✓

Armeringsspänning – tryckarmering ($z = d' - x_{tp,eff} = 110 - 403 = -293$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(-293) = 0{,}91 + 13{,}5 \times 10^{-3} \cdot (-293) = 0{,}91 - 3{,}96 = -3{,}1 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z'_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 20{,}0 \times (-3{,}1) - 72 = -62 - 72 = -134 \text{ MPa}$$

Kontroll: $|\sigma'_s| = 134 \text{ MPa} < 0{,}8 \cdot f_{yk} = 400 \text{ MPa}$ ✓

Sammanfattning

Spänning	**Korttid (Avsnitt 4)**	**Långtid (Avsnitt 6)**
σ_c (underkant, tryck)	$-6{,}5$ MPa	$-4{,}5$ MPa
σ_s (dragarmering)	225 MPa	228 MPa
σ'_s (tryckarmering)	-25 MPa	-134 MPa

> **Slutsats:** Krypningen orsakar en omfördelning av spänningar från betongen till armeringen. Betongspänningen i tryckranden minskar ($-6{,}5 \rightarrow -4{,}5$ MPa), medan tryckarmeringen tar upp betydligt mer kraft ($-25 \rightarrow -134$ MPa). Krympningens direkta bidrag ($-E_s \cdot \varepsilon_{cs} = -72$ MPa) dominerar ökningen i tryckarmeringsspänningen.

7. Kontroll av sprickbredd

(Se relaterad teori: Beräkning av sprickbredd)

Sprickbredden kontrolleras vid snitt A (stöd) under kvasi-permanent lastkombination. Kravet, med hänsyn till exponeringsklass XS2 och livslängdsklass L50, är:

$$w_{k,\mathrm{cal}} \leq w_{k,\mathrm{till}} = 0{,}20 \text{ mm}$$

Den beräknade sprickbredden bestäms enligt EC2:2023, ekvation (9.8): (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

$$w_{k,\mathrm{cal}} = k_w \cdot k_{1/r} \cdot s_{\mathrm{r,m,cal}} \cdot (\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}})$$

Beräkningen genomförs **per balk** (ett liv, $b_w = 400$ mm) med dragarmering i överkant.

7.1 Medelsprickavstånd $s_{\mathrm{r,m,cal}}$ (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

Medelsprickavståndet bestäms ur (9.15): (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

$$s_{\mathrm{r,m,cal}} = 1{,}5 \cdot c + \frac{k_{\mathrm{fl}} \cdot k_b}{7{,}2} \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,\mathrm{eff}}} \leq \frac{1{,}3}{k_w}(h - x)$$

Täckskikt och armeringsdata

Dragarmeringen (livstänger i överkant) har lag 1 vid 50 mm, lag 2 vid 100 mm — båda med ø20:

$$c = 50 - \frac{20}{2} = 40 \text{ mm}, \quad \phi = 20 \text{ mm}$$

Vidhäftningsförhållanden

Dragarmeringen ligger i överkant av tvärsnittet med mer än 250 mm betong nedanför under gjutningen ($h = 1520$ mm). Enligt EC2 §8.4.2 ger detta **dåliga vidhäftningsförhållanden**:

$$k_b = 1{,}2 \quad (\text{dåliga vidhäftningsförhållanden, ekv. } 9\mathrm{mathord}[,];18)$$

(→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

Effektiv draget betongarea

Höjden av den effektiva dragna zonen (överkant = dragsida):

$$h_{c,\mathrm{eff}} = \min\left(2{,}5 \cdot a_y;\ \frac{h - x}{3};\ \frac{h}{2}\right)$$

Med $a_y = 75$ mm (tyngdpunkt dragarmering från överkant) och $x = 243$ mm (tryckzonens djup från underkant, avsnitt 4):

$$h_{c,\mathrm{eff}} = \min\left(2{,}5 \times 75;\ \frac{1520 - 243}{3};\ \frac{1520}{2}\right) = \min(187{,}5;\ 426;\ 760) = 187{,}5 \text{ mm}$$

Den effektiva dragna betongarean per balk:

$$A_{c,\mathrm{eff}} = h_{c,\mathrm{eff}} \times b_w = 187{,}5 \times 400 = 75\,000 \mathrm{mm}^2$$

Det effektiva armeringsinnehållet:

$$\rho_{p,\mathrm{eff}} = \frac{A_s}{A_{c,\mathrm{eff}}} = \frac{3770}{75\,000} = 0{,}0503$$

Koefficient k_{fl}

Eftersom tvärsnittet inte är rektangulärt används den allmänna formen (9.17): (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

$$k_{\mathrm{fl}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h - x_g - h_{c,\mathrm{eff}}}{h - x_g}\right)$$

där $x_g = 636$ mm (neutrala axelns läge i osprucket tvärsnitt, mätt från tryckrand/underkant, se avsnitt 3.1: $x_g = h - x_{tp} = 1520 - 884 = 636$ mm):

$$k_{\mathrm{fl}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1520 - 636 - 187{,}5}{1520 - 636}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{696{,}5}{884}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}788) = 0{,}894$$

Beräknat medelsprickavstånd

$$s_{\mathrm{r,m,cal}} = 1{,}5 \times 40 + \frac{0{,}894 \times 1{,}2}{7{,}2} \times \frac{20}{0{,}0503} = 60 + 0{,}149 \times 397{,}6 = 60 + 59 = 119 \text{ mm}$$

Kontroll av övre gräns ($k_w = 1{,}7$):

$$\frac{1{,}3}{k_w}(h - x) = \frac{1{,}3}{1{,}7} \times 1277 = 977 \text{ mm}$$

$$s_{\mathrm{r,m,cal}} = 119 \text{ mm} \leq 977 \text{ mm} \quad \checkmark$$

7.2 Töjningsskillnad $(\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}})$ (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

Töjningsskillnaden bestäms från (9.11) (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3) med $\sigma_s = 228$ MPa (från avsnitt 6, kvasi-permanent kombination med långtidseffekter):

$$\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}} = \frac{\sigma_s - k_t \dfrac{f_{ct,\mathrm{eff}}}{\rho_{p,\mathrm{eff}}}\left(1 + \alpha_e \rho_{p,\mathrm{eff}}\right)}{E_s}$$

Med:

- $k_t = 0{,}4$ *(långvarig last, stabiliserad sprickbildning)*
- $f_{ct,\mathrm{eff}} = f_{ctm} = 2{,}6$ MPa
- $\alpha_e = E_s / E_{cm} = 200 / 28{,}9 = 6{,}93$

$$\frac{f_{ct,\mathrm{eff}}}{\rho_{p,\mathrm{eff}}}\left(1 + \alpha_e \rho_{p,\mathrm{eff}}\right) = \frac{2{,}6}{0{,}0503}(1 + 6{,}93 \times 0{,}0503) = 51{,}7 \times 1{,}349 = 69{,}7 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}} = \frac{228 - 0{,}4 \times 69{,}7}{200\,000} = \frac{228 - 27{,}9}{200\,000} = \frac{200{,}1}{200\,000} = 1{,}00 \times 10^{-3}$$

Kontroll av undre gräns:

$$(1 - k_t)\,\frac{\sigma_s}{E_s} = 0{,}6 \times \frac{228}{200\,000} = 0{,}684 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}} = 1{,}00 \times 10^{-3} \geq 0{,}684 \times 10^{-3} \quad \checkmark$$

7.3 Krökning och beräknad sprickbredd

Krökningsfaktorn från (9.9) (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3) med $x = 243$ mm (tryckzonens djup, avsnitt 4):

$$k_{1/r} = \frac{h - x}{h - a_{y,i} - x} = \frac{1520 - 243}{1520 - 75 - 243} = \frac{1277}{1202} = 1{,}062$$

Den beräknade sprickbredden vid ytan (9.8): (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

$$w_{k,\mathrm{cal}} = k_w \cdot k_{1/r} \cdot s_{\mathrm{r,m,cal}} \cdot (\varepsilon_{\mathrm{sm}} - \varepsilon_{\mathrm{cm}})$$

$$= 1{,}7 \times 1{,}062 \times 119 \times 1{,}00 \times 10^{-3} = 0{,}215 \text{ mm}$$

7.4 Kontroll

Parameter	Värde
Medelsprickavstånd $s_{\mathrm{r,m,cal}}$	119 mm
Töjningsskillnad	$1{,}00 \times 10^{-3}$
Krökningsfaktor $k_{1/r}$	1,062
Beräknad sprickbredd $w_{k,\mathrm{cal}}$	**0,22 mm**
Tillåten sprickbredd $w_{k,\mathrm{till}}$	0,20 mm

$$w_{k,\mathrm{cal}} = 0{,}22 \text{ mm} > w_{k,\mathrm{till}} = 0{,}20 \text{ mm} \quad \textbf{UPPFYLLS EJ!}$$

> **Slutsats:** Tvärsnittet **uppfyller inte** kravet på begränsning av sprickbredder i brukgränstillstånd. Sprickbredden överskrider den tillåtna gränsen med ca 10%. Den dåliga vidhäftningssituationen ($k_b = 1{,}2$) för dragarmeringen i överkant bidrar till det höga sprickavståndet. För att minska sprickbredden — och därmed möjliggöra uppgraderingen till motortrafik — kan t.ex. tillägg av finare armering (ø12 eller ø16) i överkant övervägas, vilket skulle öka $\rho_{p,\mathrm{eff}}$ och minska $s_{\mathrm{r,m,cal}}$.

Uppgift 2.5 Nedböjning hos balk med normalkraft

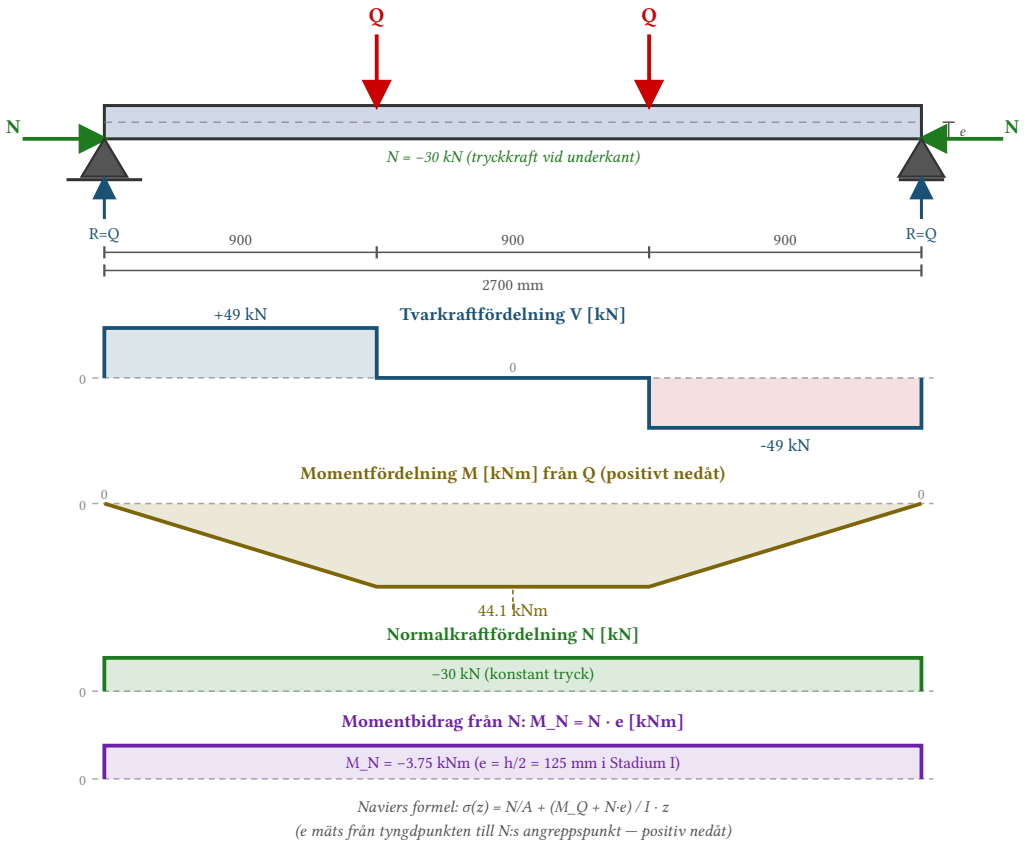
Beräkningsgång

1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last
2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Tvärsnittkonstanter i Stadium I, ren böjning** - Beräkna tvärsnittsarean A_I och tröghetsmomentet I_I för det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet
4. **Nedböjning i Stadium I** - Beräkna nedböjningen i Stadium I med hjälp av elementarfall
5. **Tvärsnittkonstanter i Stadium II, ren böjning** - Beräkna tvärsnittsarean A_{II} och tröghetsmomentet I_{II} för det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet
6. **Nedböjning i Stadium II** - Beräkna nedböjningen i Stadium II med hjälp av elementarfall
7. **Nedböjning i Stadium II (grafisk metod)** - Beräkna nedböjningen i Stadium II med hjälp av grafiska metoden
8. **Tvärsnittkonstanter i Stadium II, böjning och normalkraft** - Beräkna tvärsnittsarean A_{II}, tröghetsmomentet I_{II} och e_{II} för det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet
9. **Nedböjning i Stadium II (grafisk metod)** - Beräkna nedböjningen i Stadium II med hjälp av grafiska metoden

1. Lasteffekt

Balken är fritt upplagd med spännvidd $L = 2700$ mm och belastad med två punktlaster Q i en 4-punktsböjning, placerade vid 900 mm från vardera stöd ($a = 900$ mm). Stöden är ledat upplagda, vilket innebär att momentet vid stöden är noll och ökar linjärt till punktlasterna. På grund av lastsetupets symmetri är zonen mellan punktlasterna utsatt för konstant böjmoment och noll tvärkraft.

Strukturmodellen med tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.32.



Figur U2.32 Strukturmodell med tvärkraft- och momentdiagram

Jämviktsanalys ger reaktionskrafterna $R_A = R_B = Q$ (symmetri). Tvärkraft- och momentfördelningen längs balken:

$$V(x) = \begin{cases} +Q & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x \le L - a \\ -Q & L - a < x \le L \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} Q \cdot x & 0 \le x \le a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) = Q \cdot a & a \le x \le L - a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) - Q \cdot (x - (L - a)) = Q \cdot (L - x) & L - a \le x \le L \end{cases}$$

där $a = 0{,}9$ m och $L = 2{,}7$ m.

Beräkna det verkande momentet för $Q = 0{,}7 \cdot Q_{\text{brott}} = 0{,}7 \cdot 70 = 49$ kN i mitten av fältet:

$$M_d = Q \cdot a = 49 \text{ kN} \cdot 0{,}9 \text{ m} = 44{,}1 \text{ kNm}$$

Normalkraftens bidrag $N \cdot e$ läggs till separat i Naviers formel (e_I i stadium I, e_{II} i stadium II).

2. Geometri och materialegenskaper

Geometri

- $b = 200$ mm, $h = 250$ mm
- $d' = 34$ mm, $d = 214$ mm
- $\phi_p = 10$ mm (Överkantsarmering), $\phi = 16$ mm (Underkantsarmering)

Armeringsareor

$$A_s = 3 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 603{,}186\text{mm}^2, A_s' = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \phi_p^2}{4} = 157{,}08\text{mm}^2$$

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong

- $f_{cm} = 50$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ck} = f_{cm} - 8$ MPa $= 42$ MPa *(medelhållfasthet minus standardavvikelse)*
- $f_{ctm} = 3$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = 37$ GPa _(modul för betong i bruksstadiet, kan beräknas enligt EC2 som $E_{cm} = k*E \cdot f*cm^{1/3}$ där $k_E = 9000$)_

Armering B500S / B500B

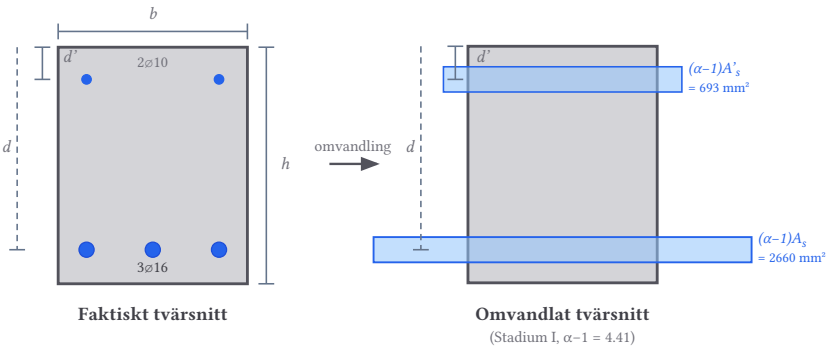
- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = 5{,}41$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I - Tvärsnittkonstanter vid ren böjning

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringsstång ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen. Det omvandlade tvärsnittet består alltså enbart av betong och kan analyseras med klassisk tvärsnittsteori *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Det faktiska och det omvandlade tvärsnittet visas i figur U2.33.



Figur U2.33 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, alltså kan x lösas med tyngdpunktsekvation *(se ekv. (2.29)).*

Inverkan av armeringen på tvärsnittets tyngdpunkt kan försummas i Stadium I, således kan x och I beräknas baserat på oarmerat betongtvärsnitt:

$$x_{tp} \approx x_c = \frac{h}{2} \quad \text{i Stadium I}$$

Därför z i Naviers formel kan sättas till $z = h - x_{tp} = 250\ \text{mm} - 125\ \text{mm} = 125\ \text{mm}$, och e_I kan sättas till $e_I = h - x_{tp} = 125\ \text{mm}$.

Troghetsmomentet och tvärsnittsarea i Stadium I (I_I och A_I) kan beräknas som tröghetsmomentet och tvärsnittsarean för det oarmerade betongtvärsnittet:

$$I_I \approx I_c = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 250^3 = 2{,}604 \cdot 10^{-4}\text{m}^4 \quad \text{i Stadium I}$$

$$A_I = b \cdot h = 200 \cdot 250 = 50000\text{mm}^2 = 5 \cdot 10^{-2}\text{m}^2 \quad \text{i Stadium I}$$

4. Nedböjning i Stadium I med hjälp av elementarfall

Nedböjningen i Stadium I kan beräknas med hjälp av elementarfall för en fritt upplagd balk med två lika stora punktlaster placerade symmetriskt. Nedböjningen i mitten av fältet kan beräknas med formeln:

$$\delta_I = \frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4a^2)}{24 \cdot E_{cm} \cdot I_I}$$

Där $Q = 49$ kN, $a = 0{,}9$ m, $L = 2{,}7$ m, $E_{cm} = 37$ GPa och $I_I = 2{,}604 \cdot 10^{-4}\text{m}^4$.

Beräkna nedböjningen i Stadium I:

$$\delta_I = \frac{49 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot (3 \cdot 2{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}9^2)}{24 \cdot 37 \cdot 10^9 \cdot 2{,}604 \cdot 10^{-4}} = 0{,}00355 \text{ m} = 3{,}55 \text{ mm}$$

5. Stadium II - Tvärsnittkonstanter vid sprickbildning och ren böjning

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - spruckna tvärsnitt)

I Stadium II har sprickbildning inträffat, vilket innebär att det nedre delen av betongen inte längre bidrar till tvärsnittets styvhet. Det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet i Stadium II består av den övre delen av betongen (ovanför sprickgränsen) och armeringen, där armeringen omvandlas till ekvivalent betongarea.

Ren böjning innebär att $x = x_{TP}$, dvs. från horisontell jämvikt *(se ekv. (2.37))* sammanfaller neutrala lagrets läge med tyngdpunkten hos det omvandlade tvärsnittet i Stadium II. Neutrala lagrets läge beräknas ur:

$$\frac{b \cdot x^2}{2} + (\alpha - 1)A_s'(x - d') - \alpha A_s(d - x) = 0$$

Expandera och samla termer i standardform $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\frac{b}{2}\,x^2 + \left[(\alpha - 1)A_s' + \alpha A_s\right] x - \left[(\alpha - 1)A_s' d' + \alpha A_s d\right] = 0$$

med koefficienterna:

$$A = \frac{b}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

$$B = (\alpha - 1)A_s' + \alpha A_s = 4{,}41 \cdot 157{,}08 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 = 693{,}1 + 3263{,}2 = 3956{,}4\text{mm}^2$$

$$C = -\left[(\alpha - 1)A_s' d' + \alpha A_s d\right] = -\left[4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot 34 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot 214\right] = -722\,099\text{mm}^3$$

Lösning med andragradformeln (positiv rot):

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{3956{,}4^2 + 4 \cdot 100 \cdot 722\,099}}{2 \cdot 100}$$

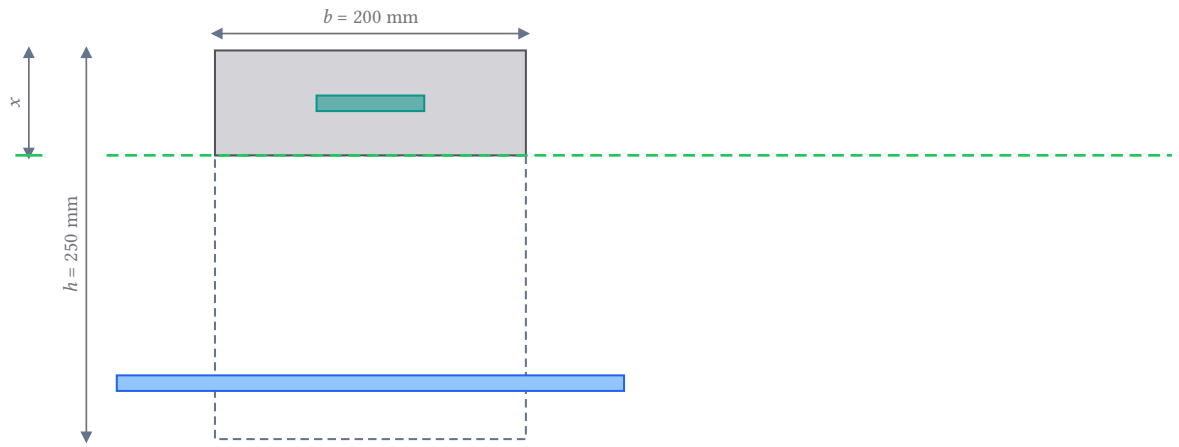
$$x = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{15{,}65 \cdot 10^6 + 288{,}84 \cdot 10^6}}{200} = \frac{-3956{,}4 + \sqrt{304{,}49 \cdot 10^6}}{200} = \frac{-3956{,}4 + 17\,450}{200}$$

$$x_{TP} = \frac{13\,494}{200} \approx 67{,}5 \text{ mm} = 0{,}0675 \text{ m}$$

Sätt $x = x_{TP}$.

Beräkning av tröghetsmoment i stadium II (I_{II}):

Delarna och deras Steinertermer visas i figur U2.34.



Figur U2.34 Tröghetsmomentet I_{II} för det spruckna tvärsnittet: delarna och deras Steinertermer.

Varje tvärsnittsdel bidrar med sitt eget tröghetsmomentet kring den egna tyngdpunkten (TP) plus Steiners sats (parallellaxelteoremet) till tyngspunkten för det omvandlade tvärsnittet (neutrala lagret):

- **Betong** (tryckzon): $I_{c,eg} = \frac{b \cdot x^3}{12}$, Steiner $= b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow$ totalt $= \frac{b \cdot x^3}{3}$
- **Stål** (A_s', A_s): $I_{s,eg} \approx 0$ (punktformiga), bidrar enbart via Steiner $= A_s \cdot e^2$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x^3}{3} + (\alpha - 1) A_s'(x - d')^2 + \alpha A_s(d - x)^2$$

$$= \frac{0{,}200 \cdot 0{,}0675^3}{3} + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \times 10^{-6} \cdot (0{,}0675 - 0{,}034)^2 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \times 10^{-6} \cdot (0{,}214 - 0{,}0675)^2$$

$$= 2{,}050 \times 10^{-5} + 7{,}774 \times 10^{-7} + 7{,}004 \times 10^{-5} = 9{,}132 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

6. Nedböjning i Stadium II med hjälp av elementarfall

Nedböjningen i Stadium II kan beräknas med hjälp av elementarfall för en fritt upplagd balk med två lika stora punktlaster placerade symmetriskt. Nedböjningen i mitten av fältet kan beräknas med formeln:

$$\delta_{II} = \frac{Q \cdot a \cdot (3L^2 - 4a^2)}{24 \cdot E_{cm} \cdot I_{II}}$$

Där $Q = 49$ kN, $a = 0{,}9$ m, $L = 2{,}7$ m, $E_{cm} = 37$ GPa och $I_{II} = 9{,}132 \times 10^{-5} \text{m}^4$.

Beräkna nedböjningen i Stadium II:

$$\delta_{II} = \frac{49 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot (3 \cdot 2{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}9^2)}{24 \cdot 37 \cdot 10^9 \cdot 9{,}132 \times 10^{-5}} = 0{,}01013 \text{ m} = 10{,}13 \text{ mm}$$

7. Nedböjning i Stadium II med hjälp av grafiska metoden

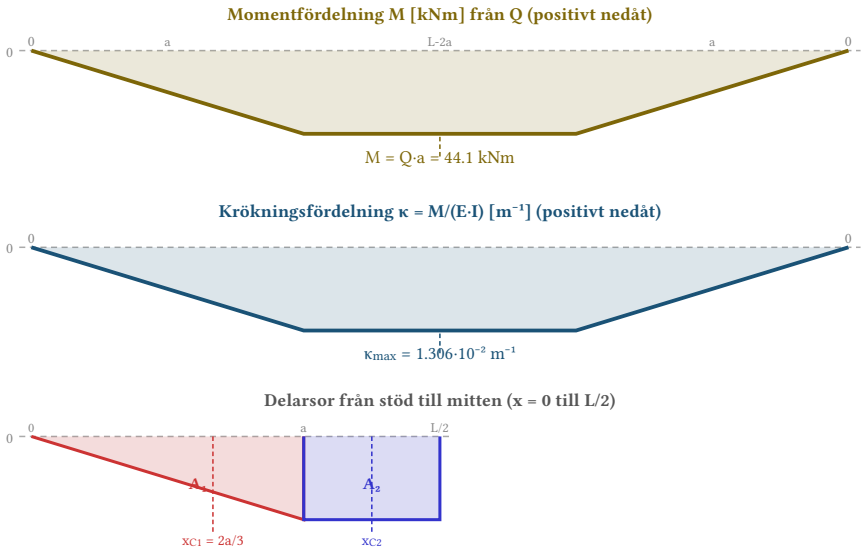
Med hjälp av Naviers formel kan krökningen i Stadium II beräknas som:

$$\kappa_{II}(x) = \frac{1}{r}(x) = \frac{M_d(x)}{E_{cm} \cdot I_{II}}$$

Där M_d är det verkande momentet i Stadium II, $E_{cm} = 37$ GPa och $I_{II} = 9{,}132 \times 10^{-5} \text{m}^4$.

Krökningsfördelningen längs balken beskrivs proportionellt av momentfördelningen, där krökningen är som störst i mitten av fältet (där momentet är som störst) och noll vid stöden (där momentet är noll).

Moment- och krökningsfördelningen med delareorna för den grafiska metoden visas i figur U2.35.



Figur U2.35 Moment- och krökningsfördelning vid ren böjning, med delarsor för grafiska metoden

Enligt grafiska metoden (B8-22) kan nedböjningen i mitten av fältet beräknas som integralen av krökningen multiplicerad med hävarmen x från stödet:

$$\delta_{II} = f\left(\frac{L}{2}\right) = \int_0^{L/2} \kappa_{II}(x) \cdot x \, dx$$

Denna integral kan tolkas som summan av delarean A_i av krökningsdiagrammet (från stöd till mitten) multiplicerad med avståndet x_{Ci} från stödet till delareans tyngdpunkt (B8-24):

$$\delta_{II} = \sum_i A_i \cdot x_{Ci}$$

Där $\kappa_{II,max}$ är krökningen i mitten av fältet, där momentet är som störst:

$$\kappa_{II,max} = \frac{M_d}{E_{cm} \cdot I_{II}} = \frac{49 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9}{37 \cdot 10^9 \cdot 9{,}132 \times 10^{-5}} = 1{,}305 \cdot 10^{-2} \text{m}^{-1}$$

Krökningsdiagrammet från stöd ($x = 0$) till mitten ($x = L/2$) delas i två delar:

1. Triangel

($0 \leq x \leq a$): krökning ökar linjärt från 0 till κ_{max}

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \kappa_{max} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}305 \cdot 10^{-2} = 5{,}873 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x_{C1} = \frac{2a}{3} = \frac{2 \cdot 0{,}9}{3} = 0{,}600 \text{ m}$$

2. Rektangel

($a \leq x \leq L/2$): krökning konstant κ_{max}

$$A_2 = \left(\frac{L}{2} - a\right) \cdot \kappa_{max} = (1{,}35 - 0{,}9) \cdot 1{,}305 \cdot 10^{-2} = 5{,}873 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x_{C2} = a + \frac{L/2 - a}{2} = 0{,}9 + \frac{0{,}45}{2} = 1{,}125 \text{ m}$$

Summa:

$$\delta_{II} = A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} = 5{,}873 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}600 + 5{,}873 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}125$$

$$= 3{,}524 \cdot 10^{-3} + 6{,}607 \cdot 10^{-3} = 0{,}01013 \text{ m} = 10{,}13 \text{ mm}$$

> **Kontroll:** Grafiska metoden ger $\delta_{II} = 10{,}13$ mm, samma som elementarfallet. ✓

8. Tvärsnittkonstanter i Stadium II med normalkraft

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - spruckna tvärsnitt)

När tvärsnittet är sprucket och utsatt med normalkraft och moment kan inte neutrallagrets läge x antas vara lika med tyngdpunkten x_{tp}, utan måste lösas iterativt så att spänningen i det mest dragna fibret är noll. Detta innebär att det ekvivalenta betongtvärsnittets storlek inte är känd i förväg, och därmed inte heller tvärsnittsarean A_{II}, tröghetsmomentet I_{II} eller avståndet e_{II}.

Iterativ analys med hjälp av Naviers formel

Steg 1: Gissa x

Första gissning: $x = 71$ mm (föreslagen i uppgiftens tips)

Steg 2: Beräkna tvärsnittskonstanter från gissning

$$A_{II} = A_{cc} + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s = b \cdot x + (\alpha - 1)A'_s + \alpha A_s$$

$$= 200 \cdot 71 + (5{,}41 - 1) \cdot 157{,}08 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 = 18156\text{mm}^2$$

$$x_{tp} = \frac{b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot d' + \alpha \cdot A_s \cdot d}{A_{II}}$$

$$= \frac{200 \cdot 71 \cdot 35{,}5 + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot 34 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot 214}{18156} = 67{,}5 \text{ mm}$$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2} - x_{tp}\right)^2 + (\alpha - 1) \cdot A'_s \cdot (x_{tp} - d')^2 + \alpha \cdot A_s \cdot (d - x_{tp})^2$$

$$= \frac{200 \cdot 71^3}{12} + 200 \cdot 71 \cdot (35{,}5 - 67{,}5)^2 + 4{,}41 \cdot 157{,}08 \cdot (67{,}5 - 34)^2 + 5{,}41 \cdot 603{,}186 \cdot (214 - 67{,}5)^2$$

$$= 9{,}132 \cdot 10^7 \text{mm}^4 = 9{,}132 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

$$e_{II} = h - x_{tp} = 250 - 67{,}5 = 182{,}5 \text{ mm}$$

Steg 3: Beräkna betongspänningen i neutrala lagret

$$\sigma_c(x - x_{tp}) = \frac{N}{A_{II}} + \frac{M_d + N \cdot e_{II}}{I_{II}} \cdot (x - x_{tp})$$

$$= \frac{-30 \cdot 10^3}{18156} + \frac{44{,}1 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^3 \cdot 182{,}5}{9{,}132 \cdot 10^7} \cdot (71 - 67{,}5) = -0{,}172 \text{ MPa} \neq 0$$

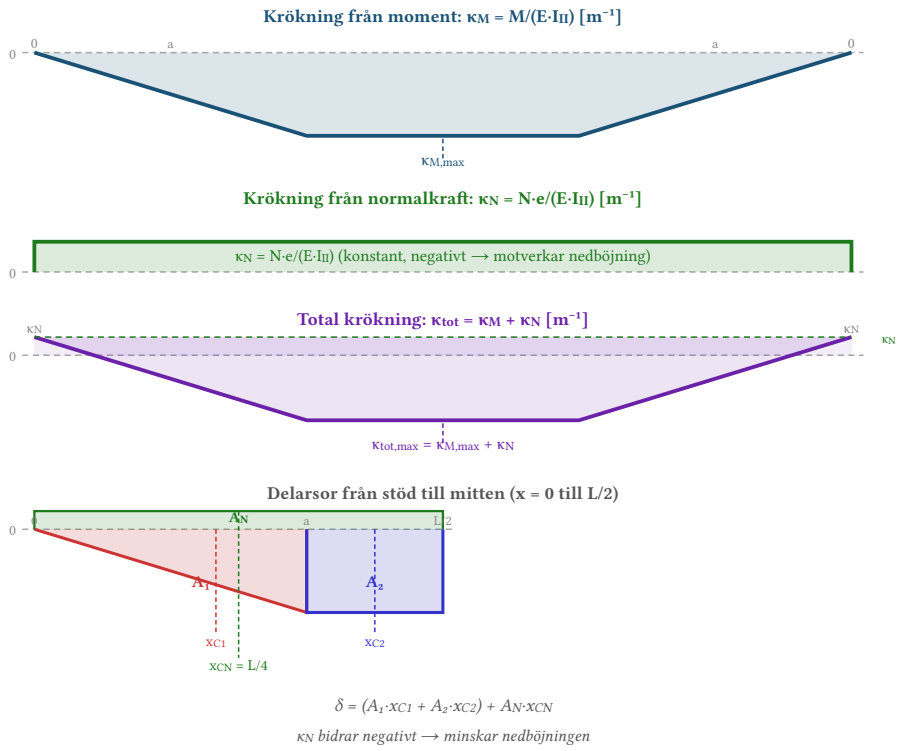
> **Obs:** Spänningen i neutrala lagret är $-0{,}172$ MPa $\neq 0$ (svagt tryck), vilket innebär att gissningen $x = 71$ mm inte är exakt (konvergerat värde $x \approx 71{,}4$ mm). Avvikelsen är dock tillräckligt liten för att vi ska kunna acceptera $x = 71$ mm och fortsätta beräkningarna.

9. Nedböjning i Stadium II med normalkraft med hjälp av grafiska metoden

När normalkraften N verkar excentrisk (vid underkant, avstånd e_{II} från tyngdpunkten) ger den upphov till en konstant krökning som adderas till krökningsfördelningen från momentet. Den totala krökningen blir:

$$\kappa_{tot}(x) = \kappa_M(x) + \kappa_N = \frac{M_Q(x)}{E_{cm} \cdot I_{II}} + \frac{N \cdot e_{II}}{E_{cm} \cdot I_{II}}$$

Krökningsfördelningen med bidrag från både moment och normalkraft visas i figur U2.36.



Figur U2.36 Krökningsfördelning med bidrag från moment och normalkraft, med delarsor för grafiska metoden

Bidraget från momentet ger nedböjningen $\delta_M = 10{,}13$ mm (beräknad i avsnitt 7). Normalkraftens bidrag beräknas separat som en konstant krökning över hela spannet:

$$\kappa_N = \frac{N \cdot e_{II}}{E_{cm} \cdot I_{II}} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1825}{37 \cdot 10^9 \cdot 9{,}132 \times 10^{-5}} = -1{,}620 \cdot 10^{-3}\text{m}^{-1}$$

> **Obs:** $\kappa_N < 0$ (negativt) innebär att normalkraften motverkar nedböjningen (tryck vid underkant ger en uppåtriktad krökning).

Krökningsbidraget från N är konstant, alltså en rektangel från stöd till mitten:

$$A_N = \kappa_N \cdot \frac{L}{2} = -1{,}620 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}35 = -2{,}188 \cdot 10^{-3}$$

$$x_{CN} = \frac{L}{4} = \frac{2{,}7}{4} = 0{,}675 \text{ m}$$

$$\delta_N = A_N \cdot x_{CN} = -2{,}188 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}675 = -1{,}477 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1{,}48 \text{ mm}$$

Total nedböjning:

$$\delta_{tot} = \delta_M + \delta_N = 10{,}13 + (-1{,}48) = 8{,}65 \text{ mm}$$

> **Slutsats:** Normalkraften $N = -30$ kN (tryck) minskar nedböjningen med 1,48 mm jämfört med fallet utan normalkraft. Det beror på att den excentriska tryckkraften ger en konstant motverkande krökning κ_N som reducerar den totala krökningen.

Uppgift 2.6 Nedböjning hos balk

Beräkningsgång

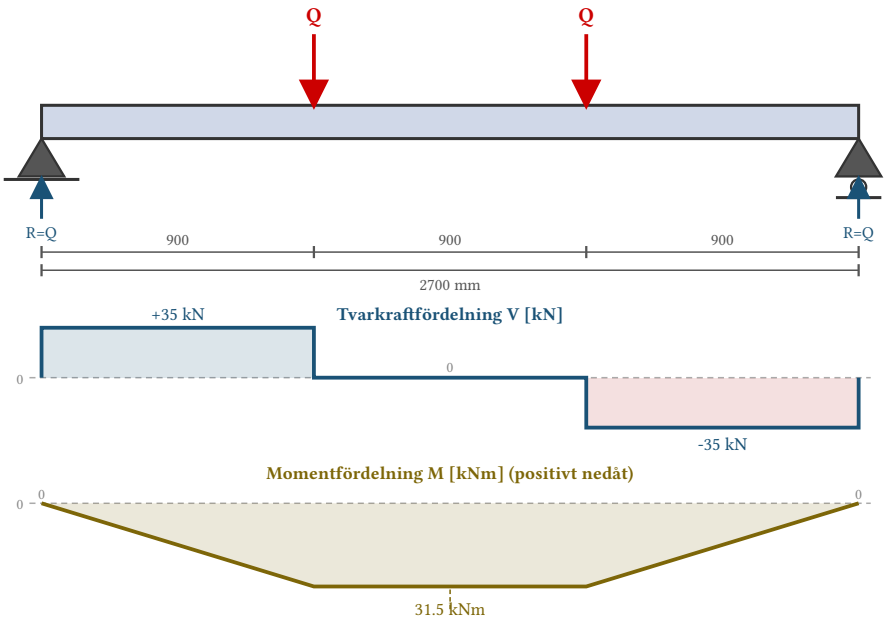
1. **Lasteffekt** - Beräkna det verkande momentet från given last

2. **Geometri och materialegenskaper** - Sammanställ tvärsnittets geometri, armeringsmängder och materialegenskaper
3. **Nedböjning i Stadium II (grafisk metod)** - Beräkna nedböjningen i Stadium II med hjälp av grafiska metoden
4. **Sprickbredd** - Beräkna en övre gräns för sprickbredden i Stadium II
5. **Last Q** - Beräkna lasten Q som ger upphov till den givna töjningsfördelningen

1. Lasteffekt

Balken är fritt upplagd med spännvidd $L = 2700$ mm och belastad med två punktlaster Q i en 4-punktsböjning, placerade vid 900 mm från vardera stöd ($a = 900$ mm). Stöden är ledat upplagda, vilket innebär att momentet vid stöden är noll och ökar linjärt till punktlasterna. På grund av lastsetupets symmetri är zonen mellan punktlasterna utsatt för konstant böjmoment och noll tvärkraft.

Strukturmodellen med tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.40.



Figur U2.40 Strukturmodell med tvärkraft- och momentdiagram

Jämviktsanalys ger reaktionskrafterna $R_A = R_B = Q$ (symmetri). Tvärkraft- och momentfördelningen längs balken:

$$V(x) = \begin{cases} +Q & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x \le L - a \\ -Q & L - a < x \le L \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} Q \cdot x & 0 \le x \le a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) = Q \cdot a & a \le x \le L - a \\ Q \cdot x - Q \cdot (x - a) - Q \cdot (x - (L - a)) = Q \cdot (L - x) & L - a \le x \le L \end{cases}$$

där $a = 0{,}9$ m och $L = 2{,}7$ m.

2. Geometri och materialegenskaper

Geometri

- $b = 200$ mm, $h = 250$ mm
- $d' = 34$ mm, $d = 214$ mm
- $h_f = d - d' = 180$ mm (avstånd mellan armeringslagren)

- $\phi_p = 10$ mm (Överkantsarmering), $\phi = 16$ mm (Underkantsarmering)

Armeringsareor

$$A_s = 3 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 603{,}186\text{mm}^2, A_s' = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \phi_p^2}{4} = 157{,}08\text{mm}^2$$

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong

- $f_{cm} = 50$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ck} = f_{cm} - 8$ MPa $= 42$ MPa *(medelhållfasthet minus standardavvikelse)*
- $f_{ctm} = 3$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = 31$ GPa *(modul för betong i bruksstadiet, kan beräknas enligt EC2 som $E_{cm} = k_E \cdot f_{cm}^{1/3}$ där $k_E = 9000$)*

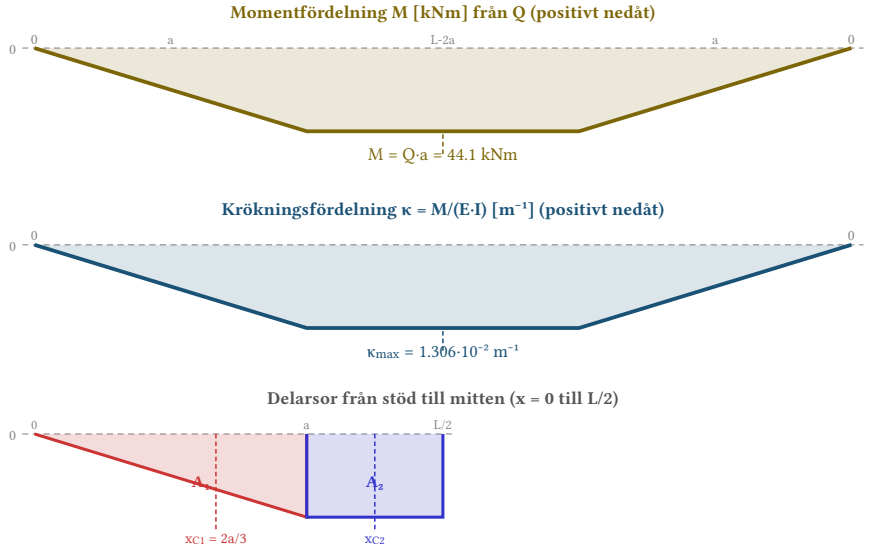
Armering B500S / B500B

- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{31} = 6{,}45$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Nedböjning i Stadium II med hjälp av grafiska metoden

Nedböjningen beräknas med hjälp av grafiska metoden, från krökningen som i sin tur beräknas från momentfördelningen och tvärsnittets tröghetsmoment.

Moment- och krökningsfördelningen med delareorna visas i figur U2.41.



Figur U2.41 Moment- och krökningsfördelning vid ren böjning, med delareor för grafiska metoden

Enligt grafiska metoden (B8-22) kan nedböjningen i mitten av fältet beräknas som integralen av krökningen multiplicerad med hävarmen x från stödet:

$$\delta_{II} = f\left(\frac{L}{2}\right) = \int_0^{L/2} \kappa_{II}(x) \cdot x \, dx$$

Denna integral kan tolkas som summan av delarean A_i av krökningsdiagrammet (från stöd till mitten) multiplicerad med avståndet x_{Ci} från stödet till delareans tyngdpunkt (B8-24):

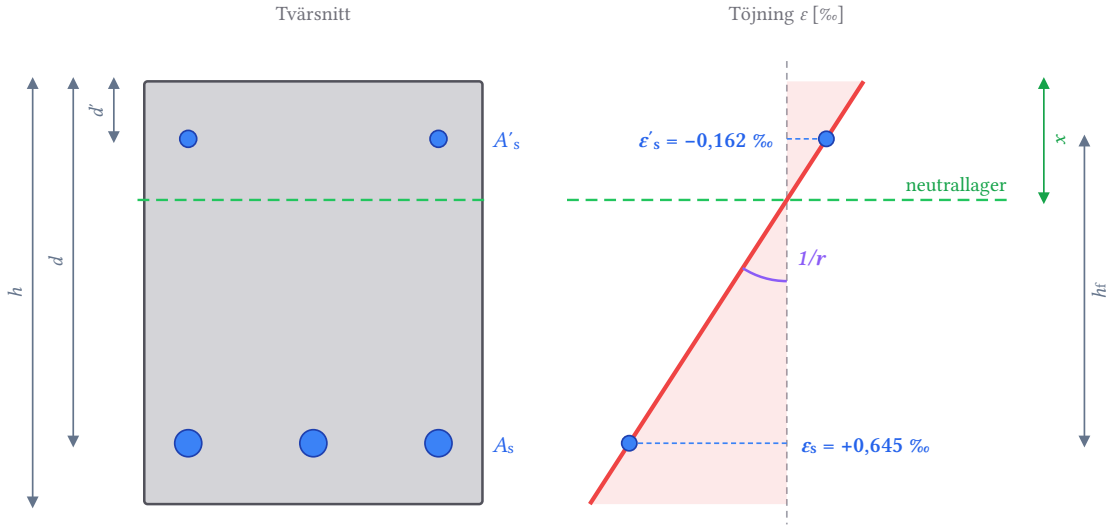
$$\delta_{II} = \sum_i A_i \cdot x_{Ci}$$

Där $\kappa_{II,max}$ är krökningen i mitten av fältet, där momentet är som störst:

$$\kappa_{II,max} = \frac{M_d}{E_{cm} \cdot I_{II}}$$

Enligt ekvation för att beräkna maximumkrökningen i mitten av fältet ($x = L/2$) där momentet är som störst, det behövs att veta momentet M_d i mitten av fältet, vilket är okänd. Dock, för ett tvärsnitt med given töjningsfördelning kan krökningen beräknas ur kända töjningsvärden och tvärsnittets geometri *(se teori: Spännings- och töjningsfördelning)*.

Töjningarna och den krökning de ger visas i figur U2.42.



Figur U2.42 Töjningsfördelningen över tvärsnittet och den krökning den ger.

Med hjälp av givna kurvor kan den maximala töjningen i ett sprucket tvärsnitt läsas. Om den största töjningen i det mest dragna fibret emellan punktlasterna användas, en övre gräns för krökningen i mitten av fältet beräknas som:

$$\kappa_{II,max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{s\prime}}{h_f}$$

Enligt figur U2.39 är $\varepsilon_s = 0{,}000645$ och $\varepsilon_{s\prime} = -0{,}000162$, vilket ger:

$$\kappa_{II,max} = \frac{0{,}000645 - (-0{,}000162)}{0{,}18} = 4{,}483 \cdot 10^{-3}\text{m}^{-1}$$

Krökningsdiagrammet från stöd ($x = 0$) till mitten ($x = L/2$) delas i två delar:

1. **Triangel**

($0 \leq x \leq a$): krökning ökar linjärt från 0 till κ_{max}

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \kappa_{max} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 4{,}483 \cdot 10^{-3} = 2{,}017 \cdot 10^{-3}$$

$$x_{C1} = \frac{2a}{3} = \frac{2 \cdot 0{,}9}{3} = 0{,}600 \text{ m}$$

2. **Rektangel**

($a \leq x \leq L/2$): krökning konstant κ_{max}

$$A_2 = \left(\frac{L}{2} - a\right) \cdot \kappa_{max} = (1{,}35 - 0{,}9) \cdot 4{,}483 \cdot 10^{-3} = 2{,}017 \cdot 10^{-3}$$

$$x_{C2} = a + \frac{L/2 - a}{2} = 0{,}9 + \frac{0{,}45}{2} = 1{,}125 \text{ m}$$

Summa:

$$\delta_{II} = A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} = 2{,}017 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}600 + 2{,}017 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}125$$
$$= 1{,}210 \cdot 10^{-3} + 2{,}269 \cdot 10^{-3} = 3{,}48 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3{,}48 \text{ mm}$$

4. Sprickbredd

En övre gräns för sprickbredden kan beräknas om samverkan mellan stål och betong försummas *(se teori: Beräkning av sprickbredd)*.

Sprickbredden uttryckas som:

$$w_m = \varepsilon_s \cdot s_{\mathrm{r,m,cal}}$$

där $s_{\mathrm{r,m,cal}}$ är det beräknade medelsprickavståndet enligt EC2:2023 (9.15):

$$s_{\mathrm{r,m,cal}} = 1{,}5 \cdot c + \frac{k_{\mathrm{fl}} \cdot k_b}{7{,}2} \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,\mathrm{eff}}} \le \frac{1{,}3}{k_w}(h - x)$$

Neutralaxelns läge x_{II} ur töjningsdata:

$$x_{II} = d' + \frac{|\,\varepsilon_{s'}|}{\kappa_{II,\max}} = 0{,}034 + \frac{0{,}000162}{4{,}483 \times 10^{-3}} = 0{,}034 + 0{,}036 = 0{,}070 \text{ m} = 70{,}1 \text{ mm}$$

Effektiv dragzon $h_{c,\mathrm{eff}}$, med $a_y = h - d = 250 - 214 = 36$ mm och $c = a_y - \phi/2 = 28$ mm:

$$h_{c,\mathrm{eff}} = \min\!\left(a_y + 5\phi,\, 10\phi,\, h - x_{II},\, \frac{h}{2}\right) = \min(116,\, 160,\, 180,\, 125) = 116 \text{ mm}$$

$$\rho_{p,\mathrm{eff}} = \frac{A_s}{b \cdot h_{c,\mathrm{eff}}} = \frac{603{,}2}{200 \cdot 116} = 0{,}0260$$

Koefficient k_{fl} för rektangulärt tvärsnitt vid ren böjning (EC2:2023 ekv. 9.16):

$$k_{\mathrm{fl}} = \frac{h - h_{c,\mathrm{eff}}}{h} = \frac{250 - 116}{250} = 0{,}536$$

Medelsprickavstånd med $k_b = 0{,}8$ (räfflade stänger) och $k_w = 1{,}7$:

$$s_{\mathrm{r,m,cal}} = 1{,}5 \cdot 28 + \frac{0{,}536 \cdot 0{,}8}{7{,}2} \cdot \frac{16}{0{,}0260} = 42 + 36{,}6 = 78{,}6 \text{ mm}$$

Kontroll av övre gräns: $\dfrac{1{,}3}{1{,}7}(h - x_{II}) = \dfrac{1{,}3}{1{,}7}(250 - 70{,}1) = \dfrac{1{,}3}{1{,}7} \cdot 179{,}9 = 137{,}6$ mm $\rightarrow$ formel (9.15) ger $s_{\mathrm{r,m,cal}} = 78{,}6$ mm ✓

Sprickbredd (övre gräns, ingen samverkan betong–stål):

$$w_m = \varepsilon_s \cdot s_{\mathrm{r,m,cal}} = 0{,}000645 \cdot 0{,}0786 = 5{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0{,}051 \text{ mm}$$

5. Last Q

Med den uppmätta töjningsfördelningen kan den applicerade lasten Q tillbakaberäknas. Krökningen $\kappa_{II,\max}$ är känd från avsnitt 3 och neutralaxelns läge x_{II} från avsnitt 4. Det återstår att beräkna tvärsnittets böjstyvhet i Stadium II via tröghetsmomentet I_{II}.

Eftersom ren böjning antas (ingen normalkraft) sammanfaller neutralaxelns läge x_{II} med tyngdpunkten hos det transformerade spruckna tvärsnittet. x_{II} bestämdes ur töjningsfördelningen i avsnitt 4 och används här som referensaxel för I_{II}.

Tröghetsmomentet I_{II} för det spruckna tvärsnittet kring neutralaxeln (x_{II}) i Stadium II:

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} + (\alpha - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{II} - d')^2 + \alpha \cdot A_s \cdot (d - x_{II})^2$$

$$I_{II} = \frac{0{,}200 \cdot (0{,}0701)^3}{3} + (6{,}45 - 1) \cdot 157{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}0701 - 0{,}034)^2$$
$$+6{,}45 \cdot 603{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}214 - 0{,}0701)^2$$

$$= 2{,}30 \times 10^{-5} + 1{,}11 \times 10^{-6} + 8{,}05 \times 10^{-5} = 1{,}047 \times 10^{-4}\,\text{m}^4$$

Böjmoment i mittfältet ur relationen $M = E_{cm} \cdot I_{II} \cdot \kappa$:

$$M = E_{cm} \cdot I_{II} \cdot \kappa_{II,\,\max} = 31 \times 10^{9} \cdot 1{,}047 \times 10^{-4} \cdot 4{,}483 \times 10^{-3} = 14{,}55\ \text{kN·m}$$

Belastningskraft — i 4-punktsböjningen (avsnitt 1) gäller $M_{\max} = Q \cdot a$, med $a = 0{,}9$ m:

$$Q = \frac{M}{a} = \frac{14{,}55}{0{,}9} = 16{,}16\ \text{kN}$$

Uppgift 2.7 Plattrambro

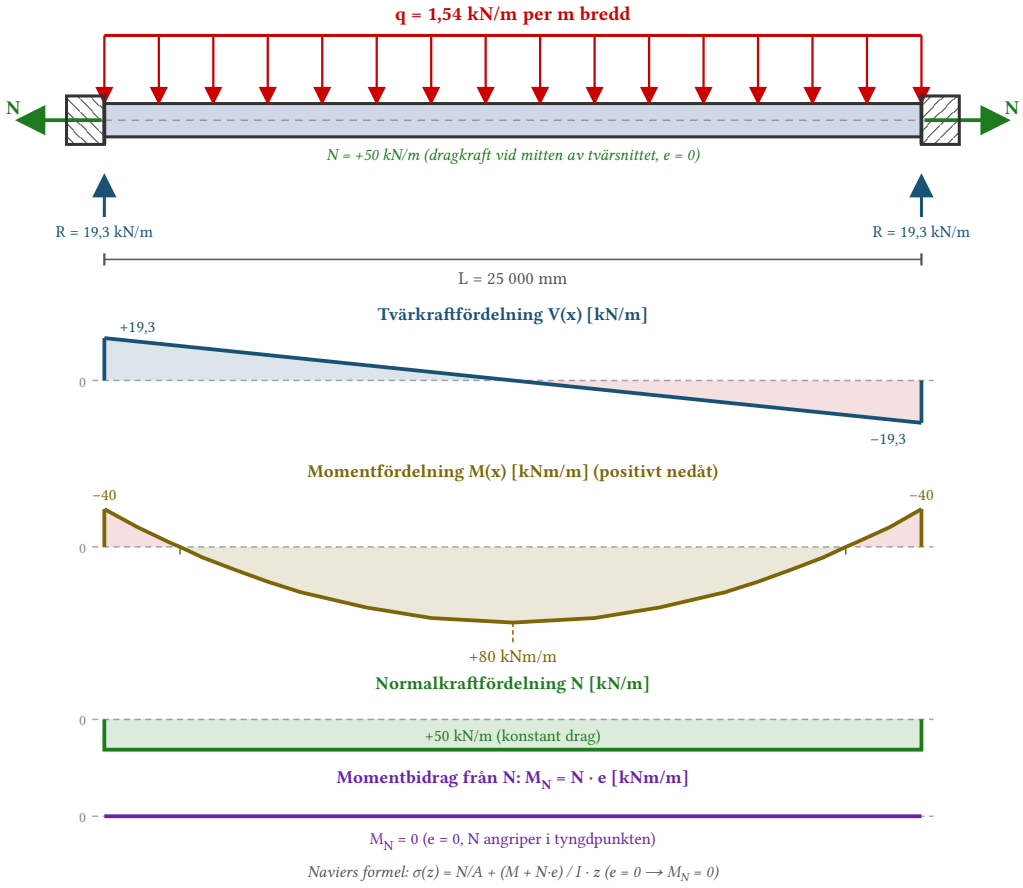
Beräkningsgång

1. **Lasteffekt** — Återberäkna den jämnt utbredda lasten från det givna momentdiagrammet och sammanställ dimensionerande snittkrafter
2. **Geometri och materialegenskaper** — Sammanställ tvärsnitt (per meterremsa), armeringsmängder och materialnyckeltal
3. **Stadium I — Sprickmoment** — Beräkna sprickmomentet och bestäm vilka snitt som spricker; besvara fråga 2
4. **Långtidseffekter** — Bestäm kryptal, effektiv E-modul och krympning
5. **Analys i Stadium II (mittspan)** — Beräkna neutrala lagrets läge, tröghetsmoment och stålspänning i det kritiska snittet i mittspan; antas spruckit tvärsnitt
6. **Kontroll av sprickbredd** — Kontrollera att sprickbredden uppfyller $w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275$ mm; besvara fråga 1
7. **Nedböjning** — Beräkna nedböjning i mittspan med den grafiska metoden; besvara fråga 3

1. Lasteffekt

Brodäcket analyseras som en **balkremsa per meter bredd** som spänner $L = 25$ m mellan rambenen. Rambenen ger **delvis inspänning** — stödmomenten är kända från FE-analys. Balkremsan belastas av en jämnt utbredd last q [kN/m per m bredd], en konstant normalkraft N och stödmomenten M_s.

Strukturmodellen med tvärkrafts-, moment- och normalkraftsdiagram visas i figur U2.45.



Figur U2.45 Strukturmodell med tvärkraft-, moment- och normalkraftdiagram

Jämviktsanalys — inspänd balk under jämnt utbredd last

Randvillkor och symmetri

Balkremsan är **symmetriskt** belastad med jämnt utbredd last q och symmetriska stödmoment M_s vid bägge ändar. Av symmetri följer:

$$R_A = R_B = R, \quad \theta(L/2) = 0 \quad \text{(noll rotation vid mittspan)}$$

Från **vertikal jämvikt**:

$$R_A + R_B = q \cdot L \quad \Rightarrow \quad R = \frac{q \cdot L}{2}$$

Moment- och tvärkraftfördelning

Friläggning av ett snitt vid avstånd x från vänster stöd ger:

Tvärkraft:

$$V(x) = R - q \cdot x = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot x$$

Böjmoment:

$$M(x) = M_s + R \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = M_s + \frac{q}{2}\, x\,(L - x)$$

Vid mittspan ($x = L/2$):

$$M_{\text{mitt}} = M_s + \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Det "fria" momentet (ekvivalent fritt upplagd balk) är alltså:

$$M_0 = \frac{q \cdot L^2}{8} = M_{\text{mitt}} - M_s$$

Härledning av stödmomentet ur $\theta(0) = 0$
För en **fullt inspänd** balk ($\theta = 0$ vid stöden) integrerar vi krökningsekvationen. Med EI konstant:

$$EI \cdot \theta(x) = \int_0^x M(t)\,dt = M_s \cdot x + \frac{R \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot x^3}{6}$$

Randvillkoret $\theta(0) = 0$ är automatiskt uppfyllt. Symmetrivillkoret $\theta(L/2) = 0$ ger:

$$M_s \cdot \frac{L}{2} + \frac{qL}{2} \cdot \frac{L^2}{8} - \frac{q \cdot L^3}{48} = 0$$

$$M_s \cdot \frac{L}{2} + \frac{qL^3}{16} - \frac{qL^3}{48} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_s \cdot \frac{L}{2} + \frac{qL^3}{24} = 0$$

$$\boxed{M_{s,\text{inspänd}} = -\tfrac{qL^2}{12}}$$

Med detta ger mittspannsmomentet:

$$M_{\text{mitt,inspänd}} = -\frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{24}$$

> **Notera:** Kvoten $|M_{s,\text{inspänd}}| \,/ M_{\text{mitt,inspänd}} = (qL^2/12)/(qL^2/24) = 2$. En fullt inspänd balk har stödmoment som är **dubbelt så stora** som fältmomentet.

Tillämpning på plattramsbron
I verkligheten är rambenen **inte oändligt styva** — de ger partiell inspänning. FE-modellen ger de faktiska snittkrafterna:

$$M_s = -40 \text{ kNm/m}, \quad M_{\text{mitt}} = +80 \text{ kNm/m}$$

Kvoten $|M_s| \,/ M_{\text{mitt}} = 40/80 = 0{,}5$, jämfört med 2,0 för full inspänning. Rambenen ger alltså en **svag inspänning** — det mesta av belastningen tas som fältmoment.

Återberäkning av last
Med jämviktsekvationen $M_0 = M_{\text{mitt}} - M_s$:

$$M_0 = 80 - (-40) = 120 \text{ kNm/m} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$q = \frac{8 \times 120}{25^2} = \frac{960}{625} = 1{,}54 \text{ kN/m per m bredd}$$

Resulterande snittkrafter
Reaktionskrafter:

$$R = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{1{,}54 \times 25}{2} = 19{,}3 \text{ kN/m}$$

Tvärkraft ($V = 0$ vid $x = L/2 = 12{,}5$ m):

$$V(x) = 19{,}3 - 1{,}54\,x \quad [\text{kN/m}]$$

Böjmoment:

$$M(x) = -40 + 0{,}77\,x\,(25 - x) \quad [\text{kNm/m}]$$

> **Kontroll**: $M(12{,}5) = -40 + 0{,}77 \times 12{,}5 \times 12{,}5 = -40 + 120 = +80$ kNm/m ✓

Normalkraft
Normalkraften är konstant längs hela balken:

$$N = +50 \text{ kN/m (drag)}$$

Normalkraften angriper i **mitten av tvärsnittet** ($h/2 = 250$ mm), dvs. excentriciteten relativt tvärsnittstyngdpunkten är $e = 0$. Normalkraften ger ett likformigt dragtillskott utan tillskottsmoment.

Dimensionerande snittkrafter
Snittkrafterna för den dimensionerande meterremsan framgår av jämviktsanalysens ekvationer. Alla laster beaktas som **långtidslaster**:

Snitt	**Läge x**	**V [kN/m]**	**M [kNm/m]**	**N [kN/m]**	**Dragsida**
Stöd	$x = 0$ (eller 25 m)	$\pm 19{,}3$	-40	$+50$ (drag)	Överkant
5 m från stöd	$x = 5$ m	$+11{,}6$	$+37$	$+50$ (drag)	Underkant
Mittspan	$x = 12{,}5$ m	0	$+80$	$+50$ (drag)	Underkant

Kontroll vid $x = 5$ m:

$$V(5) = 19{,}3 - 1{,}54 \times 5 = 19{,}3 - 7{,}7 = +11{,}6 \text{ kN/m}$$

$$M(5) = -40 + 0{,}77 \times 5 \times 20 = -40 + 77 = +37 \text{ kNm/m}$$

Momentet är **positivt** (fältmoment) — drag uppstår i **underkant**, vilket stämmer med de observerade sprickorna 5 m från bronsväggar på underkanten.

> **Obs:** Normalkraften $N = 50$ kN/m är **drag** och angriper i **mitten av tvärsnittet**. Eftersom $e = 0$ ger normalkraften inget tillskottsmoment utan bidrar enbart med en likformig dragpåkänning $\sigma_N = N/A$.

2. Geometri och materialegenskaper

Tvärsnitt (per meterremsa)
Tvärsnittet är **rektangulärt** med symmetrisk armering (ø12 på samma avstånd i överkant och underkant):

Parameter	**Värde**
Bredd per meterremsa	$b = 1000$ mm
Totalhöjd	$h = 500$ mm
Nominellt täckskikt	$c_{\text{nom}} = 40$ mm
Armeringsdiameter	$\phi = 12$ mm
Centrumavstånd (att kontrollera)	$s = 125$ mm

Armering (per meterremsa, med $s = 125$ mm)
Med centrumavståndet $s = 125$ mm fås armeringsarean per meter:

$$A_s = A_s' = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4 \cdot s} \times 1000 = \frac{\pi \times 12^2}{4 \times 125} \times 1000 = \frac{113{,}1}{125} \times 1000 = 905 \text{mm}^2/\text{m}$$

Effektiva höjder:

$$d = h - c_{\text{nom}} - \frac{\phi}{2} = 500 - 40 - 6 = 454 \text{ mm}$$

$$d' = c_{\text{nom}} + \frac{\phi}{2} = 40 + 6 = 46 \text{ mm}$$

> Notera: armeringen är identisk i överkant och underkant ($A_s = A_s'$). Vid positivt moment (fält) är underkant dragsida och överkant trycksida; vid negativt moment (stöd) gäller det omvända.

Materialegenskaper (Bruksstadiet)

Betong C30/37 (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)

- $f_{ck} = 30$ MPa *(karakteristisk cylinderhållfasthet)*
- $f_{cm} = 38$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ctm} = 2{,}9$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = 33$ GPa *(elasticitetsmodul)*

Armering B500B

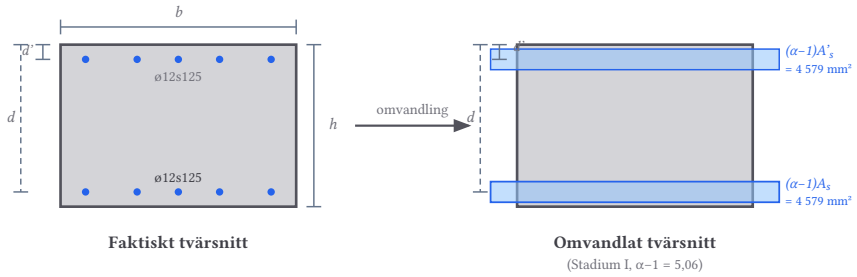
- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \dfrac{E_s}{E_{cm}} = \dfrac{200}{33} = 6{,}06$ *(omvandlingsfaktor armering till betong)*

3. Stadium I — Kontroll av sprickbildning

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringslager ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen. Det omvandlade tvärsnittet består alltså enbart av betong och kan analyseras med klassisk tvärsnittsteori *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Det faktiska och det omvandlade tvärsnittet visas i figur U2.46.



Figur U2.46 Faktiskt tvärsnitt och omvandlat ekvivalent betongtvärsnitt

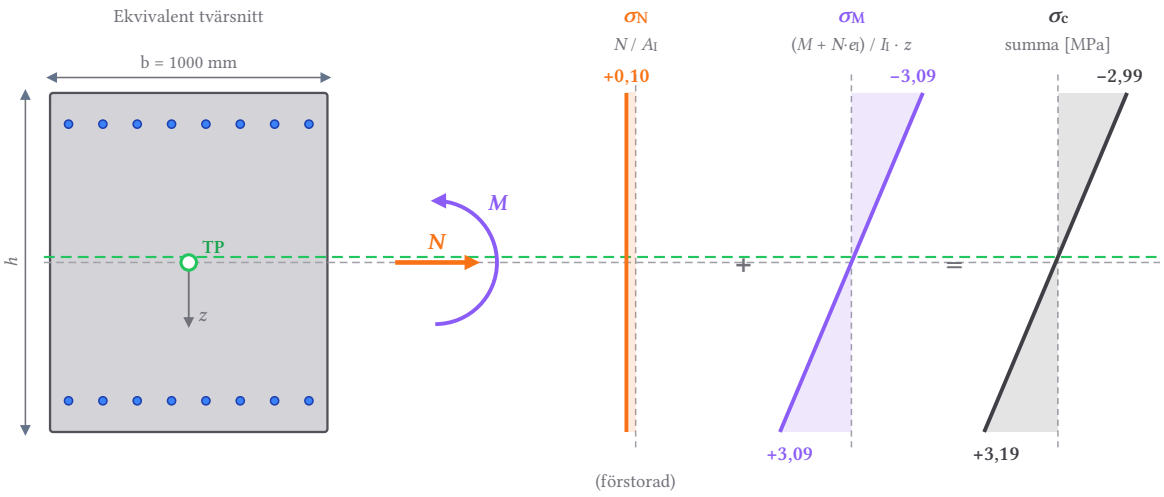
Spänningsberäkning m.h.a. Navier i Stadium I

Det omvandlade ekvivalenta betongtvärsnittet kan analyseras med Naviers formel:

$$\sigma_c(z) = \frac{N}{A_I} + \frac{M_d + N \cdot e_I}{I_I} \cdot z$$

> **Obs:** Naviers formel måste tillämpas med konsekventa teckenregler. Se teckenregler för Naviers formel.

Spänningsbidragen och deras summa visas i figur U2.47.



Figur U2.47 Spänningsbidragen från normalkraft och moment och deras summa.

Övergången från Stadium I till Stadium II sker när dragspänningen i det mest dragna fibret når betongens dragkapacitet. Vid sprickbildning kan σ_c i underkant antas vara lika med betongens böjdraghållfasthet $f_{ctm,fl}$, som beräknas enligt:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\ f_{ctm}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{500}{1000}\right) \cdot 2{,}9;\ 2{,}9\right\} = \max\{3{,}19;\ 2{,}9\} = 3{,}19 \text{ MPa}$$

För att kunna beräkna sprickmomentet M_{cr} ur Naviers formel behöver vi bestämma de återstående storheterna: tröghetsmomentet I_I, tvärsnittsarean A_I, excentriciteten e_I och avståndet z till det mest dragna fibret. Normalkraften $N = +50$ kN/m (drag) angriper i **mitten av tvärsnittet** (vid $h/2$), dvs. i tyngdpunkten. Excentriciteten relativt tyngdpunkten är därmed:

$$e_I = 0$$

Inverkan av armeringen på tvärsnittets tyngdpunkt kan försummas i Stadium I, således kan x_{tp}, I_I och A_I beräknas baserat på oarmerat betongtvärsnitt:

$$x_{tp} \approx x_c = \frac{h}{2} = \frac{500}{2} = 250 \text{ mm} \quad \text{i Stadium I}$$

Avståndet från tyngdpunkten till det mest dragna fibret (underkant vid positivt moment):

$$z = h - x_{tp} = 500 - 250 = 250 \text{ mm}$$

Tröghetsmoment och tvärsnittsarea i Stadium I (I_I och A_I) beräknas som för det oarmerade betongtvärsnittet:

$$I_I \approx I_c = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 1000 \cdot 500^3 = 10{,}42 \times 10^9 \text{mm}^4 \quad \text{i Stadium I}$$

$$A_I = b \cdot h = 1000 \cdot 500 = 500\,000 \text{mm}^2 \quad \text{i Stadium I}$$

Nu kan sprickmomentet M_{cr} lösas ur Naviers formel, genom att sätta $\sigma_c = f_{ctm,fl}$ i det mest dragna fibret (med $e_I = 0$):

$$M_{cr} = \left(f_{ctm,fl} - \frac{N}{A_I}\right) \cdot \frac{I_I}{h - x_{tp}} - N \cdot e_I = \left(3{,}19 - \frac{50 \cdot 10^3}{500\,000}\right) \cdot \frac{10{,}42 \times 10^9}{250} - 0$$

$$= (3{,}19 - 0{,}10) \times 41{,}67 \times 10^6 = 3{,}09 \times 41{,}67 \times 10^6 = 128{,}8 \times 10^6 \text{ Nmm} = 128{,}8 \text{ kNm/m}$$

Jämförelse med maximalt verkande moment:

$$M_{\max} = 80 \text{ kNm/m} \quad < \quad M_{cr} = 128{,}8 \text{ kNm/m}$$

> **Obs:** Sprickmomentet $M_{cr} = 128{,}8$ kNm/m är lägre än det skulle vara om normalkraften vore tryckande. Anledningen är att normalkraften $N = +50$ kN/m är **drag** och angriper i tyngdpunkten ($e_I = 0$). Dragkraften ger ett jämnt fördelat dragtillskott $N/A_I = 0{,}10$ MPa som ökar dragspänningen i underkant och kräver ett lägre böjmoment för att nå betongens dragkapacitet — till skillnad från Uppgift 2 där normalkraften var tryckande och gav ett *högre* sprickmoment.

Tvärsnittet spricker ej under givna mekaniska laster! De observerade sprickorna (5 m från rambenen på underkant) orsakades sannolikt av **tvångskrafter** — temperatur- och krympningsinducerade dragspänningar i tvärled, vilka inte ingår i FE-modellens snittkrafter (temperaturutvidgningskoefficienten var satt till 0 i tvärled).

Svar fråga 2: Sprickmomentet är $M_{cr} = 128{,}8$ kNm/m (per meterremsa). Sprickbreddskontrollen utförs ändå under antagande att tvärsnittet är uppsprucket (på grund av observerade sprickor).

4. Långtidseffekter (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - krympning och krypning)

Förenklad metod — kontroll

Uppgiften anger att $|\sigma_c(-x_{tp})| < 0{,}4 \cdot f_{ck}$. Villkoret för att den förenklade metoden (tabellvärden) får tillämpas är därmed uppfyllt — kryptal och krympvärden kan avläsas direkt från tabellerna 5.2 och 5.3 i SS-EN 1992-1-1:2023.

Nominell tvärsnittsdimension h_0

Den nominella tvärsnittsdimensionen (ekvivalent tjocklek) beräknas som:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}$$

För en platta med $b \gg h$: $A_c = b \cdot h = 1000 \times 500 = 500\,000 \text{mm}^2$, $u = 2b = 2000$ mm (uttorkning från båda sidor):

$$h_0 = \frac{2 \times 500\,000}{2000} = 500 \text{ mm}$$

Kryptal — Tabell 5.2 (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)

Betong C30/37, cementklass CN, belastningsålder $t_0 = 28$ d, utomhusklimat ($RH = 80\%$), $h_0 = 500$ mm:

Tabellvärde för $f_{ck} = 35$ MPa: $\varphi_{35} = 1{,}5$

Korrektionsfaktor för $f_{ck} = 30$ MPa:

$$\left(\frac{35}{f_{ck}}\right)^{A} = \left(\frac{35}{30}\right)^{0{,}79} = 1{,}167^{0{,}79} = 1{,}13$$

$$\varphi(50 \text{ y}, t_0) = 1{,}5 \times 1{,}13 = 1{,}70$$

Effektiv elasticitetsmodul

Med kryptalet $\varphi = 1{,}70$ fås den effektiva elasticitetsmodulen för långtidsanalys:

$$E_{c,eff} = \frac{1{,}05 \cdot E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{1{,}05 \times 33}{1 + 1{,}70} = \frac{34{,}65}{2{,}70} = 12{,}8 \text{ GPa}$$

$$\alpha_{eff} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{12{,}8} = 15{,}6$$

Krympning — Tabell 5.3 (→ Kryptal och krympning — EC2:2023 tabell 5.2 och 5.3)
Betong C30/37, cementklass CN, utomhusklimat ($RH = 80\%$), $h_0 = 500$ mm:

Avläst ur tabell (linjärt interpolerat mellan $f_{ck} = 25$ och $f_{ck} = 35$ MPa):

$$\varepsilon_{cs,50y} = 0{,}29 \text{ ‰}$$

Krympningskrafter
Krympningen orsakar tvångskrafter i armeringen. Varje armeringslager bidrar med en ekvivalent normalkraft som verkar som **drag** på betongtvärsnittet:

$$E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} = 200\,000 \times 0{,}29 \times 10^{-3} = 58{,}0 \text{ MPa}$$

$$F_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A_s = 58{,}0 \times 905 = 52{,}5 \text{ kN/m} \quad (\text{dragarmering, underkant})$$

$$F'_{cs} = E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y} \cdot A'_s = 58{,}0 \times 905 = 52{,}5 \text{ kN/m} \quad (\text{tryckarmering, överkant})$$

Total ekvivalent normalkraft från krympning:

$$N_{cs} = F_{cs} + F'_{cs} = 52{,}5 + 52{,}5 = 105{,}0 \text{ kN/m}$$

> **Obs:** Eftersom armeringen är symmetrisk ($A_s = A'_s$) och tvärsnittet är symmetriskt, ger krympningen enbart en centrisk dragkraft utan tillskottsmoment. Krympningens momentbidrag kring tyngdpunkten tar ut varandra.

5. Analys i Stadium II (mittspan) — Antas sprucket tvärsnitt

(Se relaterad teori: Långtidseffekter - böjspruckna tvärsnitt)

Trots att tvärsnittet inte spricker under enbart mekaniska laster ($M_{\max} = 80 < M_{cr} = 128{,}8$ kNm/m) visar inspektionen sprickor i underkant. Analysen utförs därför med antagandet att tvärsnittet är **uppsprucket** (krympningsinducerade tvångsprickor).

Med hänsyn till krypning och krympning används $\alpha_{eff} = 15{,}6$ i stället för $\alpha = 6{,}06$. Krympningskrafterna F_{cs} och F'_{cs} adderas som yttre normalkrafter med tillhörande excentriteter i Naviers formel:

$$\sigma_{c,\infty}(z) = \frac{N_{eff}}{A_{II,eff}} + \frac{M_{d,eff}}{I_{II,eff}} \cdot z$$

där:

$$N_{eff} = N + N_{cs} = 50 + 105 = +155 \text{ kN/m (drag)}$$

$$M_{d,eff} = M + N \cdot (h/2 - x_{tp,eff}) + F_{cs} \cdot (d - x_{tp,eff}) + F'_{cs} \cdot (d' - x_{tp,eff})$$

> **Obs:** Normalkraften $N = +50$ kN/m angriper i mitten av tvärsnittet ($h/2 = 250$ mm), dvs. excentriciteten relativt det spruckna tvärsnittets tyngdpunkt är $e = h/2 - x_{tp,eff}$. Krympningens nettodragkraft kräver, liksom i Uppgift 3, ett iterativt förfarande för att bestämma neutrallagret ($x \neq x_{tp}$).

Stålspänningarna beräknas med hänsyn till den fria krympningens bidrag:

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs,50y}$$

Iterativ analys

Iteration 1: $x = 80$ mm
Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II,eff} = b \cdot x + (\alpha_{eff} - 1)A'_s + \alpha_{eff} A_s = 1000 \cdot 80 + 14{,}6 \cdot 905 + 15{,}6 \cdot 905 = 107\,331 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{1000 \cdot 80 \cdot 40 + 14{,}6 \cdot 905 \cdot 46 + 15{,}6 \cdot 905 \cdot 454}{107\,331} = \frac{10{,}22 \cdot 10^6}{107\,331} = 95{,}2 \text{ mm}$$

$$I_{II,eff} = \frac{1000 \cdot 80^3}{12} + 80\,000 \cdot (40 - 95{,}2)^2 + 13\,213 \cdot (95{,}2 - 46)^2 + 14\,118 \cdot (454 - 95{,}2)^2$$

$$= 43 \cdot 10^6 + 244 \cdot 10^6 + 32 \cdot 10^6 + 1817 \cdot 10^6 = 2{,}14 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

Ekvivalent moment kring tyngdpunkten:

$$M_{d,eff} = 80 \cdot 10^6 + 50 \cdot 10^3 \cdot 154{,}8 + 52{,}5 \cdot 10^3 \cdot 358{,}8 + 52{,}5 \cdot 10^3 \cdot (-49{,}2) = 104{,}0 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp,eff} = 80 - 95{,}2 = -15{,}2$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{155 \cdot 10^3}{107\,331} + \frac{104{,}0 \cdot 10^6}{2{,}14 \cdot 10^9} \cdot (-15{,}2) = 1{,}44 - 0{,}74 = +0{,}70 \text{ MPa} \neq 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $+0{,}70$ MPa (drag), vilket innebär att gissningen $x = 80$ mm är för stor — tryckhöjden måste minskas.

Det teoretiska neutrallagret fås genom $\sigma = 0$:

$$z_0 = -\frac{N_{eff} \cdot I_{II,eff}}{A_{II,eff} \cdot M_{d,eff}} = -\frac{155 \cdot 10^3 \cdot 2{,}14 \cdot 10^9}{107\,331 \cdot 104{,}0 \cdot 10^6} = -29{,}7 \text{ mm}$$

$$x = x_{tp,eff} + z_0 = 95{,}2 + (-29{,}7) = 65{,}5 \text{ mm} \approx 65 \text{ mm}$$

Iteration 2: $x = 65$ mm
Tvärsnittskonstanter:

$$A_{II,eff} = 1000 \cdot 65 + 14{,}6 \cdot 905 + 15{,}6 \cdot 905 = 92\,331 \text{mm}^2$$

$$x_{tp,eff} = \frac{1000 \cdot 65 \cdot 32{,}5 + 14{,}6 \cdot 905 \cdot 46 + 15{,}6 \cdot 905 \cdot 454}{92\,331} = \frac{9{,}13 \cdot 10^6}{92\,331} = 98{,}9 \text{ mm}$$

$$I_{II,eff} = \frac{1000 \cdot 65^3}{12} + 65\,000 \cdot (32{,}5 - 98{,}9)^2 + 13\,213 \cdot (98{,}9 - 46)^2 + 14\,118 \cdot (454 - 98{,}9)^2$$

$$= 23 \cdot 10^6 + 287 \cdot 10^6 + 37 \cdot 10^6 + 1780 \cdot 10^6 = 2{,}13 \cdot 10^9 \text{mm}^4$$

Ekvivalent moment kring tyngdpunkten:

$$M_{d,eff} = 80 \cdot 10^6 + 50 \cdot 10^3 \cdot 151{,}1 + 52{,}5 \cdot 10^3 \cdot 355{,}1 + 52{,}5 \cdot 10^3 \cdot (-52{,}9) = 103{,}4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Kontroll vid neutrallagret ($z = x - x_{tp,eff} = 65 - 98{,}9 = -33{,}9$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{155 \cdot 10^3}{92\,331} + \frac{103{,}4 \cdot 10^6}{2{,}13 \cdot 10^9} \cdot (-33{,}9) = 1{,}68 - 1{,}65 = +0{,}03 \text{ MPa} \approx 0$$

> Spänningen vid neutrallagret är $+0{,}03$ MPa ≈ 0. Gissningen $x = 65$ mm ger tillräcklig noggrannhet.

Spänningar i Stadium II med långtidseffekter
Med $x = 65$ mm, $x_{tp,eff} = 98{,}9$ mm, $A_{II,eff} = 92\,331 \text{mm}^2$, $I_{II,eff} = 2{,}13 \cdot 10^9 \text{mm}^4$:
Betongspänning i överkant ($z = -x_{tp,eff} = -98{,}9$ mm):

$$\sigma_{c,\infty} = \frac{155 \cdot 10^3}{92\,331} + \frac{103{,}4 \cdot 10^6}{2{,}13 \cdot 10^9} \cdot (-98{,}9) = 1{,}68 - 4{,}80 = -3{,}1 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i dragarmering ($z = d - x_{tp,eff} = 454 - 98{,}9 = 355{,}1$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(355{,}1) = 1{,}68 + 48{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 355{,}1 = 1{,}68 + 17{,}22 = 18{,}9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s) - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 15{,}6 \cdot 18{,}9 - 58{,}0 = 295 - 58 = 237 \text{ MPa}$$

Armeringsspänning i tryckarmering ($z = d' - x_{tp,eff} = 46 - 98{,}9 = -52{,}9$ mm):

$$\sigma_{c,\infty}(-52{,}9) = 1{,}68 + 48{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (-52{,}9) = 1{,}68 - 2{,}57 = -0{,}89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s' = \alpha_{eff} \cdot \sigma_{c,\infty}(z_s') - E_s \cdot \varepsilon_{cs} = 15{,}6 \cdot (-0{,}89) - 58{,}0 = -13{,}9 - 58{,}0 = -72 \text{ MPa}$$

> **Obs:** Stålspänningen i dragarmeringen $\sigma_s = 237$ MPa används i den efterföljande sprickbeddskontrollen (avsnitt 6). Betongspänningen $|\,\sigma_c| = 3{,}1$ MPa $< 0{,}4 \cdot f_{ck} = 12$ MPa bekräftar att den förenklade metoden för kryptal och krympvärden (avsnitt 4) var tillämplig.

6. Kontroll av sprickbredd (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3) (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

(Se relaterad teori: Beräkning av sprickbredd)

Sprickbredden kontrolleras vid det kritiska snittet (mittspan, $M = +80$ kNm/m, underkant i drag) under långtidslaster. Kravet, med hänsyn till att temperaturutvidgningskoefficienten satts till 0 i tvärled, är:

$$w_{k,\text{cal}} \leq w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275 \text{ mm}$$

Den beräknade sprickbredden bestäms enligt EC2:2023, ekvation (9.8): (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

$$w_{k,\text{cal}} = k_w \cdot k_{1/r} \cdot s_{\text{r,m,cal}} \cdot (\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}})$$

Beräkningen genomförs per meterremsa ($b = 1000$ mm) med underkantens armering som dragarmering ($\phi = 12$ mm, $s = 125$ mm, $A_s = 905$ mm²/m, $c = 40$ mm).

6.1 Medelsprickavstånd $s_{\text{r,m,cal}}$ (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

Medelsprickavståndet bestäms ur (9.15): (→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

$$s_{\text{r,m,cal}} = 1{,}5 \cdot c + \frac{k_{\text{fl}} \cdot k_b}{7{,}2} \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,\text{eff}}} \leq \frac{1{,}3}{k_w}(h - x)$$

Täckskikt och armeringsdata

Dragarmeringen (ø12s125 i underkant) har ett lager. Täckskiktet till armeringens yta:

$$c = h - d - \frac{\phi}{2} = 500 - 454 - \frac{12}{2} = 40 \text{ mm}, \quad \phi = 12 \text{ mm}$$

Vidhäftningsförhållanden

Dragarmeringen ligger i **underkant** av plattan — under gjutningen finns mindre än 250 mm betong under stängerna. Enligt EC2 §8.4.2 ger detta **goda vidhäftningsförhållanden**:

$$k_b = 0{,}9 \quad (\text{goda vidhäftningsförhållanden, kamstål, ekv. } 9\text{mathord}[,];18)$$

(→ Medelsprickavstånd — EC2 §9.2.3)

Effektiv draget betongarea

Höjden av den effektiva dragna zonen (underkant = dragsida):

$$h_{c,\text{eff}} = \min\left(2{,}5 \cdot a_y;\ \frac{h - x}{3};\ \frac{h}{2}\right)$$

Med $a_y = h - d = 500 - 454 = 46$ mm (avstånd från underkant till dragarmeringens tyngdpunkt) och $x = 65$ mm (tryckzonens djup från överkant, avsnitt 5):

$$h_{c,\text{eff}} = \min\left(2{,}5 \times 46;\ \frac{500 - 65}{3};\ \frac{500}{2}\right) = \min(115;\ 145;\ 250) = 115 \text{ mm}$$

Den effektiva dragna betongarean per meterremsa:

$$A_{c,\text{eff}} = h_{c,\text{eff}} \times b = 115 \times 1000 = 115\,000 \text{mm}^2$$

Det effektiva armeringsinnehållet:

$$\rho_{p,\text{eff}} = \frac{A_s}{A_{c,\text{eff}}} = \frac{905}{115\,000} = 0{,}00787$$

Koefficient k_{fl}

Tvärsnittet är belastat med böjning **och normalkraft** – k_{fl} beräknas därför enligt (9.17) i stället för det förenklade värdet 0,5 som gäller vid ren böjning. (→ Medelsprickavstånd – EC2 §9.2.3)

Koefficienten beror på töjningsfördelningen över den effektiva dragna zonen $A_{c,\text{eff}}$:

$$k_{\text{fl}} = \max\left\{0{,}5;\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\,\varepsilon_1}\right\}$$

där ε_1 är den största dragtöjningen (vid underkant) och ε_2 är dragtöjningen vid den övre gränsen av $A_{c,\text{eff}}$. Töjningen varierar linjärt från neutrala lagret ($x = 65$ mm):

$$\varepsilon_1 \propto (h - x) = 500 - 65 = 435 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_2 \propto (h - h_{c,\text{eff}} - x) = 500 - 115 - 65 = 320 \text{ mm}$$

$$k_{\text{fl}} = \frac{435 + 320}{2 \times 435} = \frac{755}{870} = 0{,}868$$

Beräknat medelsprickavstånd

$$s_{\text{r,m,cal}} = 1{,}5 \times 40 + \frac{0{,}868 \times 0{,}9}{7{,}2} \times \frac{12}{0{,}00787} = 60 + 0{,}1085 \times 1525 = 60 + 165 = 225 \text{ mm}$$

Kontroll av övre gräns ($k_w = 1{,}7$):

$$\frac{1{,}3}{k_w}(h - x) = \frac{1{,}3}{1{,}7} \times 435 = 333 \text{ mm}$$

$$s_{\text{r,m,cal}} = 225 \text{ mm} \le 333 \text{ mm} \quad \checkmark$$

6.2 Töjningsskillnad $(\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}})$ (→ Sprickbredd – EC2 §9.2.3)

Töjningsskillnaden bestäms från (9.11) (→ Sprickbredd – EC2 §9.2.3) med $\sigma_s = 237$ MPa (från avsnitt 5, långtidsanalys med krypning och krympning):

$$\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}} = \frac{\sigma_s - k_t \dfrac{f_{ct,\text{eff}}}{\rho_{p,\text{eff}}}\left(1 + \alpha_e \rho_{p,\text{eff}}\right)}{E_s}$$

Med:

- $k_t = 0{,}4$ *(långvarig last, stabiliserad sprickbildning)*
- $f_{ct,\text{eff}} = f_{ctm} = 2{,}9$ MPa
- $\alpha_e = E_s / E_{cm} = 200/33 = 6{,}06$

$$\frac{f_{ct,\text{eff}}}{\rho_{p,\text{eff}}}\left(1 + \alpha_e \rho_{p,\text{eff}}\right) = \frac{2{,}9}{0{,}00787}(1 + 6{,}06 \times 0{,}00787) = 368{,}5 \times 1{,}048 = 386 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}} = \frac{237 - 0{,}4 \times 386}{200\,000} = \frac{237 - 154}{200\,000} = \frac{83}{200\,000} = 0{,}41 \times 10^{-3}$$

Kontroll av undre gräns:

$$(1 - k_t)\,\frac{\sigma_s}{E_s} = 0{,}6 \times \frac{237}{200\,000} = 0{,}71 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}} = 0{,}41 \times 10^{-3} < 0{,}71 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \textbf{undre gränsen styr}$$

$$\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}} = 0{,}71 \times 10^{-3}$$

> **Obs:** Det låga effektiva armeringsinnehållet ($\rho_{p,\text{eff}} = 0{,}79\%$) ger en stor betongens dragstyvhetsbidrag (tension stiffening), $k_t \cdot C = 154$ MPa, vilket överstiger den nivå där den direkta beräkningen styr. Den undre gränsen $(1 - k_t) \cdot \sigma_s / E_s$ begränsar töjningsskillnaden.

6.3 Krökning och beräknad sprickbredd

Krökningsfaktorn från (9.9) (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3) med $x = 65$ mm (tryckzonens djup, avsnitt 5):

$$k_{1/r} = \frac{h - x}{h - a_y - x} = \frac{500 - 65}{500 - 46 - 65} = \frac{435}{389} = 1{,}118$$

Den beräknade sprickbredden vid ytan (9.8): (→ Sprickbredd — EC2 §9.2.3)

$$w_{k,\text{cal}} = k_w \cdot k_{1/r} \cdot s_{\text{r,m,cal}} \cdot (\varepsilon_{\text{sm}} - \varepsilon_{\text{cm}})$$

$$= 1{,}7 \times 1{,}118 \times 225 \times 0{,}71 \times 10^{-3} = 0{,}30 \text{ mm}$$

6.4 Kontroll

Parameter	Värde
Medelsprickavstånd $s_{\text{r,m,cal}}$	225 mm
Töjningsskillnad	$0{,}71 \times 10^{-3}$
Krökningsfaktor $k_{1/r}$	1,118
Beräknad sprickbredd $w_{k,\text{cal}}$	**0,30 mm**
Tillåten sprickbredd $w_{k,\text{till,red}}$	0,275 mm

$$w_{k,\text{cal}} = 0{,}30 \text{ mm} > w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275 \text{ mm} \quad \times$$

> **Svar fråga 1:** Sprickbredden **uppfyller inte** kravet $w_{k,\text{till,red}} = 0{,}275$ mm med centrumavståndet $s = 125$ mm. Den beräknade sprickbredden (0,30 mm) överskrider det tillåtna värdet med ca 9%. Den högre $k_{\text{fl}} = 0{,}868$ (böjning med normalkraft, ekv. 9.17) jämfört med $k_{\text{fl}} = 0{,}5$ (ren böjning) ger ett avsevärt större medelsprickavstånd ($s_{\text{r,m,cal}} = 225$ mm). Centrumavståndet behöver minskas ytterligare (eller täckskiktet/diametern justeras) för att uppfylla kravet.

7. Nedböjning — grafiska metoden

Nedböjningen i mittspannet beräknas med den grafiska metoden (andra momentareateoremet). Av symmetri är tangentens lutning noll vid mittspan ($\theta(L/2) = 0$), varför nedböjningen kan skrivas som:

$$\delta = \int_0^{L/2} \kappa(x) \cdot x \, dx = \sum_i A_i \cdot x_{Ci}$$

där A_i är delarean av krökningsdiagrammet och x_{Ci} är avståndet från stödet till delareans tyngdpunkt.

Inspektionen visade sprickor på underkanten mellan $x = 5$ m och $x = 20$ m. Balken har därmed **två styvhetszoner**:

- **Stadium I** ($0 \le x \le 5$ m och $20 \le x \le 25$ m): ospruckit tvärsnitt
- **Stadium II** ($5 \le x \le 20$ m): spruckit tvärsnitt (observerade sprickor)

7.1 Böjstyvheter

Med $E_{c,eff} = 12{,}8$ GPa (avsnitt 4), $I_I = 10{,}42 \times 10^9$ mm^4 (avsnitt 3) och $I_{II,eff} = 2{,}13 \times 10^9$ mm^4 (avsnitt 5):

Stadium I (ospruckit):

$$(EI)_I = E_{c,eff} \cdot I_I = 12{,}8 \times 10^6 \times 10{,}42 \times 10^{-3} = 133\,400 \text{kNthin m}^2$$

Stadium II (spruckit):

$$(EI)_{II} = E_{c,eff} \cdot I_{II,eff} = 12{,}8 \times 10^{6} \times 2{,}13 \times 10^{-3} = 27\,260 \text{kNthin m}^2$$

> **Obs:** Det ospruckna tvärsnittet är ca 5 gånger styvare än det spruckna: $(EI)_I / (EI)_{II} = 4{,}9$.

7.2 Krökningsfördelning

I den **ospruckna zonen** bidrar enbart momentet till krökningen (normalkraften angriper i tyngdpunkten $\Rightarrow e_I = 0$ symmetrisk armering $\Rightarrow$ ingen krympningskrökning):

$$\kappa_I(x) = \frac{M(x)}{(EI)_I}$$

I den **spruckna zonen** tillkommer krökning från normalkraftens excentricitet och krympkrafterna (konstant bidrag oberoende av x):

$$\kappa_{II}(x) = \frac{M(x)}{(EI)_{II}} + \kappa_{NF}$$

Tillskottskrökningen κ_{NF} beräknas ur det extra momentet kring det spruckna tvärsnittets tyngdpunkt (samma termer som i avsnitt 5):

$$\Delta M = N \cdot (h/2 - x_{tp,eff}) + F_{cs} \cdot (d - x_{tp,eff}) + F'_{cs} \cdot (d' - x_{tp,eff})$$

$$= 50 \times 0{,}151 + 52{,}5 \times 0{,}355 + 52{,}5 \times (-0{,}053) = 7{,}6 + 18{,}6 - 2{,}8 = 23{,}4 \text{ kNm/m}$$

$$\kappa_{NF} = \frac{\Delta M}{(EI)_{II}} = \frac{23{,}4}{27\,260} = 0{,}858 \times 10^{-3} \text{m}^{-1}$$

Momentets nollgenomgång (gräns mellan positiv och negativ krökning i Stadium I):

$$M(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -40 + 0{,}77\,x_0\,(25 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2{,}29 \text{ m}$$

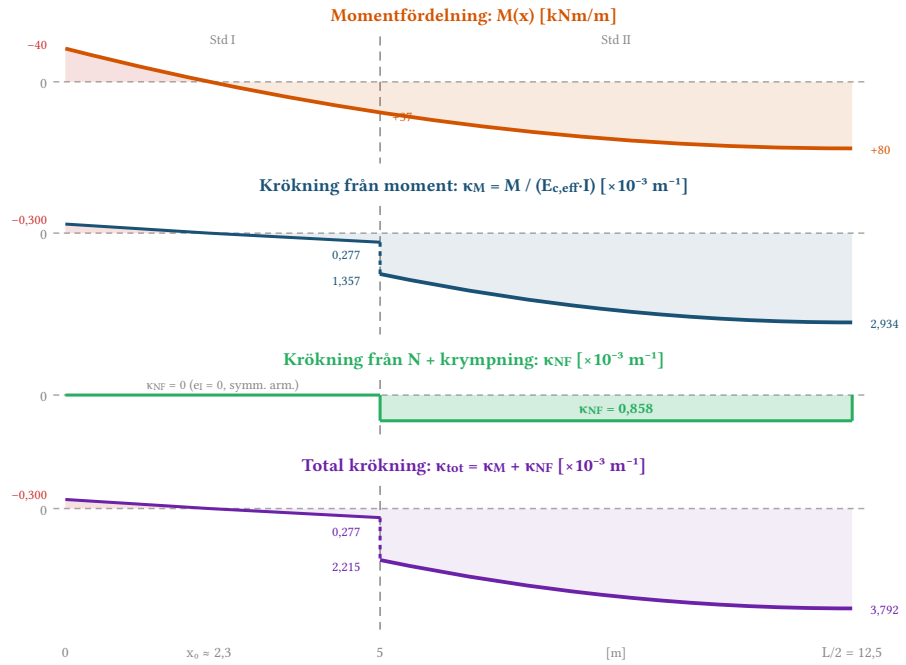
Krökning i nyckelpunkter:

Läge	x [m]	M [kNm/m]	Stadium	κ_M	κ_{NF}	κ_{tot}
Stöd	0	−40	I	−0,300	0	−0,300
Nollgenomgång	2,29	0	I	0	0	0
5 m (Std I)	5	+37	I	+0,277	0	+0,277
5 m (Std II)	5	+37	II	+1,357	+0,858	+2,215
Mittspan	12,5	+80	II	+2,934	+0,858	+3,792

Krökning i $\times 10^{-3}$ m^{-1}.

> **Obs:** Vid $x = 5$ m finns en **diskontinuitet** i krökningen — styvhetshoppet från $(EI)_I$ till $(EI)_{II}$ gör att krökningen ökar från $0{,}277 \times 10^{-3}$ till $2{,}215 \times 10^{-3}$ m^{-1} (faktor 8). Normalkraftens och krympningens bidrag (κ_{NF}) ökar krökningen ytterligare i den spruckna zonen.

Figur U2.48 visar momentfördelningen $M(x)$ tillsammans med de tre krökningstillskotten (κ_M, κ_{NF} och κ_{tot}), så att sambandet mellan moment och krökning tydligt framgår:

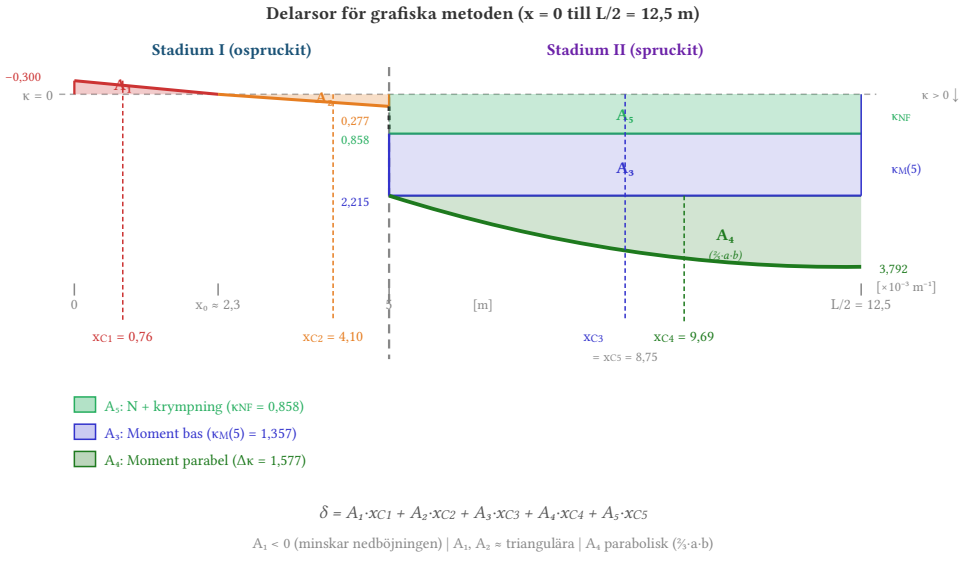


Figur U2.48 Momentfördelning M(x) och krökningskomponenter: κ_M, κ_NF och κ_tot

7.3 Delareor och nedböjning

Krökningsdiagrammet från stöd ($x = 0$) till mitten ($x = L/2 = 12{,}5$ m) delas i **fem** delar. De små paraboliska arealerna i den ospruckna zonen (A_1 och A_2) förenklas som triangulära. I den spruckna zonen separeras bidraget från moment (A_3 + A_4) och från normalkraft + krympning (A_5):

Krökningsdiagrammet med delareorna A_1–A_5 visas i figur U2.49.



Figur U2.49 Krökningsdiagram med delarsor A_1–A_5 för grafiska metoden

1. Triangel A_1

($0 \le x \le x_0 = 2{,}29$ m): krökning avtar linjärt från $-0{,}300$ till 0 *(hogging, minskar nedböjningen)*

$$A_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2{,}29 \cdot 0{,}300 \times 10^{-3} = -0{,}344 \times 10^{-3}$$

$$x_{C1} = \frac{x_0}{3} = \frac{2{,}29}{3} = 0{,}76 \text{ m}$$

2. Triangel A_2

($x_0 = 2{,}29 \le x \le 5$ m): krökning ökar linjärt från 0 till $0{,}277 \times 10^{-3}$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (5 - 2{,}29) \cdot 0{,}277 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}71 \cdot 0{,}277 \times 10^{-3} = 0{,}375 \times 10^{-3}$$

$$x_{C2} = 2{,}29 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}71 = 2{,}29 + 1{,}81 = 4{,}10 \text{ m}$$

3. Rektangel A_3

($5 \le x \le 12{,}5$ m): konstant momentkrökning $\kappa_M(5) = M(5)/(EI)_{II} = 1{,}357 \times 10^{-3}$ *(rektangulärt basbidrag från momentet)*

$$A_3 = 7{,}5 \cdot 1{,}357 \times 10^{-3} = 10{,}18 \times 10^{-3}$$

$$x_{C3} = 5 + \frac{7{,}5}{2} = 8{,}75 \text{ m}$$

4. Parabel A_4

($5 \le x \le 12{,}5$ m): momentkrökningen ökar paraboliskt från 0 till $\Delta\kappa = \kappa_M(12{,}5) - \kappa_M(5) = (2{,}934 - 1{,}357) \times 10^{-3} = 1{,}577 \times 10^{-3}$

$$A_4 = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}577 \times 10^{-3} = 7{,}88 \times 10^{-3}$$

$$x_{C4} = 5 + \frac{5}{8} \cdot 7{,}5 = 5 + 4{,}69 = 9{,}69 \text{ m}$$

5. Rektangel A_5

($5 \le x \le 12{,}5$ m): konstant krökning från normalkraft och krympning $\kappa_{NF} = 0{,}858 \times 10^{-3}$

$$A_5 = 7{,}5 \cdot 0{,}858 \times 10^{-3} = 6{,}44 \times 10^{-3}$$

$$x_{C5} = 5 + \frac{7{,}5}{2} = 8{,}75 \text{ m}$$

> **Obs:** A_3 och A_5 har samma tyngdpunktavstånd ($x_{C3} = x_{C5} = 8{,}75$ m). Summan $A_3 + A_5$ motsvarar det gamla rektangulära blocket vid $\kappa_{tot}(5) = 2{,}215 \times 10^{-3}$, men uppdelningen visar tydligt hur stor andel som kommer från momentet respektive från N + krympning.

7.4 Summering

$$\delta = A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + A_3 \cdot x_{C3} + A_4 \cdot x_{C4} + A_5 \cdot x_{C5}$$

Delarea	$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{x_{Ci}}$ **[m]**	$\boldsymbol{\delta_i = A_i \cdot x_{Ci}}$ **[mm]**
A_1 (upp)	$-0{,}344 \times 10^{-3}$	0,76	−0,3
A_2 (ospruckit ner)	$+0{,}375 \times 10^{-3}$	4,10	+1,5
A_3 (moment, rektangel)	$+10{,}18 \times 10^{-3}$	8,75	+89,1
A_4 (moment, parabel)	$+7{,}88 \times 10^{-3}$	9,69	+76,4
A_5 (N + krympning, rektangel)	$+6{,}44 \times 10^{-3}$	8,75	+56,3
Summa			**≈ 223 mm**

$$\boxed{\delta \approx 223 \text{ mm} \approx \tfrac{L}{112}}$$

Obs: Momentbidraget ($A_3 + A_4$) ger $89{,}1 + 76{,}4 = 165{,}5$ mm (74 %) medan normalkraftens och krympningens bidrag (A_5) ger 56,3 mm (25 %). Den ospruckna zonens bidrag ($A_1 + A_2 = 1{,}2$ mm) är försumbart. Uppdelningen visar att dragkraften och krympningen svarar för en fjärdedel av den totala nedböjningen.

Svar fråga 3: Nedböjningen i mitten av bron under långtidslaster är $\delta \approx 223$ mm $\approx L/112$. Den stora nedböjningen beror på den kraftigt reducerade styvheten i den spruckna zonen (krypning + sprickbildning) i kombination med normalkraftens och krympningens tillskottskrökning (κ_{NF}), som ensam bidrar med ca 56 mm.

Uppgift 2.8 Konsol

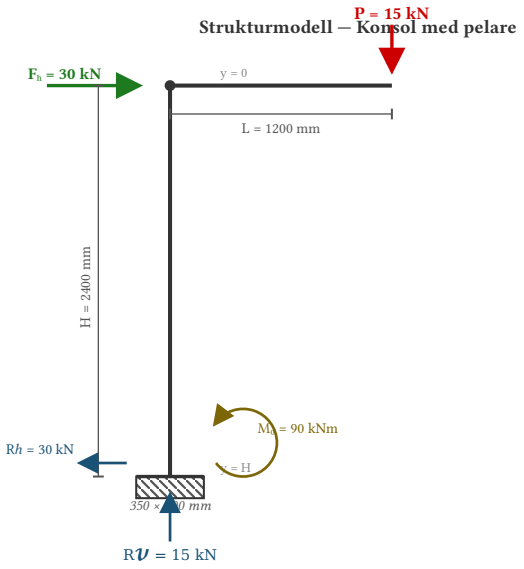
Beräkningsgång

1. **Lasteffekt** — Beräkna momentfördelning och normalkraft längs pelaren
2. **Geometri och materialegenskaper** — Sammanställ tvärsnitt, armeringsmängder och materialnyckeltal
3. **Stadium I — Sprickmoment** — Beräkna sprickmomentet M_{cr} och bestäm den spruckna höjden av pelaren; besvara fråga a och b
4. **Nedböjning** — Beräkna nedböjning i konsolens ände med hänsyn till sprucken och osprucken del; besvara fråga c

1. Lasteffekt

Pelaren är fastinspänd i botten och fri i toppen. Koordinaten y mäts från pelartoppen ($y = 0$) nedåt mot inspänningen ($y = H = 2{,}4$ m). Konsolen ger en vertikal last $P = 15$ kN med hävarmen $L = 1{,}2$ m från pelarens centrumaxel, och den horisontella lasten $F_h = 30$ kN verkar i ogynnsam riktning vid pelartoppen.

Strukturmodellen med normalkrafts-, tvärkrafts- och momentdiagram visas i figur U2.51.



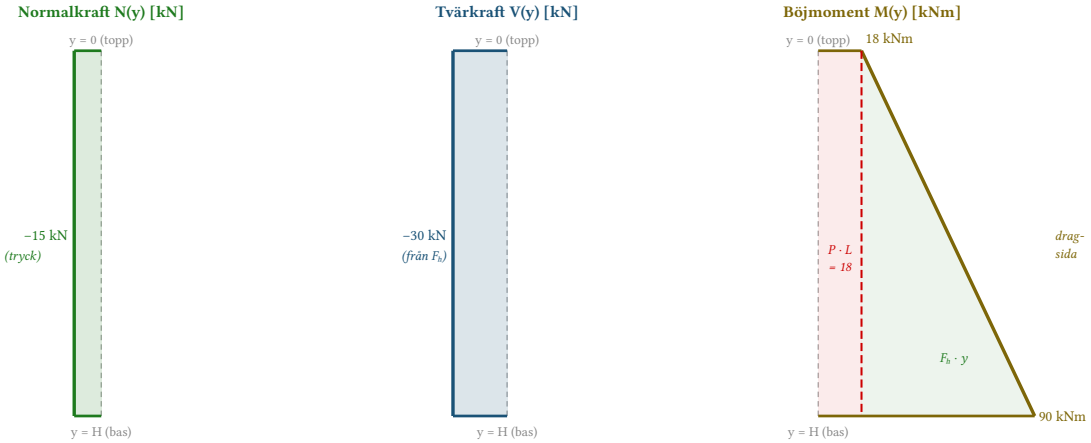
Jämviktsekvationer

$\Sigma F_h = 0$: $Rh - F_h = 0 \Rightarrow Rh = 30$ kN

$\Sigma FV = 0$: $RV - P = 0 \Rightarrow RV = 15$ kN

$\Sigma M_o = 0$: $M_o - P \cdot L - F_h \cdot H = 0$

$M_o = 15 \cdot 1{,}2 + 30 \cdot 2{,}4 = 18 + 72 = 90$ kNm



Snittkrafter längs pelaren (y från toppen)

$N(y) = -P = -15$ kN (tryck, konstant)

$V(y) = -F_h = -30$ kN (konstant)

$M(y) = P \cdot L + F_h \cdot y = 18 + 30y$ [kNm] (y i m)

Nyckelpunkter:

$M(0) = 18$ kNm (pelartopp, från $P \cdot L$)

$M(H) = 18 + 30 \cdot 2{,}4 = 90$ kNm (inspänning)

Figur U2.51 Strukturmodell med normalkraft-, tvärkrafts- och momentdiagram

Jämviktsanalys

Pelaren friläggs vid inspänningen ($y = H$). Tre jämviktsekvationer bestämmer stödreaktionerna:

Horisontell jämvikt:

$$\sum F_h = 0: \quad R_H - F_h = 0 \quad \Rightarrow \quad R_H = 30 \text{ kN}$$

Vertikal jämvikt:

$$\sum F_V = 0: \quad R_V - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_V = 15 \text{ kN}$$

Momentjämvikt kring inspänningen:

$$\sum M_0 = 0: \quad M_0 - P \cdot L - F_h \cdot H = 0$$

$$M_0 = P \cdot L + F_h \cdot H = 15 \times 1{,}2 + 30 \times 2{,}4 = 18 + 72 = 90 \text{ kNm}$$

Snittkrafter längs pelaren

Friläggning av pelaren i ett godtyckligt snitt på avståndet y från toppen ger:

Normalkraft (tryck, från den vertikala lasten P):

$$N(y) = -P = -15 \text{ kN} \quad (\text{konstant, tryck})$$

Tvärkraft (från den horisontella kraften F_h):

$$V(y) = -F_h = -30 \text{ kN} \quad (\text{konstant})$$

Böjmoment (momentet ökar linjärt p.g.a. F_h, med ett konstant bidrag från $P \cdot L$):

$$M(y) = P \cdot L + F_h \cdot y = 18 + 30\,y \quad [\text{kNm}] \quad (y \text{ i m})$$

Nyckelvärden

Snitt	y [m]	N [kN]	V [kN]	M [kNm]
Pelartopp	0	-15 (tryck)	-30	18
Mittenhöjd	1,2	-15 (tryck)	-30	54
Inspänning	2,4	-15 (tryck)	-30	90

> **Obs:** Böjmomentet $M(y)$ består av två bidrag: ett **konstant** bidrag $P \cdot L = 18$ kNm från den vertikala lastens excentricitet och ett **linjärt ökande** bidrag $F_h \cdot y$ från den horisontella lasten. Momentet är störst vid inspänningen ($M_0 = 90$ kNm) och minst vid pelartoppen ($M = 18$ kNm). Normalkraften $N = -15$ kN ger tryck som angriper i tvärsnittets tyngdpunkt ($e = 0$).

2. Geometri och materialegenskaper

Tvärsnitt

Pelaren har ett **rektangulärt** tvärsnitt med symmetrisk armering (4ø20 i drag- och tryckzonen):

Parameter	Värde
Bredd	$b = 350$ mm
Totalhöjd	$h = 400$ mm
Nominellt täckskikt	$c_{\text{nom}} = 35$ mm
Huvudarmeringsdiameter	$\phi = 20$ mm

Armering

Armeringsarean per zon (4ø20):

$$A_s = A_s' = 4 \times \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 4 \times 314{,}2 = 1257 \text{mm}^2$$

Effektiva höjder (mätt från tryckzonen, dvs. den sida som F_h trycker mot):

$$d = h - 28 = 400 - 28 = 372 \text{ mm}$$

$$d' = 28 \text{ mm}$$

> Notera: armeringen är identisk i drag- och tryckzonen ($A_s = A_s'$). Dragsidan bestäms av böjmomentet — den horisontella lasten F_h ger drag på den ena sidan av pelaren.

Materialegenskaper (Bruksstadiet — korttid)

Betong C40/50 (→ Betongegenskaper — EC2:2023 tabell 5.1)

- $f_{ck} = 40$ MPa *(karakteristisk cylinderhållfasthet)*
- $f_{cm} = 48$ MPa *(medelhållfasthet)*
- $f_{ctm} = 3{,}5$ MPa *(medelvärde av draghållfasthet)*
- $E_{cm} = 35$ GPa *(elasticitetsmodul)*

Armering B500B

- $f_{yk} = 500$ MPa *(karakteristisk flytgräns)*
- $E_s = 200$ GPa *(modul för armering)*
- $\alpha = \dfrac{E_s}{E_{cm}} = \dfrac{200}{35} = 5{,}71$ *(omvandlingsfaktor armering till betong, korttid)*

3. Stadium I — Sprickmoment och spruckna höjden

(Se relaterad teori: Böjning med normalkraft - ospruckna tvärsnitt)

Med hjälp av det **ekvivalenta betongtvärsnittet** omvandlas armeringen till fiktiv betong. Varje armeringslager ersätts med en ekvivalent betongarea viktad med faktorn $(\alpha - 1)$, placerad på samma nivå som armeringen *(Se teori: Omvandling av armeringsarea till ekvivalent betongarea).*

Omvandlat tvärsnitt i Stadium I

Omvandlad tvärsnittsarea:

$$A_I = b \cdot h + (\alpha - 1)(A_s + A_s') = 350 \times 400 + (5{,}71 - 1)(1257 + 1257)$$

$$= 140\,000 + 4{,}71 \times 2514 = 140\,000 + 11\,841 = 151\,841 \text{mm}^2$$

Tyngdpunktens läge (mätt från tryckzonens överkant):

Statiskt moment kring överkant:

$$S_I = b \cdot h \cdot \frac{h}{2} + (\alpha - 1)A_s' \cdot d' + (\alpha - 1)A_s \cdot d$$

$$= 350 \times 400 \times 200 + 4{,}71 \times 1257 \times 28 + 4{,}71 \times 1257 \times 372$$

$$= 28{,}00 \times 10^6 + 0{,}166 \times 10^6 + 2{,}202 \times 10^6 = 30{,}37 \times 10^6 \text{mm}^3$$

$$x_{tp} = \frac{S_I}{A_I} = \frac{30{,}37 \times 10^6}{151\,841} = 200{,}0 \text{ mm} = \frac{h}{2}$$

> **Obs:** Tyngdpunkten sammanfaller med tvärsnittets geometriska mitt ($h/2 = 200$ mm) eftersom armeringen är symmetrisk ($A_s = A_s'$) och symmetriskt placerad ($d' = 28$ mm, $h - d = 28$ mm).

Tröghetsmoment kring tyngdpunkten:

$$I_I = \frac{bh^3}{12} + (\alpha - 1)A_s'(x_{tp} - d')^2 + (\alpha - 1)A_s(d - x_{tp})^2$$

$$= \frac{350 \times 400^3}{12} + 4{,}71 \times 1257 \times (200 - 28)^2 + 4{,}71 \times 1257 \times (372 - 200)^2$$

$$= 1867 \times 10^6 + 5920 \times 29\,584 + 5920 \times 29\,584$$

$$= 1867 \times 10^6 + 175{,}2 \times 10^6 + 175{,}2 \times 10^6 = 2217 \times 10^6 \text{mm}^4$$

Böjdraghållfasthet

Böjdraghållfastheten $f_{ctm,fl}$ tar hänsyn till att den dragna zonen vid böjning inte täcker hela tvärsnittet:

$$f_{ctm,fl} = \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ctm};\, f_{ctm}\right\}$$

$$= \max\left\{\left(1{,}6 - \frac{400}{1000}\right) \cdot 3{,}5;\, 3{,}5\right\} = \max\{4{,}20;\, 3{,}5\} = 4{,}20 \text{ MPa}$$

Sprickmoment M_{cr}

Det omvandlade tvärsnittet analyseras med Naviers formel *(Se teckenregler för Naviers formel)*:

$$\sigma_c(z) = \frac{N}{A_I} + \frac{M}{I_I} \cdot z$$

Normalkraften $N = -15$ kN (tryck) angriper i tvärsnittets tyngdpunkt ($e_I = 0$). Sprickmomentet bestäms genom att sätta $\sigma_c = f_{ctm,fl}$ i den mest dragna fibern. Avståndet från tyngdpunkten till dragsidan:

$$z = h - x_{tp} = 400 - 200 = 200 \text{ mm}$$

Upplösning av Naviers formel för M_{cr}:

$$M_{cr} = \left(f_{ctm,fl} - \frac{N}{A_I}\right) \cdot \frac{I_I}{h - x_{tp}}$$

$$= \left(4{,}20 - \frac{-15 \times 10^3}{151\,841}\right) \times \frac{2217 \times 10^6}{200}$$

$$= (4{,}20 + 0{,}10) \times 11{,}09 \times 10^6 = 4{,}30 \times 11{,}09 \times 10^6 = 47{,}7 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\boxed{M_{cr} = 47{,}7 \text{ kNm}}$$

> **Obs:** Normalkraften $N = -15$ kN ger ett **tryckbidrag** $N/A_I = -0{,}10$ MPa som minskar dragspänningen i den mest dragna fibern. Tryckkraften höjer sprickmomentet jämfört med ren böjning (utan normalkraft) — detta är det omvända mot en konstruktion med normalkraft i drag, vilken sänker sprickmomentet.

Svar fråga a): Sprickmomentet är $M_{cr} = 47{,}7$ kNm.

Spruckna höjden av pelaren

Pelaren spricker där det verkande momentet $M(y)$ överskrider sprickmomentet. Från avsnitt 1:

$$M(y) = 18 + 30\,y \quad [\text{kNm}]$$

Sprickgränsen uppnås vid $M(y_{cr}) = M_{cr}$:

$$18 + 30\,y_{cr} = 47{,}7 \quad \Rightarrow \quad y_{cr} = \frac{47{,}7 - 18}{30} = \frac{29{,}7}{30} = 0{,}990 \text{ m} \approx 990 \text{ mm}$$

Pelaren har **två zoner**:

Zon	Intervall	Höjd	Stadium
Osprucken	$0 \le y \le 0{,}99$ m	≈ 990 mm	I
Sprucken	$0{,}99 \le y \le 2{,}4$ m	≈ 1410 mm	II

Den spruckna höjden:

$$H_{cr} = H - y_{cr} = 2400 - 990 = 1410 \text{ mm} \approx 1{,}41 \text{ m}$$

$$\boxed{H_{cr} \approx 1410 \text{ mm} \quad (\approx 59\% \text{ av pelarhöjden})}$$

> **Obs:** Momentet vid pelartoppen ($M(0) = 18$ kNm) ligger väl under sprickmomentet ($M_{cr} = 47{,}7$ kNm) — den vertikala lastens excentricitet $P \cdot L = 18$ kNm ger ett måttligt begynnelsemoment vid toppen. Omkring 59 % av pelaren befinner sig i Stadium II.

Svar fråga b): Den spruckna höjden är $H_{cr} \approx 1410$ mm ($\approx 59\%$ av pelarhöjden $H = 2400$ mm). Pelaren är osprucken i de översta ≈ 990 mm.

4. Nedböjning i konsolens ände

Den vertikala nedböjningen i konsolens ände beror på pelarens krökning under last. När pelaren böjs av lasterna F_h och P roterar tvärsnittet i toppen med en vinkel θ_{top}. Konsolen, som är fastsatt i pelartoppen, roterar med samma vinkel och armens fria ände sjunker vertikalt:

$$\delta_v = \theta_{\text{top}} \cdot L$$

Rotationen θ_{top} beräknas med **första moment-area-satsen**: arealen under krökningsdiagrammet $\kappa(y)$ längs pelaren, från den fasta änden (inspänningen $y = H$) till den fria änden (toppen $y = 0$):

$$\theta_{\text{top}} = \int_0^H \kappa(y)\, dy = \int_0^H \frac{M(y)}{EI(y)}\, dy$$

Pelaren har **två styvhetszoner** (se avsnitt 3):

- **Osprucken** (Stadium I): $0 \le y \le y_{cr} = 0{,}99$ m
- **Sprucken** (Stadium II): $0{,}99 \le y \le 2{,}4$ m

Tröghetsmoment i Stadium II

Med neutrala lagret $x = 91$ mm och tyngdpunkten $x_{tp} = 95$ mm (se tips i uppgiften) beräknas det omvandlade tröghetsmomentet kring det spruckna tvärsnittets tyngdpunkt:

$$I_{II} = \frac{b\,x^3}{12} + b\,x\Big(x_{tp} - \frac{x}{2}\Big)^2 + (\alpha - 1)\,A_s'\,(x_{tp} - d')^2 + \alpha\,A_s\,(d - x_{tp})^2$$

$$= \frac{350 \times 91^3}{12} + 31\,850 \times 49{,}5^2 + 4{,}71 \times 1257 \times 67^2 + 5{,}71 \times 1257 \times 277^2$$

$$= 22{,}0 \times 10^6 + 78{,}0 \times 10^6 + 26{,}6 \times 10^6 + 551 \times 10^6 = 677 \times 10^6 \text{mm}^4$$

> **Obs:** Det spruckna tröghetsmomentet (677×10^6 mm^4) är bara 31 % av det ospruckna ($I_I = 2217 \times 10^6$ mm^4). Dragarmeringens bidrag (551×10^6, 81 % av I_{II}) dominerar i det spruckna tvärsnittet.

Böjstyvheter

Analysen gäller korttidsrespons, dvs. $E_c = E_{cm} = 35$ GPa:

Stadium I (osprucket):

$$(EI)_I = E_{cm} \cdot I_I = 35 \times 10^6 \times 2{,}217 \times 10^{-3} = 77\,600 \text{kNm}^2$$

Stadium II (sprucket):

$$(EI)_{II} = E_{cm} \cdot I_{II} = 35 \times 10^6 \times 0{,}677 \times 10^{-3} = 23\,700 \text{kNm}^2$$

> **Obs:** Det ospruckna tvärsnittet är $77\,600 / 23\,700 = 3{,}3$ gånger styvare än det spruckna.

Krökningsfördelning

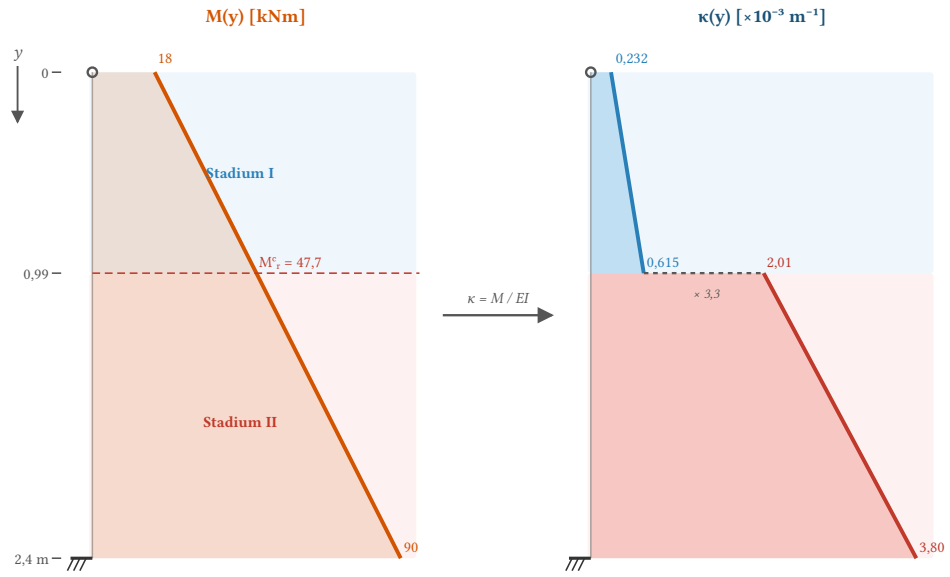
I varje zon beräknas krökningen $\kappa(y) = M(y)/(EI)$ vid nyckeltvärsnitt:

Läge	y [m]	$M(y)$ [kNm]	Stadium	$\kappa \times 10^{-3}$ [m^{-1}]
Pelartopp	0	18	I	$18/77\,600 = 0{,}232$

Läge	y [m]	$M(y)$ [kNm]	Stadium	$\kappa \times 10^{-3}$ [m^{-1}]
Sprickgräns (Std I)	0,99	47,7	I	$47{,}7/77\,600 = 0{,}615$
Sprickgräns (Std II)	0,99	47,7	II	$47{,}7/23\,700 = 2{,}01$
Inspänning	2,4	90	II	$90/23\,700 = 3{,}80$

> **Obs:** Vid sprickgränsen ($y = 0{,}99$ m) finns en **diskontinuitet** i krökningen — den hoppar från $0{,}615 \times 10^{-3}$ till $2{,}01 \times 10^{-3}$ m^{-1} (faktor 3,3) trots att momentet är kontinuerligt ($M = M_{cr} = 47{,}7$ kNm). Det linjära krökningsdiagrammet bryts i en trappstegsform vid styvhetsövergången.

Figur U2.52 visar momentfördelningen $M(y)$ och den resulterande krökningsfördelningen $\kappa(y) = M(y)/(EI)$ längs pelaren:



Figur U2.52 Momentfördelning M(y) och krökningsfördelning κ(y) med Stadium I och II

Delareor och nedböjning — grafiska metoden

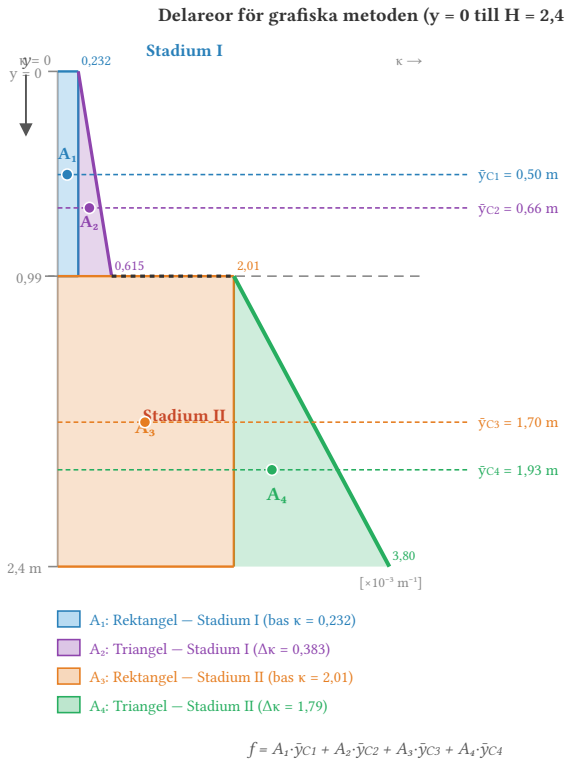
Nedböjningen beräknas med den **grafiska metoden** (andra moment-area-satsen). Pelaren är en konsol (inspänd i botten, fri i toppen). Tangentens lutning vid inspänningen är noll ($\theta(H) = 0$), varför den horisontella förskjutningen vid pelartoppen kan skrivas som:

$$f = \int_0^H \kappa(y) \cdot y \, dy = \sum_i A_i \cdot \bar{y}_{Ci}$$

där A_i är delarean av krökningsdiagrammet mellan pelartoppen ($y = 0$) och inspänningen ($y = H$), och $\bar{y}_{Ci}$ är avståndet från pelartoppen till delareans tyngdpunkt.

Krökningsdiagrammet delas i **fyra** delar — en **rektangel** + **triangel** i den ospruckna zonen och en **rektangel** + **triangel** i den spruckna zonen:

Delareorna A_1–A_4 visas i figur U2.53.



Figur U2.53 Krökningsdiagram med delareor A_1–A_4 för grafiska metoden

1. Rektangel A_1

$(0 \le y \le y_{cr} = 0{,}99$ m): konstant baskrökning $\kappa = \kappa(0) = 0{,}232 \times 10^{-3}$ m^{-1} i Stadium I

$$A_1 = \kappa(0) \times y_{cr} = 0{,}232 \times 10^{-3} \times 0{,}99 = 0{,}230 \times 10^{-3}$$

$$\bar{y}_{C1} = \frac{y_{cr}}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}50 \text{ m}$$

2. Triangel A_2

$(0 \le y \le y_{cr} = 0{,}99$ m): linjärt ökande krökningstillskott från 0 till $\Delta\kappa = \kappa(0{,}99^-) - \kappa(0) = (0{,}615 - 0{,}232) \times 10^{-3} = 0{,}383 \times 10^{-3}$ m^{-1} i Stadium I

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta\kappa \cdot y_{cr} = \frac{1}{2} \times 0{,}383 \times 10^{-3} \times 0{,}99 = 0{,}190 \times 10^{-3}$$

$$\bar{y}_{C2} = \frac{2}{3} \cdot y_{cr} = \frac{2}{3} \times 0{,}99 = 0{,}66 \text{ m}$$

> **Obs:** Kontroll: $A_1 + A_2 = (0{,}230 + 0{,}190) \times 10^{-3} = 0{,}420 \times 10^{-3}$, vilket stämmer med trapetsarealen $(0{,}232 + 0{,}615)/2 \times 0{,}99 = 0{,}419 \times 10^{-3}$.

3. Rektangel A_3

$(0{,}99 \le y \le 2{,}4$ m): konstant baskrökning $\kappa = \kappa(0{,}99^+) = 2{,}01 \times 10^{-3}$ m^{-1} i Stadium II

$$A_3 = \kappa(0{,}99^+) \times (H - y_{cr}) = 2{,}01 \times 10^{-3} \times 1{,}41 = 2{,}834 \times 10^{-3}$$

$$\bar{y}_{C3} = y_{cr} + \frac{H - y_{cr}}{2} = 0{,}99 + \frac{1{,}41}{2} = 1{,}70 \text{ m}$$

4. Triangel A_4

$(0{,}99 \le y \le 2{,}4$ m): linjärt ökande krökningstillskott från 0 till $\Delta\kappa = \kappa(2{,}4) - \kappa(0{,}99^+) = (3{,}80 - 2{,}01) \times 10^{-3} = 1{,}79 \times 10^{-3}$ m^{-1}

$$A_4 = \frac{1}{2}\cdot \Delta\kappa \cdot (H - y_{cr}) = \frac{1}{2}\times 1{,}79\times 10^{-3}\times 1{,}41 = 1{,}262\times 10^{-3}$$

$$\bar{y}_{C4} = y_{cr} + \frac{2}{3}\cdot(H - y_{cr}) = 0{,}99 + \frac{2}{3}\times 1{,}41 = 0{,}99 + 0{,}94 = 1{,}93\ \text{m}$$

Summering

$$f = \sum_{i=1}^{4} A_i \cdot \bar{y}_{Ci}$$

Delarea	$\boldsymbol{A_i}$ **[×** $\mathbf{10^{-3}}$**]**	$\boldsymbol{\bar{y}_{Ci}}$ **[m]**	$\boldsymbol{f_i = A_i\cdot\bar{y}_{Ci}}$ **[mm]**
A_1 (rektangel, Stadium I)	0,230	0,50	0,1
A_2 (triangel, Stadium I)	0,190	0,66	0,1
A_3 (rektangel, Stadium II)	2,834	1,70	4,8
A_4 (triangel, Stadium II)	1,262	1,93	2,4
Summa	4,516		**≈ 7,5 mm**

Den horisontella förskjutningen vid pelartoppen:

$$\boxed{f_h \approx 7{,}5\ \text{mm}}$$

Uppgift 2.9 Nedböjning med superposition

Med elementarfallen i avsnitt 2.8.4:

$$w_q = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5\cdot 4{,}0\cdot 5\,000^4}{384\cdot 5{,}8\cdot 10^{12}} = 5{,}6\ \text{mm}, \qquad w_P = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 5\,000^3}{48\cdot 5{,}8\cdot 10^{12}} = 4{,}5\ \text{mm}$$

Materialet är linjärt elastiskt och båda nedböjningarna är störst i mitten, så de får adderas: $w = 5{,}6 + 4{,}5 = 10{,}1$ mm.

> **Svar:** $w = 10{,}1$ mm $< L/300 = 16{,}7$ mm. Kravet uppfylls.

Uppgift 2.10 Nedböjning av sprucken betongbalk: överslag med ζ

$M = qL^2/8 = 20\cdot 6{,}0^2/8 = 90$ kNm $> M_{cr}$, så mittsnittet är sprucket:

$$\zeta = 1 - 0{,}5\cdot\left(\frac{42{,}9}{90}\right)^2 = 0{,}886$$

Nedböjningen för helt osprucket och helt sprucket tillstånd:

$$w_I = \frac{5\cdot 20\cdot 6\,000^4}{384\cdot 31\,900\cdot 3\,290\cdot 10^6} = 3{,}2\ \text{mm}, \qquad w_{II} = w_I\cdot\frac{I_I}{I_{II}} = 3{,}2\cdot\frac{3\,290}{715} = 14{,}8\ \text{mm}$$

$$w \approx (1-\zeta)\,w_I + \zeta\,w_{II} = 0{,}114\cdot 3{,}2 + 0{,}886\cdot 14{,}8 = 13{,}5\ \text{mm}$$

> **Svar:** $w \approx 13{,}5$ mm, ungefär $L/450$. Med krypning och krympning blir nedböjningen större; se avsnitt 2.9.3.

Uppgift 2.11 Nedböjning av stålbalk

$$w_G = \frac{5\cdot 4{,}0\cdot 5\,400^4}{384\cdot 210\,000\cdot 57{,}9\cdot 10^6} = 3{,}6\ \text{mm}, \qquad w_Q = 3{,}6\cdot\frac{6{,}0}{4{,}0} = 5{,}5\ \text{mm}$$

Karakteristisk kombination: $w = 3{,}6 + 5{,}5 = 9{,}1\ \text{mm} < L/300 = 18\ \text{mm}$. Frekvent kombination: $w = 3{,}6 + 0{,}5\cdot 5{,}5 = 6{,}4$ mm.

> **Svar:** $w_G = 3{,}6$ mm och $w_Q = 5{,}5$ mm; karakteristiskt 9,1 mm, vilket klarar $L/300$ frekvent 6,4 mm.

Uppgift 2.12 Nedböjning av träregel med krypning

$I = 45 \cdot 245^3/12 = 55{,}1 \cdot 10^6$ mm⁴ ger

$$w_G = \frac{5 \cdot 0{,}3 \cdot 4\,200^4}{384 \cdot 11\,000 \cdot 55{,}1 \cdot 10^6} = 2{,}0 \text{ mm}, \qquad w_Q = 2{,}0 \cdot \frac{1{,}2}{0{,}3} = 8{,}0 \text{ mm}$$

$$w_1 = 2{,}0 + 0{,}3 \cdot 8{,}0 = 4{,}4 \text{ mm}, \quad w_2 = 0{,}8 \cdot 4{,}4 = 3{,}5 \text{ mm}, \quad w_3 = 0{,}7 \cdot 8{,}0 = 5{,}6 \text{ mm}$$

> **Svar:** $w_{tot} = 4{,}4 + 3{,}5 + 5{,}6 = 13{,}5$ mm $< L/300 = 14{,}0$ mm. Kravet uppfylls, men med liten marginal; krypningen står för en fjärdedel av nedböjningen.

3 Förband och förankring

Uppgift 3.1 Brottyper i ett skjuvbelastat skruvförband

Beskriv vilka brottyper som kan förekomma i ett skjuvbelastat skruvförband i stål (kategori A). Ange för varje brottyp vad som avgör om den inträffar och hur den beaktas i dimensioneringen enligt EC3-1-8. (Instuderingsfråga 1.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.2 Härledning av största skruvkraft

Ett skruvförband med fyra skruvar i ett rektangulärt mönster belastas i skruvgruppens tyngdpunkt med en vertikal kraft V, en horisontell kraft H och ett moment M i förbandets plan, som i figur 3.14. Skruvarna sitter i $(\pm x_0, \pm y_0)$ räknat från tyngdpunkten. Härled formeln för den största kraften i en enskild skruv. Ange antagandena. (Instuderingsfråga 2.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.3 Spänningar längs en kälsvets och i halssvetsar

1. Redogör för hur spänningsfördelningen ser ut längs en skjuvbelastad kälsvets, till exempel i ett överlappsförband med längsgående svetsar. Hur tar man hänsyn till den vid dimensioneringen? (Instuderingsfråga 3.)
2. En fritt upplagd svetsad I-balk belastas med en punktlast mitt på överflänsen. Härled vilka spänningar som uppstår i kälsvetsarna mellan fläns och liv under punktlasten. (Instuderingsfråga 4.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

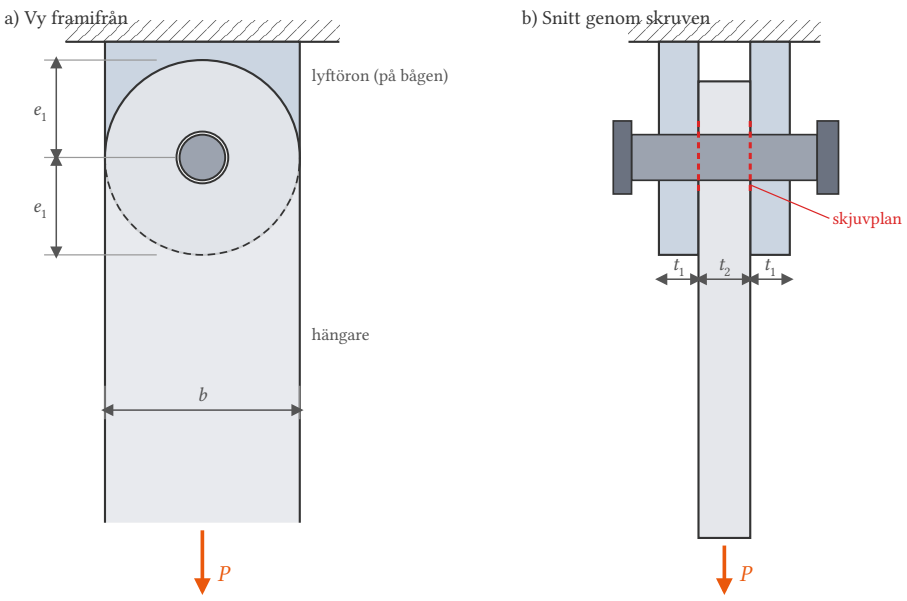
Uppgift 3.4 Spänningsfördelning i kälsvetsar för en belastad platta

En platta är fastsvetsad mot en balk med två kälsvetsar, en på var sida, med längden l och a-måttet a. Plattan belastas med en vertikal kraft V i svetsens mitt och en horisontell kraft H på höjden e över svetsen, som i figur 3.32a. Rita och förklara spänningsfördelningen i kälsvetsarna. (Instuderingsfråga 5.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.5 Skruvförband i en hängare

I en bågbro hänger körbanan i hängare av stål. På bågen sitter två lyftöron, plåtar $t_1 = 16$ mm, och hängarens plåt, $t_2 = 24$ mm, sitter mellan dem. Delarna förbinds med en skruv M30 8.8, se figur U3.1. Alla plåtar är 140 mm breda med halvcirkelformade ändar, så att $e_1 = e_2 = 70$ mm för både lyftöronen och hängaren, och hålen har $d_0 = 33$ mm. Skjuvplanen går genom skruvens stam. Allt stål är S355. Beräkna förbandets dimensionerande bärförmåga P_{Rd}.



Figur U3.1 Hängarens infästning i bågen. a) Vy framifrån. b) Snitt genom skruven med lyftöronen (t_1) och hängaren (t_2). Omritad efter exempelsamlingen, uppgift SF15.

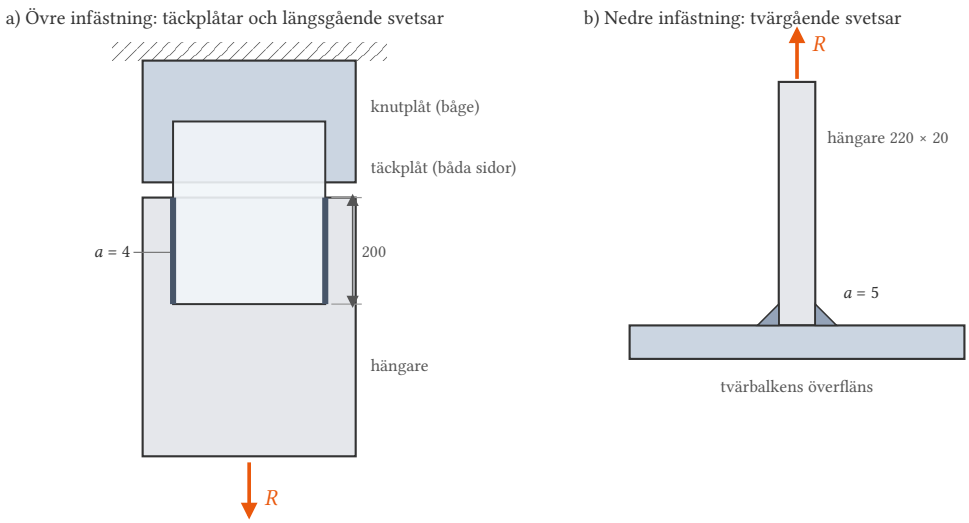
Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.6 Svetsförband i en hängare

Körbanan i en bågbro hänger i hängare med centrumavståndet 6,0 m längs bron. Körbanan är 6,0 m bred och bärs av hängare i två plan, ett på var sida. Den dimensionerande utbredda trafiklasten är $Q = 30$ kN/m² och antas fördelas lika på hängarna vid bromitt. Hängaren är ett plattstål 220 × 20 mm i S355, se figur U3.2:

- **Övre infästning:** hängaren är skarvad mot en knutplåt på bågen med två täckplåtar, en på var sida. Varje täckplåt är fastsvetsad mot hängaren med två längsgående kälsvetsar med $a = 4$ mm och den nominella längden $l = 200$ mm.
- **Nedre infästning:** hängaren är fastsvetsad mot tvärbalkens överfläns med två tvärgående kälsvetsar med $a = 5$ mm längs hängarens bredd, 220 mm.

Kontrollera svetsarna.



Figur U3.2 Hängarens infästningar. a) Övre infästning med täckplåtar och fyra längsgående svetsar mot hängaren. b) Nedre infästning med två tvärgående svetsar. Omritad efter exempelsamlingen, uppgift SF5.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.7 Brottyper och materialsamband i ett skjuvbelastat träförband

1. Vilka brottyper kan uppstå i trävirket respektive i förbindaren i ett skjuvbelastat träförband med stavformiga förbindare (spik, skruv, dymling)?
2. Vilka materialsamband antar man för förbindaren respektive för träet när bärförmågan beräknas? Hur förhåller de sig till det verkliga beteendet?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.8 Rita brottmoderna för ett skjuvbelastat träförband

I ett skjuvbelastat träförband kan de två grundläggande brottyperna, hålkantbrott i träet och flytled i förbindaren, kombineras till olika brottmoder.

1. Rita de sex brottmoderna för ett enskärigt förband mellan virkesdel A (under huvudet) och virkesdel B. Visa förbindarens deformerade form och var flytleder bildas, och beskriv kort vad som händer i varje mod.
2. Vilka brottmoder är möjliga i ett symmetriskt tvåskärigt förband, och varför försvinner de övriga?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.9 Bärförmåga för ett spikat skjuvförband

I en berg- och dalbana av trä tas bromskrafterna från vagnarna upp av spikade skjuvförband. En planka 45 mm är spikad på en bärande regel 150 mm med 16 räfflade trådspikar 150 × 5,1 utan förborrning. Fibrerna är vertikala i båda delarna och kraften verkar parallellt med fibrerna. Virket är C24 och spikarna har $f_{u,k} = 600$ MPa. Konstruktionen står utomhus (klimatklass 3) och bromskraften är en korttidslast. Spikarna sitter med $a_1 \geq 14d$, och övriga avstånd behöver inte kontrolleras.

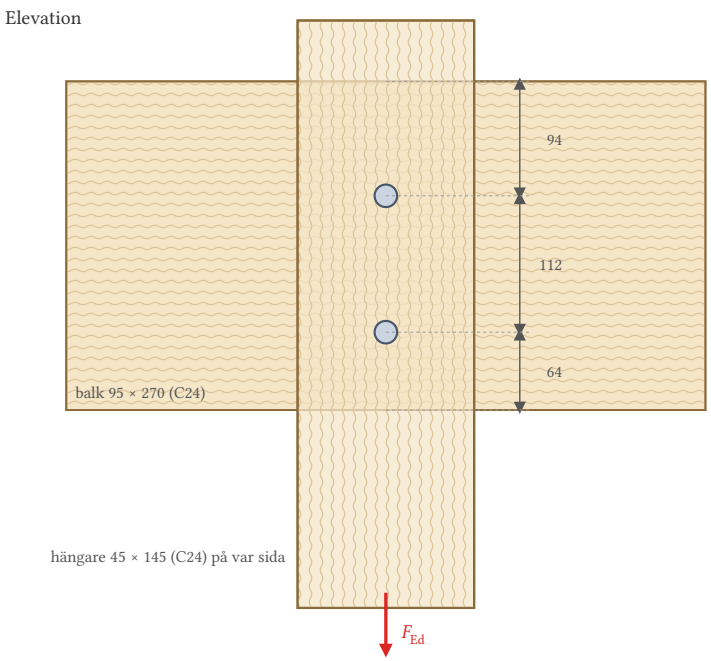
1. Beräkna bäddhållfastheten, spikens flytmoment och inbäddningsdjupen.
2. Beräkna den karakteristiska bärförmågan per spik för alla brottmoder och ange vilken mod som är avgörande.
3. Beräkna förbandets dimensionerande bärförmåga.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.10 Skruvförband mellan hängare och balk

En plattform av trä hänger i hängare som är fastskruvade i en bärande balk (figur U3.3). Balken är 95 × 270 mm och varje hängare består av två reglar 45 × 145 mm, en på var sida om balken. Allt virke är C24. Förbandet har två genomgående skruvar M16 av hållfasthetsklass 4.6, placerade lodrätt över varandra med avståndet 112 mm; den nedre skruven sitter 64 mm från balkens underkant och den övre 94 mm från överkanten. Hängarna fortsätter 50 mm ovanför balken. Konstruktionen står i klimatklass 3 och lasten är av medellång varaktighet.

1. Beräkna bäddhållfastheterna i hängarna och i balken, och skruvens flytmoment.
2. Beräkna den karakteristiska bärförmågan per skjuvplan och den avgörande brottmoden.
3. Beräkna förbandets dimensionerande bärförmåga F_{Rd}.
4. Kontrollera avstånden.



Figur U3.3 Hängare (två reglar, en på var sida) fastskruvade i en balk med två skruvar M16. Måtten i mm. Efter Exempelsamlingen, uppgift TF5.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.11 Sneda sprickor ökar dragkraftsbehovet

1. Förklara med hjälp av en fackverksmodell varför dragkraftsbehovet i längsarmeringen ökar när sneda skjuvsprickor bildas i balklivet.
2. Hur inverkar spricklutningen, och hur kan konstruktören påverka den vid dimensioneringen?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.12 Vidhäftning, spjälkning och förankringsbrott

1. Redogör för hur kraft förs över mellan en kamstång och den omgivande betongen, och förklara varför spjälkeffekter uppstår.
2. Vilka huvudtyper av förankringsbrott kan bli aktuella? Vad avgör vilken typ som inträffar?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.13 Dragkraftskapacitet och förankring vid ändstöd

1. Visa principiellt hur dragkraftskapaciteten varierar längs en armeringsstång, och hur kapaciteten anpassas till dragkraftsbehovet vid avkortning.

En fritt upplagd balk med tvärsnittet 300×500 mm har spännvidden $L = 6{,}0$ m mellan stödens mitt och vilar på 200 mm breda stöd; balkänden ligger i liv med stödets ytterkant och stängerna slutar 30 mm från änden. Balken bär $q_d = 35$ kN/m i brottgränstillståndet. Underkantsarmeringen är 5 ϕ16 B500B med $d = 457$ mm; täckskiktet till stängerna är 35 mm i sidled och nedåt och det fria avståndet mellan stängerna 37,5 mm. Byglarna är tvåskäriga ϕ6 s200 B500B. Betongen är C25/30. Använd $z = 0{,}9d$.

2. Bestäm dragkraftsbehovet vid stödets innerkant med den spricklutning som byglarna medger.
3. Hur långt bakom stödets innerkant måste stängerna nå? Ryms det?
4. Gör om 3 med $\cot\theta = 2{,}5$. Vad visar jämförelsen?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 3.14 Avkortning av överkantsarmering över ett stöd

En balk vilar på stöden A och B med spännvidden 5,0 m och fortsätter som en konsol 2,5 m förbi B. Hela balken bär den jämnt utbredda lasten $q_d = 60$ kN/m i brottgränstillståndet (inklusive egentyngd). Tvärsnittet är 340×500 mm med $d = 450$ mm och $z = 0{,}9d$. Överkantsarmeringen är 4 ϕ20 B500B med täckskiktet 40 mm uppåt. De två yttre stängerna går längs hela balken; de två mittersta ska avslutas på avståndet a från B, ute i spannet AB. Det fria avståndet mellan de två mittersta stängerna är 100 mm, och de ligger långt från balkens sidor. Byglarna är tvåskäriga ϕ8 s200 B500B längs hela balken. Betongen är C25/30.

1. Bestäm stödmomentet vid B, tvärkraften strax till vänster om B och den spricklutning som byglarna medger där.
2. Bestäm förankringslängden för de mittersta stängerna.
3. Bestäm det minsta måttet a så att dragkraftskapaciteten räcker. Använd förskjutningen a_l vid B längs hela sträckan (på säker sida).

Lösning: se slutet av kapitlet.

Lösningar till kapitel 3

Uppgift 3.1 Brottyper i ett skjuvbelastat skruvförband

Det finns två huvudtyper av brott, se figur 3.8: skruven skjuvas av, eller plåten går sönder runt hålet (hålkantbrott).

Skjuvbrott i skruven. Skruvens tvärsnitt skjuvas av i ett skjuvplan. Brottet är sprött och styrs av skruvens brottgräns f_{ub}, arean i skjuvplanet (A i stammen eller A_s i gängan) och antalet skjuvplan. Bärförmågan är $F_{v,Rd} = \alpha_v f_{ub} A / \gamma_{M2}$ per skjuvplan (ekv. (3.2)).

Hålkantbrott. Skruven trycker mot hålkanten och plåten ger efter på något av tre sätt:

- *Dragbrott i plåten* bredvid hålet, när kantavståndet e_2 (eller centrumavståndet p_2) vinkelrätt mot kraften är litet. Beaktas med begränsningen ekv. (3.5) för kantskruvar.
- *Skjuvbrott i plåten*, där en propp mellan hålet och plåtens ände (eller nästa hål) skjuvas ut, när e_1 eller p_1 i kraftens riktning är litet. Beaktas med termerna e_1/d_0 och $p_1/d_0 - 1/2$ i α_b (ekv. (3.4)).
- *Hålförlängning*: materialet framför skruven plasticeras och hålet ovaliseras. Det inträffar när avstånden är stora och är ett segt brott. Beaktas med taket $\alpha_b \le 3$ (och $3 f_{ub}/f_u$ om skruven är mjuk i förhållande till plåten).

Hålkantbärförmågan är $F_{b,Rd} = k_m \alpha_b f_u d t / \gamma_{M2}$ (ekv. (3.3)); den ökar med plåttjockleken, plåtens brottgräns och avstånden till kanter och andra hål.

Dessutom ska de förbundna delarna kontrolleras för dragbrott i nettotvärsnittet genom hålen och för blockbrott, och om gruppens bärförmåga ska räknas som summan av skruvarnas krävs att förbandet är segt, det vill säga att hålkanttrycket och inte skruvens skjuvning blir avgörande (ekv. (3.11)).

Uppgift 3.2 Härledning av största skruvkraft

Antaganden. Plåtarna är stela, alla skruvar har samma linjära styvhet K (skruvkraft proportionell mot förskjutningen), och friktionen mellan plåtarna försummas.

Uppdelning i komposanter. Lasterna delas upp i V, H och M, och deras bidrag beräknas var för sig.

- V och H ger plåten en ren förskjutning. Alla skruvar förskjuts lika och får lika stor kraft: $N_{V,i} = V/n$ och $N_{H,i} = H/n$, med $n = 4$.
- M vrider plåten vinkeln φ kring tyngdpunkten. Skruv i på avståndet $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ förskjuts φr_i vinkelrätt mot radien och får kraften $N_{M,i} = K \varphi r_i$. Momentjämvikt kring tyngdpunkten, $M = \sum N_{M,j} r_j = K\varphi \sum r_j^2$, ger

$$N_{M,i} = \frac{M\, r_i}{\sum r_j^2}$$

där $\sum r_j^2 = \sum (x_j^2 + y_j^2)$ är gruppens polära tröghetsmoment, se figur 3.15.

Komposanter av momentbidraget. Med likformiga trianglar, x åt höger, y nedåt och M positivt medurs:

$$N_{M,x,i} = -\frac{N_{M,i}\, y_i}{r_i} = -\frac{M\, y_i}{\sum r_j^2}, \qquad N_{M,y,i} = \frac{N_{M,i}\, x_i}{r_i} = \frac{M\, x_i}{\sum r_j^2}$$

Total kraft. Komposanterna adderas och resultanten bildas (ekv. (3.17) och ekv. (3.18)):

$$N_i = \sqrt{\left(\frac{H}{n} - \frac{M\, y_i}{\sum r_j^2}\right)^2 + \left(\frac{V}{n} + \frac{M\, x_i}{\sum r_j^2}\right)^2}$$

Fyra skruvar. Alla skruvar har samma $r^2 = x_0^2 + y_0^2$, så $\sum r_j^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)$. Med positiva V, H och M samverkar bidragen i skruven uppe till höger, $(x_0, -y_0)$, som får den största kraften:

$$N_{max} = \sqrt{\left(\frac{H}{4} + \frac{M\, y_0}{4(x_0^2 + y_0^2)}\right)^2 + \left(\frac{V}{4} + \frac{M\, x_0}{4(x_0^2 + y_0^2)}\right)^2}$$

> **Svar:** Den största skruvkraften är N_{max} ovan. Den jämförs med skruvens bärförmåga $F_{v,Rd}$ och $F_{b,Rd}$. Ett räknat exempel finns i exempel 3.3.

Uppgift 3.3 Spänningar längs en kälsvets och i halssvetsar

1. Längsgående svets.

I dimensioneringen räknar man med en jämnt fördelad skjuvspänning $\tau_\parallel = P_s/(aL)$, där P_s är kraften per svets, a a-måttet och L den nominella svetslängden. I elastiskt stadium är fördelningen ojämn, se figur 3.28: plåtarna töjs olika mycket längs förbandet, så den relativa förskjutningen mellan dem, och därmed skjuvspänningen, är störst vid svetsens ändar och minst i mitten. Ojämnheten ökar med svetsens längd och minskar med plåtarnas tvärsnittsarea. När lasten ökar plasticeras ändarna och spänningen omfördelas mot mitten. I en kort svets hinner fördelningen bli nästan jämn före brott, så medelspänningen är ett riktigt mått. I en lång svets går ändarna till brott innan omfördelningen är fullständig. Därför reduceras bärförmågan med $\beta_{Lw,1}$ enligt ekv. (3.25) när överlappet är längre än $150a$. Reduktionen gäller inte halssvetsar i balkar, där spänningen följer grundmaterialet.

2. Halssvetsar under en punktlast.

Studera ett balkelement med längden $\mathrm{d}x$, se figur 3.29. Momentjämvikt ger $M - (M + \mathrm{d}M) + V\,\mathrm{d}x = 0$, alltså $V = \mathrm{d}M/\mathrm{d}x$. Flänskraften är $F = (M/I)(h/2)A_f$, och den ändras över elementet med $\mathrm{d}F = \mathrm{d}M\, S/I$, där $S = A_f h/2$ är flänsens statiska moment. Jämvikt för flänsen, som är frilagd genom de två svetsarna, ger

$$\tau_\parallel \cdot 2a \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}F = \frac{V\,\mathrm{d}x\, S}{I} \quad \Rightarrow \quad \tau_\parallel = \frac{V S}{I \cdot 2a}$$

För en punktlast P mitt på balken är $\mid V \mid = P/2$ på båda sidor om lasten.

Under lasten måste dessutom lasten föras från flänsen till livet genom svetsarna, vinkelrätt mot deras längdriktning, se figur 3.30. Med lastspridning genom flänsen till längden $l = s_s + 2t_f$ och två svetsar blir

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{P}{2\sqrt{2}\, a\, l}$$

> **Svar:** Under punktlasten verkar alla tre spänningarna $\tau_\parallel$, $\sigma_\perp$ och $\tau_\perp$ samtidigt i översvetsarna och kontrolleras tillsammans med ekv. (3.23). Utanför lasten verkar bara $\tau_\parallel$. Ett räknat exempel finns i exempel 3.5.

Uppgift 3.4 Spänningsfördelning i kälsvetsar för en belastad platta

Ekvivalent belastning. Lasterna flyttas till svetsgruppens tyngdpunkt i svetsarnas mitt. Där verkar V, H och momentet $M = H \cdot e$, se figur 3.32b.

Spänningar. Varje last ger sitt bidrag:

- H verkar längs svetsarna och ger en skjuvspänning som är konstant längs svetsen: $\tau_{\parallel} = H/(2\,l\,a)$.
- V verkar vinkelrätt mot svetsarna. Den ger normal- och skjuvspänning i beräkningssnittet, lika stora och konstanta längs svetsen: $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} = V/(2\sqrt{2}\,l\,a)$.
- M böjer svetsarna i deras plan och ger en spänning som varierar linjärt längs svetsen, från drag i ena änden till tryck i den andra: $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} = M/(2\sqrt{2}\,W_w)$ i ändarna, med $W_w = a\,l^2/6$ för en svets.

Bidragen från V och M adderas. I den ände där båda ger drag (eller båda tryck) är $\sigma_{\perp}$ och $\tau_{\perp}$ störst, och där kontrolleras svetsen med alla tre spänningarna i ekv. (3.23).

> **Svar:** $\tau_{\parallel}$ är konstant, $\sigma_{\perp} = \tau_{\perp}$ består av en konstant del från V och en linjärt varierande del från $M = He$ se figur 3.32b och räkneexemplet exempel 3.6.

Uppgift 3.5 Skruvförband i en hängare

Material. S355: $f_y = 355$ MPa, $f_u = 490$ MPa. Skruv 8.8: $f_{ub} = 800$ MPa; M30 har $A = 707$ mm² (tabell 3.1).

Skjuvning. Förbandet är tvåskärigt. Med skjuvplanen i stammen ger ekv. (3.2)

$$F_{v,Rd} = 2 \cdot \frac{0{,}6 \cdot 800 \cdot 707}{1{,}25} = 543{,}0 \text{ kN}$$

Hålkanttryck. Skruven är en ändskruv i alla plåtar. Ekv. (3.4) ger

$$\alpha_b = \min\left\{\frac{70}{33};\, 3 \cdot \frac{800}{490};\, 3\right\} = \min\{2{,}121;\, 4{,}90;\, 3\} = 2{,}121$$

Hängaren ($t_2 = 24$ mm) är tunnare än de två lyftöronen tillsammans ($2 \cdot 16 = 32$ mm) och avgör:

$$F_{b,Rd} = \frac{1{,}0 \cdot 2{,}121 \cdot 490 \cdot 30 \cdot 24}{1{,}25} = 598{,}7 \text{ kN}$$

Begränsningen för kantskruvar (ekv. (3.5)) ger $2{,}0 \cdot (70 - 16{,}5) \cdot 24 \cdot 490/1{,}25 = 1\,007$ kN och avgör inte.

Hängarens tvärsnitt. Nettotvärsnittet genom hålet ger $N_{u,Rd} = (140 - 33) \cdot 24 \cdot 490/1{,}25 = 1\,007$ kN och bruttotvärsnittet $N_{pl,Rd} = 140 \cdot 24 \cdot 355 = 1\,193$ kN.

> **Svar:** $P_{Rd} = \min\{543;\, 599;\, 1\,007\} = 543$ kN; skruvens skjuvbärförmåga avgör. Om gängan hade nått in i skjuvplanen hade $F_{v,Rd}$ blivit $2 \cdot 0{,}6 \cdot 800 \cdot 561/1{,}25 = 431$ kN. Det lönar sig alltså att ange en skruvlängd som håller gängan utanför skjuvplanen.

Uppgift 3.6 Svetsförband i en hängare

Last i hängaren. Varje hängare bär halva körbanans bredd på längden 6,0 m:

$$R = Q \cdot \frac{6{,}0}{2} \cdot 6{,}0 = 30 \cdot 3{,}0 \cdot 6{,}0 = 540 \text{ kN}$$

Gränsvärden. S355: $f_u = 490$ MPa och $\beta_w = 0{,}90$, så $f_u/(\beta_w \gamma_{M2}) = 435{,}6$ MPa och $0{,}9 f_u/\gamma_{M2} = 352{,}8$ MPa (tabell 3.5).

Övre infästning. Kraften går längs de fyra svetsarna, och ekv. (3.22) ger

$$\tau_{\parallel} = \frac{R}{4\,a\,l} = \frac{540 \cdot 10^3}{4 \cdot 4 \cdot 200} = 168{,}8 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{3} \cdot 168{,}8 = 292{,}3 \text{ MPa} \le 435{,}6 \text{ MPa}$$

Överlappet är 200 mm $\le 150a = 600$ mm, så ingen reduktion för lång svets behövs. Utnyttjandegraden är 0,67.

Nedre infästning. Kraften är vinkelrät mot de två svetsarna. Om svetsarna har fullt mått över hela bredden ger ekv. (3.21)

$$\sigma_\perp = \tau_\perp = \frac{R}{2\sqrt{2}\,a\,l} = \frac{540\cdot 10^3}{2\sqrt{2}\cdot 5\cdot 220} = 173{,}6\ \text{MPa}$$

$$\sqrt{173{,}6^2 + 3\cdot 173{,}6^2} = 2\cdot 173{,}6 = 347{,}1\ \text{MPa} \le 435{,}6\ \text{MPa}$$

och $\sigma_\perp = 173{,}6$ MPa $\le 352{,}8$ MPa.

Om svetsarna slutar rakt av vid hängarens kanter räknas den nominella längden $l = 220 - 2\cdot 5 = 210$ mm (ekv. (3.20)), vilket ger $\sigma_\perp = \tau_\perp = 181{,}8$ MPa och jämförelsespänningen 363,7 MPa, fortfarande under 435,6 MPa.

> **Svar:** Båda infästningarna klarar lasten. Den nedre är mest utnyttjad (0,80, eller 0,83 med reducerad längd) trots större a-mått, eftersom svetslängden där är kortare och bara två svetsar delar på kraften.

Uppgift 3.7 Brottyper och materialsamband i ett skjuvbelastat träförband

1. Brottyper.

I träet kan bäddhållfastheten (hålkanthållfastheten) överskridas: träet närmast förbindaren trycks sönder lokalt och förbindaren pressas in i träet, så att hålet ovaliseras. Det är det hålkantbrott som ingår i Johansens modell. Träet kan också gå till sprött brott genom att det skjuvas ut eller klyvs längs fibrerna, till exempel mellan förbindaren och en belastad ände eller längs en rad förbindare. Dessa spröda brott förhindras med tillräckliga avstånd och kontrolleras separat (avsnitt 3.9.5).

I förbindaren kan flytspänningen överskridas i böjning, så att förbindaren bildar en **flytled**. Förbindaren antas däremot inte skjuvas av: den är av stål och tillräckligt grov för att det inte ska inträffa.

I ett skjuvbelastat förband kombineras de två grundtyperna, hålkantbrott i träet och flytleder i förbindaren, till de brottmoder som visas i figur 3.38.

2. Materialsamband.

Både förbindaren och träet antas vara **stelplastiska** (figur 3.37):

- Träet deformeras inte alls förrän bäddhållfastheten f_h nås, och därefter deformeras det obegränsat vid konstant spänning.
- Förbindaren är rak tills momentet når flytmomentet M_y, och då bildas en led som roterar vid konstant moment.

I verkligheten är båda sambanden olinjära. Träets last–intryckningskurva är först ungefär linjär och böjer sedan av mot en platå. Förbindarens moment–rotationskurva fortsätter att stiga efter flytning, eftersom tvärsnittet plasticeras gradvis och stålet hårdnar. Den stelplastiska idealiseringen gör att bärförmågan kan beräknas med enkla jämviktsvillkor, och flytmomentet $M_{y,k} = 0{,}3\,f_{u,k}\,d^{2{,}6}$ är anpassat till försök så att det motsvarar de vinkeländringar som uppstår i verkliga förband (Flytmoment).

Uppgift 3.8 Rita brottmoderna för ett skjuvbelastat träförband

1. Enskärigt förband.

Brottmoderna visas i figur 3.38, med A = del 1 och B = del 2:

- **a) Hålkantbrott i A.** Förbindaren förblir rak och trycks in i A längs hela dess tjocklek; B är så tjock eller stark att den inte påverkas.
- **b) Hålkantbrott i B.** Samma sak i B.
- **c) Förbindaren snedställs.** Förbindaren förblir rak men vrids som en stel kropp och trycks in i båda delarna. I varje del byter bäddspänningen riktning vid rotationspunkten.
- **d) Flytled i B.** En flytled bildas i B, medan förbindaren vrids som en stel kropp i A.
- **e) Flytled i A.** En flytled bildas i A, medan förbindaren vrids i B.

- **f) Flytled i A och i B.** En flytled i varje del. Bara den korta biten mellan lederna rör sig; ytterdelarna ligger stilla.

Moderna a–c inträffar med tunna virkesdelar och grova, styva förbindare, moderna d–f med tjocka virkesdelar och slanka förbindare. Den mod som kräver lägst last är den som inträffar.

2. Tvåskärigt förband.

I ett symmetriskt tvåskärigt förband (två sidodelar och en mittdel) är bara fyra moder möjliga (figur 3.42): hålkantbrott i sidodelarna (a), hålkantbrott i mittdelen (b), två flytleder i mittdelen medan förbindaren vrids i sidodelarna (d), och fyra flytleder, två i mittdelen och en i varje sidodel (f).

Av symmetriskäl är förbindaren vågrät mitt i mittdelen. Den kan därför inte vridas som en stel kropp i mittdelen, och moderna c och e, som kräver det, kan inte uppstå. I äldre kursmaterial och i EC5:2004 betecknas de tvåskäriga moderna med egna bokstäver (g–k).

Uppgift 3.9 Bärförmåga för ett spikat skjuvförband

1. Material och inbäddningsdjup.

Med $\rho_k = 350$ kg/m³ ger ekv. (3.47)

$$f_{h,k} = 0{,}082 \cdot 350 \cdot 5{,}1^{-0{,}3} = 17{,}60 \text{ MPa}$$

i båda delarna, så $\beta = 1$. Räfflad trådspik räknas som kvadratisk (ekv. (3.31) gånger 1,5):

$$M_{y,k} = 1{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 600 \cdot 5{,}1^{2{,}6} = 18\,670 \text{ Nmm}$$

Inbäddningsdjupen är $t_{h1} = 45$ mm och, utan spetsen $l_p = 2{,}5 \cdot 5{,}1 = 12{,}75$ mm,

$$t_{h2} = 150 - 45 - 12{,}75 = 92{,}25 \text{ mm} \geq 8d = 40{,}8 \text{ mm}$$

2. Brottmoder.

ekv. (3.38)–ekv. (3.41) med $\beta = 1$ och $\tau = 92{,}25/45 = 2{,}05$ ger $F_a = 4\,040$ N, $F_b = 8\,282$ N, $F_c = 2\,807$ N, $F_d = 1\,820$ N, $F_e = 3\,108$ N och $F_f = 2\,105$ N. Till exempel ger mod d, med $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 12 \cdot 18\,670/(17{,}60 \cdot 5{,}1 \cdot 45^2) = 1{,}232$,

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{17{,}60 \cdot 45 \cdot 5{,}1}{3}\left[\sqrt{4 + 1{,}232} - 1\right] = 1\,820 \text{ N}$$

och mod f

$$F_f = 1{,}15 \cdot \sqrt{2 \cdot 18\,670 \cdot 17{,}60 \cdot 5{,}1} = 2\,105 \text{ N}$$

Mod d är avgörande, $F_{D,k} = 1{,}82$ kN: flytled i regeln och spiken vriden i plankan.

3. Dimensionerande bärförmåga.

Klimatklass 3 och korttidslast ger $k_{mod} = 0{,}80$ (tabell 1.6). Med ekv. (3.50), utan linverkan,

$$F_{v,d} = 0{,}80 \cdot \frac{1\,820}{1{,}30} = 1\,120 \text{ N}$$

Med $a_1 \geq 14d$ är $n_{ef} = n = 16$, och ekv. (3.51) ger

$$F_{v,Rd} = 16 \cdot 1 \cdot 1\,120 = 17\,920 \text{ N}$$

> **Svar:** Förbandet bär $F_{v,Rd} = 17{,}9$ kN. Plankan på 45 mm är relativt tunn för en spik med $d = 5{,}1$ mm, så mod d och inte mod f är avgörande.

Uppgift 3.10 Skruvförband mellan hängare och balk

1. Material.

Förbandet är tvåskärigt med hängarna som sidodelar (del 1) och balken som mittdel (del 2). Kraften är lodrät: parallell med fibrerna i hängarna ($\alpha = 0$) men vinkelrät mot fibrerna i balken ($\alpha = 90°$). Ekv. (3.48) och ekv. (3.49) ger med $\rho_k = 350$ kg/m³ och $k_{90} = 1{,}35 + 0{,}015 \cdot 16 = 1{,}59$

$$f_{h,1,k} = 0{,}082 \cdot (1 - 0{,}16) \cdot 350 = 24{,}11 \text{ MPa}$$

$$f_{h,2,k} = 24{,}11 / 1{,}59 = 15{,}16 \text{ MPa}$$

så $\beta = 15{,}16/24{,}11 = 0{,}629$. Med $f_{u,k} = 400$ MPa:

$$M_{y,k} = 0{,}3 \cdot 400 \cdot 16^{2{,}6} = 162\,100 \text{ Nmm}$$

2. Brottmoder.

$t_{h1} = 45$ mm och $t_{h2} = 95/2 = 47{,}5$ mm. Moderna a, b, d och f:

$$F_a = 24{,}11 \cdot 45 \cdot 16 = 17\,360 \text{ N}$$

$$F_b = 15{,}16 \cdot 47{,}5 \cdot 16 = 11\,520 \text{ N}$$

Mod d, med $2\beta(1+\beta) = 2{,}049$ och $4\beta(2+\beta)\mu_1 = 1{,}373$ (ekv. (3.40)):

$$F_d = 1{,}05 \cdot \frac{17\,360}{2{,}629}\left[\sqrt{2{,}049 + 1{,}373} - 0{,}629\right] = 8\,460 \text{ N}$$

Mod f:

$$F_f = 1{,}15 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}629}{1{,}629}} \cdot \sqrt{2 \cdot 162\,100 \cdot 24{,}11 \cdot 16} = 11\,300 \text{ N}$$

Mod d är avgörande, $F_{D,k} = 8{,}46$ kN per skjuvplan: skruven bildar flytleder i balken, där bäddhållfastheten är lägst, och vrids i hängarna.

3. Förbandets bärförmåga.

Klimatklass 3 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}70$ (tabell 1.6):

$$F_{v,d} = 0{,}70 \cdot \frac{8\,460}{1{,}30} = 4\,560 \text{ N}$$

De två skruvarna sitter i en rad parallellt med fibrerna i hängarna, så där gäller ekv. (3.52) med $a_1 = 112$ mm:

$$n_{ef} = \min\left\{2;\, 2^{0{,}9} \cdot \sqrt[4]{\frac{112}{13 \cdot 16}}\right\}$$

$$= 1{,}866 \cdot 0{,}857 = 1{,}60$$

I balken ligger raden vinkelrätt mot fibrerna, och där räknas båda skruvarna fullt ut. Det minsta värdet avgör:

$$F_{Rd} = n_{ef} \cdot n_s \cdot F_{v,d} = 1{,}60 \cdot 2 \cdot 4\,560 = 14\,600 \text{ N}$$

4. Avstånd

(tabell 3.10, skruv $d = 16$ mm):

- Hängarna, kraft parallellt med fibrerna. Skruvarna trycker hängarnas trä uppåt, så överänden är belastad: $a_{3,t} = 94 + 50 = 144 \geq \max\{7d; 80\} = 112$ mm. Avståndet mellan skruvarna $a_1 = 112 \geq 5d = 80$ mm och kantavståndet $a_{4,c} = 72{,}5 \geq 3d = 48$ mm.
- Balken, kraft vinkelrätt mot fibrerna. Skruvarna trycker balken nedåt, så underkanten är belastad: $a_{4,t} = 64 \geq 4d = 64$ mm, och överkanten obelastad: $a_{4,c} = 94 \geq 3d = 48$ mm. Avståndet vinkelrätt mot fibrerna $a_2 = 112 \geq 4d = 64$ mm.

> **Svar:** Förbandet bär $F_{Rd} = 14{,}6$ kN per hängare. Avstånden är uppfyllda, det belastade kantavståndet i balken precis. Eftersom balken belastas vinkelrätt mot fibrerna ska den också kontrolleras för klyvning enligt EC5 11.6.

Uppgift 3.11 Sneda sprickor ökar dragkraftsbehovet

1. När livet har spruckit snett bärs tvärkraften av sneda trycksträvor mellan sprickorna, och balken kan beskrivas som ett fackverk med tryckzonen som överram, längsarmeringen som underram och byglarna som dragna vertikaler (figur 3.49). Ett vertikalt snitt skär strävorna. Deras resultant har den vertikala komponenten V_{Ed} och dessutom en horisontell tryckkomponent $N_{Vd} = V_{Ed}\cot\theta$. Eftersom det inte finns någon yttre normalkraft måste ramarna tillsammans ta upp lika mycket drag, och momentjämvikt kring strävresultanten mitt mellan ramarna fördelar det lika:

$$F_{td} = \frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed}\cot\theta}{2}, \qquad F_{cd} = \frac{M_{Ed}}{z} - \frac{V_{Ed}\cot\theta}{2}$$

Dragkraften i armeringen blir alltså större än M_{Ed}/z, ekv. (3.56). Ett annat sätt att se det: armeringskraften där en sned spricka börjar bestäms av momentet där sprickan når tryckzonen, en bit längre in mot fältet där momentet är större. Tillskottet motsvarar att momentkurvan förskjuts sträckan $a_l = z\cot\theta/2$ (ekv. (3.60)).

2. Tillskottet $V_{Ed}\cot\theta/2$ växer när strävorna blir flackare: från $0{,}5V_{Ed}$ vid 45° till $1{,}25V_{Ed}$ vid $\cot\theta = 2{,}5$ (figur 3.50). Lutningen väljs i fackverksmodellen och ska vara densamma i alla kontroller. Byglarna som korsar en spricka med längden $z\cot\theta$ ska bära tvärkraften, så den minsta möjliga lutningen är $\cot\theta = V_{Ed}s/(zA_{sw}f_{ywd})$ (ekv. (3.58)). **Mer tvärkraftsarmering ger brantare strävor**, eftersom tvärkraften då lyfts upp på en kortare sträcka, och därmed ett mindre dragkraftsbehov. Konstruktören kan alltså flytta armering mellan byglar och längsarmering, till exempel lägga fler byglar nära ett stöd där förankringen är svår. Brantare än 45° får strävorna dock inte antas.

Uppgift 3.12 Vidhäftning, spjälkning och förankringsbrott

1. Kraften förs över genom vidhäftningsspänningar längs stångens mantelyta. Vid små krafter bär adhesionen mellan stål och cementpasta; den bryts vid mycket liten glidning. Därefter trycker kammarna mot betongen framför sig (förtagningseffekt), och när betongen mellan kammarna har krossats återstår friktion. Kammarnas kontaktkrafter är riktade snett utåt med vinkeln β mot stången (figur 3.53a). Den längsgående komponenten är vidhäftningsspänningen τ_b den radiella komponenten $\tau_b\tan\beta$ trycker betongen utåt. Snedsprickor bildas från kammarnas toppar, och kontaktkrafterna sprids i koniska tryckskal kring stången.

Det radiella trycket fungerar som ett inre tryck i ett rör och måste balanseras av dragspänningar i ringriktningen i betongen runt stången (figur 3.53b). Den tunnaste delen av ringen, täckskiktet eller betongen mellan två stänger, spricker först när draghållfastheten nås: en **spjälkspricka** längs stången. Kapaciteten mot spjälkning växer med förhållandet c/ϕ och med betongens draghållfasthet (ekv. (3.63)).

2. Två huvudtyper (figur 3.54):

- **Spjälkbrott**: vid litet täckskikt eller tätt liggande stänger och utan tillräcklig tvärarmering sprider sig spjälksprickorna tills täckskiktet lossnar. Brottet är plötsligt och sprött, och det är den normala brottypen i balkar och plattor.
- **Utdragsbrott**: är stången väl innesluten (täckskikt större än ungefär 3ϕ, stångavstånd större än ungefär 6ϕ) kan ringen inte spricka igenom. Betongen mellan kammarna skjuvas i stället av och stången dras ut. Det är den övre gränsen för förankringskapaciteten.

Mellan dem ligger utdragsbrott med spjälksprickor, där tvärarmering håller ihop betongen. Avgörande är alltså täckskikt och stångavstånd, tvärarmering och tvärtryck. I EC2:2023 syns det i det nominella täckskiktet c_d, som är begränsat till $3{,}75\phi$ utan och 6ϕ med omslutande armering eller tvärtryck (ekv. (3.66), ekv. (3.67)); gränserna motsvarar utdragsbrottet.

Uppgift 3.13 Dragkraftskapacitet och förankring vid ändstöd

1. Kapaciteten är noll vid stångänden och växer linjärt längs en kapacitetslinje, med den lutning som vidhäftningen tillåter, tills flytkraften $f_{yd}A_{si}$ nås efter förankringslängden l_{bd} därefter är den konstant (figur 3.56). Flera stänger som slutar i samma snitt ger en brantare linje. Vid avkortning läggs stänger av olika längd så att summan av gruppernas kapaciteter, en trappa med ramper över l_{bd}, ligger utanför den förskjutna

behovskurvan i varje snitt (figur 3.62). Avkortade stänger får sluta där den förskjutna behovskurvan når de kvarvarande stängernas kapacitet, om rampen är brantare än behovskurvan (ekv. (3.69)).

2. $z = 0{,}9 \cdot 457 = 411$ mm. Vid innerkanten, $x = 0{,}1$ m:

$$V_{Ed} = 35 \cdot (3{,}0 - 0{,}1) = 101{,}5 \text{ kN}$$

$$\frac{M_{Ed}}{z} = \frac{35 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}9/2}{0{,}411} = \frac{10{,}3}{0{,}411} = 25{,}1 \text{ kN}$$

Med $A_{sw} = 2 \cdot 28{,}3 = 56{,}5$ mm² ger ekv. (3.58)

$$\cot\theta = \frac{101{,}5 \cdot 10^3 \cdot 200}{411 \cdot 56{,}5 \cdot 435} = 2{,}01$$

och ekv. (3.70)

$$F_E = 25{,}1 + \frac{101{,}5 \cdot 2{,}01}{2} = 25{,}1 + 101{,}8 = 126{,}9 \text{ kN}$$

3. $\sigma_{sd} = 126{,}9 \cdot 10^3/(5 \cdot 201) = 126$ MPa och $c_d = \min\{0{,}5 \cdot 37{,}5;\ 35;\ 35;\ 60\} = 18{,}75$ mm. Goda vidhäftningsförhållanden. Ekv. (3.65):

$$l_{bd} = 50 \cdot 16 \cdot \left(\frac{126}{435}\right)^{3/2} \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}928 \cdot \left(\frac{24}{18{,}75}\right)^{1/2} = 800 \cdot 0{,}156 \cdot 0{,}928 \cdot 1{,}131 = 131 \text{ mm}$$

Minimivärdet $10\phi = 160$ mm gäller. Tillgängligt är $200 - 30 = 170$ mm ≥ 160 mm.

> **Svar:** Stängerna ska nå minst 160 mm bakom stödets innerkant, och det ryms.

4. Med $\cot\theta = 2{,}5$ blir $F_E = 25{,}1 + 101{,}5 \cdot 1{,}25 = 152{,}0$ kN och $\sigma_{sd} = 151$ MPa:

$$l_{bd} = 800 \cdot \left(\frac{151}{435}\right)^{3/2} \cdot 0{,}928 \cdot 1{,}131 = 172 \text{ mm} > 170 \text{ mm}$$

Med den flackaste strävlutningen ryms förankringen inte längre. Genom att räkna med den lutning som byglarna faktiskt medger blir dragkraftsbehovet 20 % mindre och förankringen går ihop. Den äldre lösningen i exempelsamlingen räknade på samma sätt med byglarnas spricklutning.

Uppgift 3.14 Avkortning av överkantsarmering över ett stöd

1. Momentjämvikt kring B ger $R_A \cdot 5{,}0 = 60 \cdot 5{,}0^2/2 - 60 \cdot 2{,}5^2/2$, alltså $R_A = 112{,}5$ kN och $R_B = 60 \cdot 7{,}5 - 112{,}5 = 337{,}5$ kN.

$$M_B = -\frac{q_d \cdot 2{,}5^2}{2} = -\frac{60 \cdot 2{,}5^2}{2} = -187{,}5 \text{ kNm}$$

$$V_{Ed} = 112{,}5 - 60 \cdot 5{,}0 = -187{,}5 \text{ kN}$$

Med $z = 405$ mm och $A_{sw} = 2 \cdot 50{,}3 = 101$ mm² ger ekv. (3.58)

$$\cot\theta = \frac{187{,}5 \cdot 10^3 \cdot 200}{405 \cdot 101 \cdot 435} = 2{,}12 \leq 2{,}5, \qquad a_l = \frac{405 \cdot 2{,}12}{2} = 429 \text{ mm}$$

2. Överkantsstängerna ligger 50 mm under gjutytan i en 500 mm hög balk, alltså dåliga vidhäftningsförhållanden: $k_{cp} = 1{,}2$. Ekv. (3.66) ger $c_d = \min\{0{,}5 \cdot 100;\ c_x;\ 40;\ 75\} = 40$ mm. För full spänning ger ekv. (3.65)

$$l_{bd} = 50 \cdot 1{,}2 \cdot 20 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \left(\frac{30}{40}\right)^{1/2} = 1\,200 \cdot 0{,}866 = 1\,039 \text{ mm}$$

3. Behov och kapaciteter:

$$\frac{|\,M_B|}{z} = \frac{187{,}5}{0{,}405} = 463 \text{ kN}$$

$$4\,\phi 20 : 4 \cdot 314 \cdot 435 = 547\ \text{kN}, \qquad 2\,\phi 20 : 273\ \text{kN}$$

Den förskjutna behovskurvan har platån 463 kN ut till $a_l = 0{,}429$ m från B. Därefter avtar den: med avståndet u från B är $|\,M(u)| = 187{,}5 - 187{,}5u + 30u^2$, och den förskjutna kurvan når 273 kN ($|\,M\,| = 110{,}7$ kNm) vid $u = 0{,}441 + 0{,}429 = 0{,}870$ m.

De mittersta stängernas kapacitet växer med $273/1{,}039 = 263$ kN/m från stångänden. Behovskurvan är brantare: där den når 273 kN avtar den med $(187{,}5 - 60 \cdot 0{,}441)/0{,}405 = 398$ kN/m. Stängerna kan därför inte sluta vid $u = 0{,}870$ m. Med samma resonemang som bakom ekv. (3.69) avgör i stället platåns slut, där hela behovet 463 kN ska nås:

$$a = a_l + l_{bd} \cdot \frac{463 - 273}{273} = 0{,}429 + 1{,}039 \cdot 0{,}694 = 1{,}15\ \text{m}$$

Längre ut ligger rampen ovanför den avtagande behovskurvan.

> **Svar:** De mittersta stängerna ska dras minst $a = 1{,}15$ m förbi B, nästan ända till momentnollpunkten 1,25 m från B. De långa förankringslängderna (dåliga vidhäftningsförhållanden och $\phi 20$) gör att avkortningen ger liten besparing här. Exempelsamlingens lösning enligt den äldre utgåvan gav 1,03 m.

4 Knäckning

Uppgift 4.1 Moment, utböjning och stabilitet i en pelare

1. Redogör för hur momentet i en pelare påverkas av utböjning och imperfektioner, och hur det inverkar på stabiliteten. (Instuderingsfråga 1.)
2. En ledad pelare har längden $L = 4{,}0$ m, böjstyvheten $EI = 600$ kNm² och en initialkrokighet $e_0 = 10$ mm i mitten. Beräkna Eulerlasten, den totala excentriciteten och momentet i mitten vid $N = 150$ kN och vid $N = 300$ kN. Vid vilken last blir pelaren instabil om materialet är linjärt elastiskt?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.2 Eulers knäcklast och dimensionering av träpelare

Knäcklasten för en centriskt belastad pelare som är ledad i båda ändarna ges enligt klassisk Eulerteori av

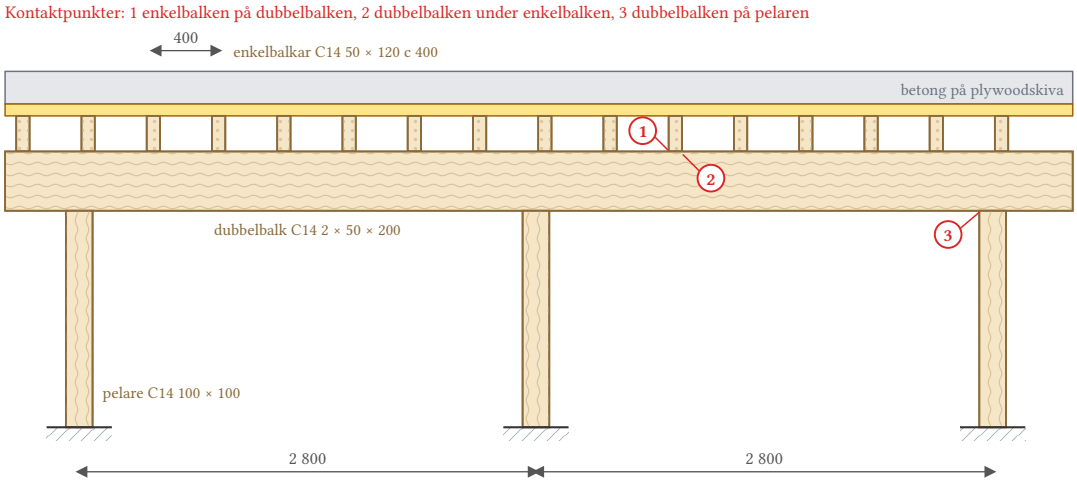
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

1. Vilka förutsättningar måste vara uppfyllda för att formeln ska gälla?
2. Dimensioneringen av träpelare utgår från denna formel. Förklara hur man har tagit hänsyn till att förutsättningarna inte är uppfyllda för en verklig träpelare.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.3 Kontakttryck i en gjutform

En form för ett betongbjälklag består av en plywoodskiva på enkelbalkar C14 50 × 120 mm med centrumavståndet 400 mm. Enkelbalkarna vilar på dubbelbalkar av två C14 50 × 200 mm, alltså 100 mm breda, som i sin tur bärs av pelare C14 100 × 100 mm i ett rutnät med centrumavståndet 2,8 m i båda riktningarna, se figur U4.1. Den totala dimensionerande lasten, inklusive formens egentyngd, är $q_d = 3{,}0$ kN/m² av medellång varaktighet. Formen står i klimatklass 3.



Figur U4.1 Gjutform med enkelbalkar, dubbelbalkar och pelare. De tre kontaktpunkterna som ska kontrolleras är markerade. Mått i mm.

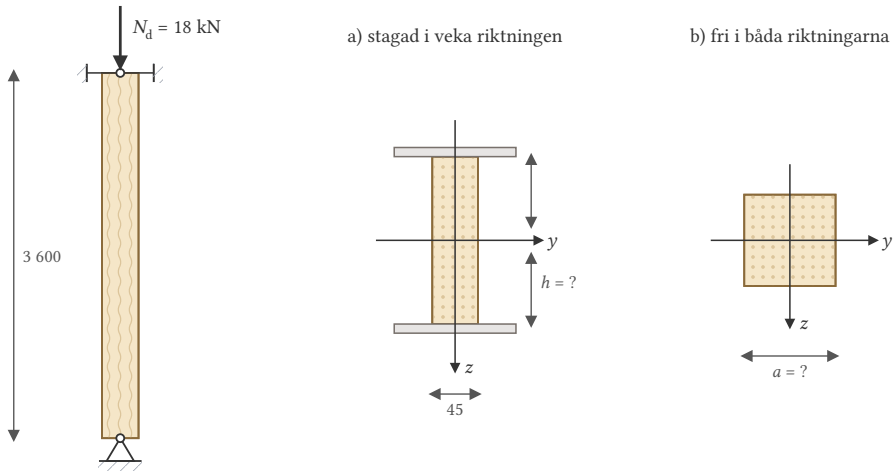
Kontrollera trycket vinkelrätt mot fibrerna vid upplagen inne i formen, i de tre kontaktpunkterna 1–3 i figuren. Formens kantupplag behöver inte kontrolleras. Välj fall för k_{mat} i varje kontaktpunkt med krite-

rierna i tabell 4.2 och motivera valet. Räkna förenklat med att varje enkelbalk för ned lasten från 0,4 × 2,8 m² och varje pelare lasten från 2,8 × 2,8 m².

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.4 Tryckt sträva, stagad och ostagad

En 3,6 m lång sträva av C24 är ledad i båda ändarna och belastas centriskt av den dimensionerande tryckkraften $N_{c,0,d} = 18$ kN, som är en långtidslast. Strävan sitter i klimatklass 2, se figur U4.2.



Figur U4.2 Sträva med längden 3 600 mm, ledad i båda ändarna. a) Stagad i den veka riktningen, bredden 45 mm. b) Fri att knäcka i båda riktningarna, kvadratiskt tvärsnitt.

1. Strävan är stagad i den veka riktningen och har bredden 45 mm. Välj höjden h bland 120, 145 och 170 mm.
2. Strävan kan knäcka i båda riktningarna. Välj ett kvadratiskt tvärsnitt bland 95 × 95 och 120 × 120 mm.
3. Jämför virkesåtgången i de två fallen.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.5 Andra ordningens effekter i en centriskt tryckt stålpelare

Vilka faktorer påverkar andra ordningens effekter i en centriskt belastad stålpelare? Förklara hur de verkar och hur de beaktas vid dimensioneringen, både med knäckkurvan och med snittkraftsmetoden. (Instuderingsfråga 3.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.6 Interaktion mellan moment och normalkraft i en stålpelare

Hur tar man hänsyn till samverkan mellan moment och normalkraft i en stålpelare? Hur beaktas den vid kontrollen av tvärsnittets bärförmåga? (Instuderingsfråga 4.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.7 Stålpelare stagad på halva höjden i veka riktningen

En 9,0 m hög pelare av HEA 280 i S355 är ledad i båda ändar och belastas av en centrisk tryckkraft. På halva höjden finns ett stag som hindrar utböjning i den veka riktningen men inte i den styva, som i figur 4.30c. Profildata: $A = 9\,726$ mm², $h = 270$ mm, $b = 280$ mm, $t_w = 8$ mm, $t_f = 13$ mm, $r = 24$ mm, $i_y = 119$ mm och $i_z = 70{,}0$ mm.

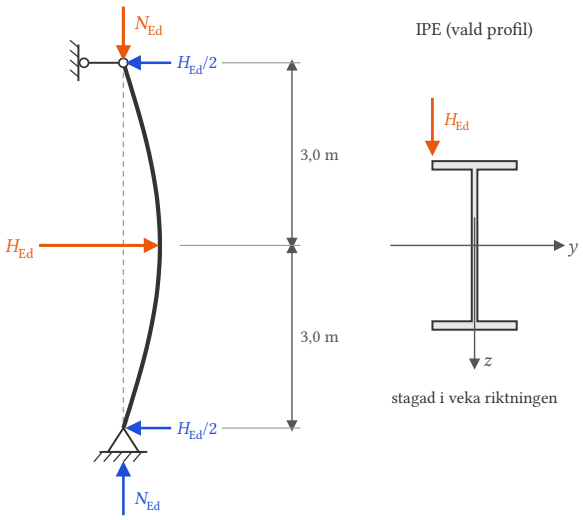
1. Bestäm tvärsnittsklassen för ren tryckning.
2. Beräkna pelarens dimensionerande bärförmåga $N_{b,Rd}$.

3. Hur stor hade bärförmågan varit utan staget?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.8 Dimensionering av en stålpelare med normalkraft och sidolast

En 6,0 m hög pelare är ledad i båda ändar och belastas i brottgränstillståndet av en centrisk tryckkraft $N_{Ed} = 220$ kN och en horisontell punktlast $H_{Ed} = 35$ kN på halva höjden, som böjer pelaren kring den styva axeln, se figur U4.3. Pelaren är stagad i den veka riktningen, så att den varken kan knäcka eller vippa i den riktningen. Välj den lättaste IPE-profilen i S275 som klarar lasten. Använd snittkraftsmetoden med plastisk tvärsnittskontroll; tvärsnittet får antas vara i klass 1.



Figur U4.3 Pelaren i uppgiften: ledad i båda ändar, toppen hålls i sidled. Lasterna (orange) är N_{Ed} och H_{Ed} på halva höjden; reaktionerna (blå) är N_{Ed} vid foten och $H_{Ed}/2$ vid varje upplag. Till höger tvärsnittet: H_{Ed} böjer profilen kring y –y.

Lösning: se slutet av kapitlet.

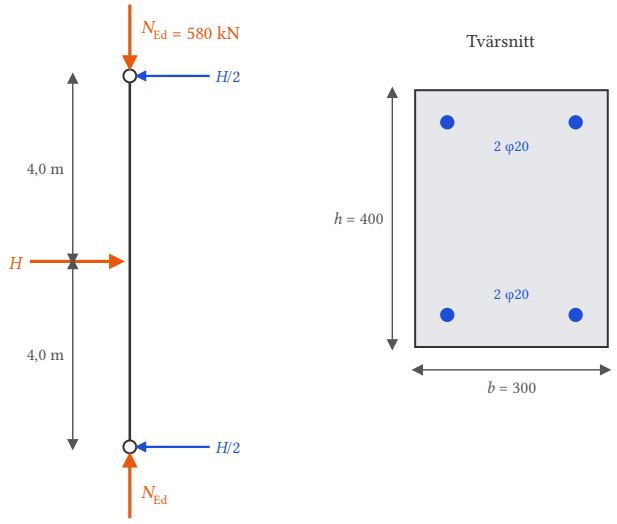
Uppgift 4.9 Vad påverkar andra ordningens moment i en betongpelare?

Vilka faktorer påverkar andra ordningens moment för en armerad betongpelare? Redogör för hur de påverkar. (Instuderingsfråga 22.)

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.10 Största horisontallast på en slank betongpelare

Pelaren i figur U4.4 är avstyvad och ledad i båda ändar, med längden $l = 8{,}0$ m. I brottgränstillståndet bär den en centrisk normalkraft $N_{Ed} = 580$ kN och en horisontell last H i mitten. Tvärsnittet är detsamma som i exempel 4.10: 300×400 mm i C25/30 med 2 ϕ20 B500B vid var och en av de korta sidorna, $d' = 50$ mm, och pelaren böjs i den styva riktningen. Armeringen går oavkortad genom pelaren. Det effektiva kryptalet är $\varphi_{ef} = 1{,}4$. (Omarbetad efter Exempelsamlingen, BP1.)



Figur U4.4 Pelaren i uppgift 4.10 med horisontallasten H i mitten och stödreaktionerna $H/2$, samt tvärsnittet.

1. Visa att pelaren är slank.
2. Beräkna andra ordningens moment med metoden med nominell krökning.
3. Hur stor får H vara utan att bärförmågan överskrids?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.11 Interaktionsdiagram för ett kvadratiskt pelartvärsnitt

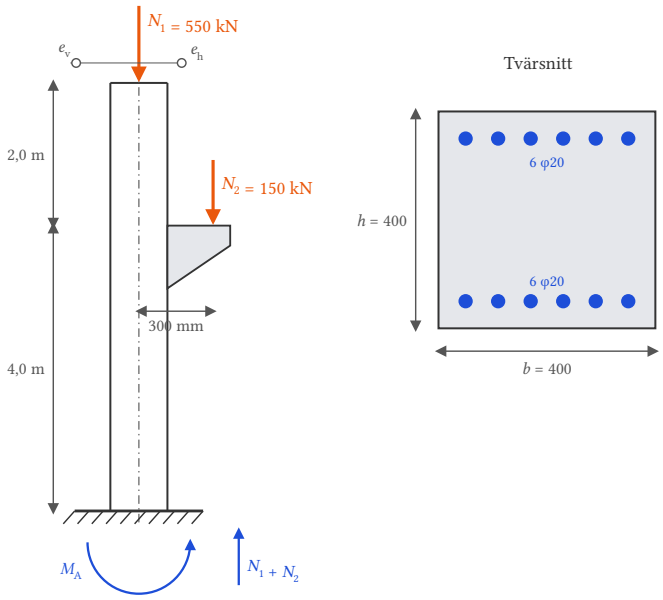
Pelartvärsnittet i exempel 4.12 är 400 × 400 mm i C30/37 ($f_{cd} = 17{,}0$ MPa) med 3 ϕ20 B500B vid två motstående sidor, $d' = 50$ mm och $d = 350$ mm. Använd spänningsblocket och ekv. (4.42).

1. Beräkna punkterna A (rent tryck), B (balanserat brott), C (ren böjning) och D (rent drag) och skissa interaktionsdiagrammet.
2. Ligger lastkombinationen $N_{Ed} = 900$ kN, $M_{Ed} = 203{,}9$ kNm från exemplet innanför kurvan? I vilken del av kurvan ligger den?

Lösning: se slutet av kapitlet.

Uppgift 4.12 Största lastexcentricitet för en konsolpelare

En armerad betongpelare med längden 6,0 m är fast inspänd i grunden och fri i toppen, se figur U4.5. Den bär normalkraften $N_1 = 550$ kN i toppen och $N_2 = 150$ kN, som förs in via en upplagskonsol 2,0 m under toppen med excentriciteten 300 mm (dimensioneringsvärden i brottgränstillståndet). Tvärsnittet är 400 × 400 mm i C25/30 med 6 ϕ20 B500B vid var och en av två motstående sidor, $d' = 50$ mm, längs hela pelaren. Pelaren är stagad i den veka riktningen, och konsolens inverkan på styvheten försummas. Det effektiva kryptalet är $\varphi_{ef} = 1{,}6$. (Omarbetad efter Exempelsamlingen, BP4.)



Figur U4.5 Konsolpelaren i uppgift 4.12: N_1 i toppen med excentriciteten e_v (åt vänster) eller e_h (åt höger, mot konsolen), N_2 på konsolen och reaktionerna i inspänningen. Till höger tvärsnittet.

Bestäm hur långt från pelarens axel, åt vänster (e_v) och åt höger (e_h), N_1 får angripa utan att bärförmågan överskrids. Formfelet ska ansättas så ogynnsamt som möjligt.

Lösning: se slutet av kapitlet.

Lösningar till kapitel 4

Uppgift 4.1 Moment, utböjning och stabilitet i en pelare

1. Moment och stabilitet.

En perfekt rak pelare med centrisk last får inget moment förrän den knäcker vid Eulerlasten N_{cr} (ekv. (4.3)). En verklig pelare är krokig, lite snedställd och belastad med en viss excentricitet, sammantaget e_0. Redan första ordningens analys ger därför momentet $M_0 = Ne_0$. Momentet krökar pelaren, som böjer ut ytterligare med e_2, och normalkraften får hävarmen $e_0 + e_2$. Det totala momentet blir $M_E = M_0 + M_2 = N(e_0 + e_2)$ (ekv. (4.8)), där $M_2 = Ne_2$ är andra ordningens moment, se figur 4.7.

Stabiliteten avgörs av jämvikten mellan det yttre momentet (lasteffekten) $N(e_0 + e_2)$ och det inre, mothållande momentet från spänningarna i tvärsnittet. För en ledad, linjärt elastisk pelare med sinusformad krokighet är det inre momentet $N_{cr}e_2$ (ekv. (4.9)). Båda växer linjärt med e_2, det yttre med lutningen N och det inre med lutningen N_{cr}. Om $N < N_{cr}$ hinner det inre momentet ikapp, och pelaren får en stabil jämvikt vid $e_2 = e_0(N/N_{cr})/(1 - N/N_{cr})$ momentet förstoras med faktorn $1/(1 - N/N_{cr})$ (ekv. (4.11)). När N närmar sig N_{cr} växer utböjningen obegränsat, och vid $N \geq N_{cr}$ finns ingen jämvikt: pelaren är instabil, se figur 4.9.

I en verklig pelare är det inre momentet begränsat av tvärsnittets bärförmåga, som dessutom minskar med normalkraften. Kurvorna kan då mötas i en stabil och en instabil jämvikt, och pelaren går till brott när lastlinjen tangerar kurvan för det inre momentet, vid en last som är lägre än både N_{cr} och tvärsnittets bärförmåga vid centriskt tryck. Större imperfektioner ger större moment och en lägre brottlast.

2. Eulerlast.

Ledad pelare: $L_{cr} = L = 4{,}0$ m.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 600}{4{,}0^2} = 370{,}1 \text{ kN}$$

Vid $N = 150$ kN. $N/N_{cr} = 150/370{,}1 = 0{,}4053$, och ekv. (4.11) ger

$$e_{tot} = \frac{e_0}{1 - N/N_{cr}} = \frac{10}{1 - 0{,}4053} = 16{,}8 \text{ mm}$$

$$M_E = N e_{tot} = 150 \cdot 0{,}0168 = 2{,}52 \text{ kNm}$$

jämfört med $M_0 = 150 \cdot 0{,}010 = 1{,}50$ kNm. Tillskottsutböjningen är $e_2 = 6{,}8$ mm.

Vid $N = 300$ kN. $N/N_{cr} = 300/370{,}1 = 0{,}8106$:

$$e_{tot} = \frac{10}{1 - 0{,}8106} = 52{,}8 \text{ mm}$$

$$M_E = 300 \cdot 0{,}0528 = 15{,}8 \text{ kNm}$$

> **Svar:** $N_{cr} = 370$ kN. Vid 150 kN är $e_{tot} = 16{,}8$ mm och $M_E = 2{,}52$ kNm (förstoring 1,68); vid 300 kN är $e_{tot} = 52{,}8$ mm och $M_E = 15{,}8$ kNm (förstoring 5,28). En fördubbling av lasten ger drygt sex gånger så stort moment. Med linjärt elastiskt material blir pelaren instabil vid $N = N_{cr} = 370$ kN; ett verkligt material ger brott tidigare.

Uppgift 4.2 Eulers knäcklast och dimensionering av träpelare

1. Förutsättningar.

Formeln gäller för en idealisk pelare (figur 4.20a):

- pelaren är helt rak;
- lasten är centrisk, den verkar i tvärsnittets tyngdpunkt;
- materialet är idealt linjärt elastiskt med en känd elasticitetsmodul, oavsett spänningens storlek;
- pelaren är spänningsfri när den är obelastad;
- ändarna är ideala leder, så att knäcklängden är L.

En sådan pelare finns inte, men formeln beskriver knäckning teoretiskt och ger en övre gräns för bärförmågan hos en slank pelare.

2. Hur dimensioneringen tar hänsyn till verkligheten.

Utgångspunkten är Eulerkurvan, men den kombineras med tryckhållfastheten och reduceras (avsnitt 4.5.2):

- **Normering.** Spänningen delas med tryckhållfastheten och slankheten ersätts med den relativa slankheten $\lambda_{rel} = (\lambda/\pi)\sqrt{f_{c,0,k}/E_{0,k}}$, ekv. (4.19). Då blir Eulerkurvan $1/\lambda_{rel}^2$ för alla hållfasthetsklasser, och en enda knäckkurva kan användas (figur 4.21).
- **Reduktionsfaktorn k_c.** Bärförmågan sätts till $k_c f_{c,0,d} A$, där $k_c \le 1$ ligger under både tryckhållfastheten och Eulerkurvan, ekv. (4.21). Kurvan är anpassad till verkliga pelare och tar hänsyn till:
  - *imperfektioner*: initialkrokighet och oavsiktlig excentricitet, genom imperfektionsfaktorn β_c. Den motsvarar en pilhöjd på $L/400$ för konstruktionsvirke och $L/1000$ för limträ, och limträ får därför en högre kurva;
  - *materialegenskaper*: inre spänningar från torkningen, ojämnheter som kvistar och fiberlutning, och den olinjära arbetskurvan i tryck, där fibrerna stukas plastiskt innan Eulerlasten nås.
- **Styvhet.** Den karakteristiska elasticitetsmodulen $E_{0,k}$ (5-procentsfraktilen) används i stället för medelvärdet, eftersom styvheten varierar mellan och inom virkesstycken.
- **Krypning.** Långvarig last ökar utböjningen och därmed andra ordningens moment. Det beaktas genom att hållfastheten reduceras med k_{mod} för lastens varaktighet.
- **Upplag.** Inspänningar i träkonstruktioner är aldrig helt styva. Därför används praktiska knäcklängder, som är längre än de teoretiska (figur 4.23).

$k_c = 1$ motsvarar tryckbrott i en kort, icke slank pelare ($\lambda_{rel} \le 0{,}3$). $k_c < 1$ betyder att knäckning är dimensionerande, och för mycket slanka pelare närmar sig k_c Eulerkurvan.

Uppgift 4.3 Kontakttryck i en gjutform

Material. Klimatklass 3 och medellång last ger $k_{mod} = 0{,}70$ (tabell 1.6). Med $f_{c,90,k} = 2{,}0$ MPa för C14 (tabell 1.2) och $\gamma_M = 1{,}30$ är

$$f_{c,90,d} = 0{,}70 \cdot \frac{2{,}0}{1{,}30} = 1{,}077 \text{ MPa}$$

Val av fall för k_{mat} (tabell 4.2):

- Punkt 1, enkelbalken på dubbelbalken: enkelbalken står på högkant (50 × 120 mm) och hålls i sidled bara av plywoodskivan. En intryckning vid upplaget kan få den att vicka, alltså påverka stabiliteten. Det ger fall A, $k_{mat} = 1{,}4$.
- Punkt 2, dubbelbalken under en enkelbalk: dubbelbalken är bred (100 × 200 mm) och stadig, och en lokal intryckning vid en enkelbalk påverkar inte stabiliteten. Lasten kan dessutom fördelas om till de närliggande enkelbalkarna, som sitter var 400 mm, så ett lokalt brott leder inte till att formen rasar. Det är fall C, $k_{mat} = 2{,}7$.
- Punkt 3, dubbelbalken på pelaren: intryckningen påverkar inte dubbelbalkens stabilitet, men hela lasten från $2{,}8 \times 2{,}8$ m² går genom den här kontakten och kan inte fördelas om. Fall C gäller därför inte, men fall B gör det, $k_{mat} = 2{,}1$.

Krafter. Enkelbalken för ned $F_1 = 3{,}0 \cdot 0{,}4 \cdot 2{,}8 = 3{,}36$ kN till dubbelbalken, och pelaren får $F_3 = 3{,}0 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}8 = 23{,}5$ kN.

Punkt 1: enkelbalken på dubbelbalken. För enkelbalken är dubbelbalken ett diskret mellanupplag med $l_{90,c} = 100$ mm (dubbelbalkens bredd) och $b_{90,c} = b = 50$ mm. Ekv. (4.17) ger $h_{ef} = \min\{0{,}4 \cdot 120;\ 140\} = 48$ mm, och ekv. (4.18) och ekv. (4.16)

$$l_{ef} = 100 + 2 \cdot 48 = 196 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{196}{100}} = 1{,}40$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{3\,360}{50 \cdot 100} = 0{,}67 \text{ MPa} \le 1{,}4 \cdot 1{,}40 \cdot 1{,}077 = 2{,}11 \text{ MPa}$$

Punkt 2: dubbelbalken under enkelbalken. Dubbelbalken belastas ovanifrån av en punktlast och vilar på diskreta upplag (pelarna). Kontaktlängden är enkelbalkens bredd, $l_{90,c} = 50$ mm, och kontaktbredden dubbelbalkens bredd, $b_{90,c} = b = 100$ mm. Med $h_{ef} = \min\{0{,}4 \cdot 200;\ 140\} = 80$ mm sprids kraften 80 mm åt varje håll. Det är mindre än halva det fria avståndet till nästa enkelbalk, $(400 - 50)/2 = 175$ mm, så zonerna överlappar inte:

$$l_{ef} = 50 + 2 \cdot 80 = 210 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{210}{50}} = 2{,}05$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{3\,360}{100 \cdot 50} = 0{,}67 \text{ MPa} \le 2{,}7 \cdot 2{,}05 \cdot 1{,}077 = 5{,}96 \text{ MPa}$$

Punkt 3: dubbelbalken på pelaren. Kontaktytan är pelarens tvärsnitt, $A = 100 \cdot 100 = 10\,000$ mm², och dubbelbalken är kontinuerlig över pelaren:

$$l_{ef} = 100 + 2 \cdot 80 = 260 \text{ mm}, \qquad k_{c,90} = \sqrt{\frac{260}{100}} = 1{,}61$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{23\,520}{10\,000} = 2{,}35 \text{ MPa} \le 2{,}1 \cdot 1{,}61 \cdot 1{,}077 = 3{,}64 \text{ MPa}$$

Svar: Alla tre kontaktpunkterna klarar trycket. Utnyttjandegraden är 0,32 i punkt 1, 0,11 i punkt 2 och 0,65 i punkt 3. Det är dubbelbalkens upplag på pelaren som avgör, eftersom hela lasten från $2{,}8 \times 2{,}8$ m² samlas där. Punkt 2 har lägst utnyttjande, trots samma kraft som punkt 1: den smala enkelbalken ger en kort kontaktlängd och därmed en stor spridningsfaktor, och fall C tillåter större intryckning. Hade fall A använts överallt hade punkt 3 fått utnyttjandegraden 0,97. Valet av fall har alltså stor betydelse, och intryckningen bör då kontrolleras i bruksgränstillståndet.

Uppgift 4.4 Tryckt sträva, stagad och ostagad

Material. Klimatklass 2 och långtidslast ger $k_{mod} = 0{,}70$ (tabell 1.6), och med $f_{c,0,k} = 21$ MPa (tabell 1.2) är

$$f_{c,0,d} = 0{,}70 \cdot \frac{21}{1{,}30} = 11{,}31 \text{ MPa}$$

Knäcklängden är $L_{cr} = 3\,600$ mm kring båda axlarna (Eulerfall 2), och $\beta_c = 0{,}223$ (tabell 4.3).

1. Stagad i veka riktningen.

Bara knäckning kring y är möjlig. Prova $h = 145$ mm: $i_y = 145/\sqrt{12} = 41{,}9$ mm och

$$\lambda_y = \frac{3\,600}{41{,}9} = 86{,}0, \qquad \lambda_{rel,y} = \frac{86{,}0}{\pi}\sqrt{\frac{21}{7\,400}} = 1{,}458$$

Ekv. (4.22) och ekv. (4.21) ger

$$\phi_c = 0{,}5(1 + 0{,}223 \cdot (1{,}458 - 0{,}3) + 1{,}458^2) = 1{,}692$$

$$k_{c,y} = \frac{1}{1{,}692 + \sqrt{1{,}692^2 - 1{,}458^2}} = 0{,}392$$

$$N_{Rd} = k_{c,y} f_{c,0,d} A = 0{,}392 \cdot 11{,}31 \cdot 45 \cdot 145 = 28{,}9 \text{ kN} \geq 18 \text{ kN}$$

Med $h = 120$ mm blir $\lambda_{rel,y} = 1{,}762$, $k_{c,y} = 0{,}281$ och $N_{Rd} = 0{,}281 \cdot 11{,}31 \cdot 45 \cdot 120 = 17{,}2$ kN, vilket är för lite. Välj 45×145 mm (utnyttjandegrad 0,62).

2. Fri i båda riktningarna.

Ett kvadratiskt tvärsnitt har samma tröghetsradie kring båda axlarna. Prova 95×95 mm: $i = 95/\sqrt{12} = 27{,}4$ mm och

$$\lambda = \frac{3\,600}{27{,}4} = 131{,}3, \qquad \lambda_{rel} = \frac{131{,}3}{\pi}\sqrt{\frac{21}{7\,400}} = 2{,}226$$

$$\phi_c = 0{,}5(1 + 0{,}223 \cdot (2{,}226 - 0{,}3) + 2{,}226^2) = 3{,}192$$

$$k_c = \frac{1}{3{,}192 + \sqrt{3{,}192^2 - 2{,}226^2}} = 0{,}182$$

$$N_{Rd} = 0{,}182 \cdot 11{,}31 \cdot 95 \cdot 95 = 18{,}6 \text{ kN} \geq 18 \text{ kN}$$

Välj 95×95 mm (utnyttjandegrad 0,97). Tvärsnittet 45×145 från del 1 skulle här bara bära 3,2 kN, eftersom det knäcker kring den veka axeln med $\lambda_{rel,z} = 4{,}70$.

3. Jämförelse.

Arean är $45 \cdot 145 = 6\,525$ mm² med stagning och $95 \cdot 95 = 9\,025$ mm² utan.

> **Svar:** 1) 45×145 mm. 2) 95×95 mm. 3) Stagningen i den veka riktningen sparar ungefär 28 % virke. Utan stagning kan bara en liten del av tryckhållfastheten utnyttjas: $k_c = 0{,}18$, mot 0,39 med stagning.

Uppgift 4.5 Andra ordningens effekter i en centriskt tryckt stålpelare

Slankheten. Andra ordningens effekter växer med pelarens slankhet, det vill säga med knäcklängden L_{cr} och omvänt med böjstyvheten genom tröghetsradien i. De samlas i den relativa slankheten $\bar{\lambda} = L_{cr}/(i\lambda_1)$ (ekv. (4.29)), som jämför Eulerlasten med flytkraften. Knäcklängden beror på hur ändarna är fasthållna och på stag, och den kan vara olika kring styva och veka axeln (figur 4.30).

Utöver längd och styvhet finns två faktorer som gör att en verklig pelare böjer ut redan innan Eulerlasten nås:

- **Initialimperfektioner**, framför allt initialkrokighet men också oavsiktlig excentricitet hos lasten. Normalkraften får en hävarm, pelaren böjer ut, hävarmen ökar och momentet förstoras med ungefär $1/(1 - N/N_{cr})$ (ekv. (4.11)).
- **Egenspänningar** från valsning eller svetsning (figur 4.28). De tryckta delarna, i en valsad I-profil fläns-spetsarna, når sträckgränsen tidigare. De flutna delarna bidrar inte längre till böjstyvheten, så pelaren blir vekare och böjer ut mer. Effekten är störst vid knäckning kring den veka axeln.

Med knäckkurvan. Båda faktorerna ingår i reduktionsfaktorn χ (ekv. (4.30)), som ger $N_{b,Rd} = \chi A f_y/\gamma_{M1}$. χ beror på

- den relativa slankheten $\bar{\lambda}$, alltså på L_{cr}, i och stålsorten genom $\lambda_1 = 93{,}9\varepsilon$
- knäckkurvan (imperfektionsklassen) a0–d med imperfektionsfaktorn α (tabell 4.4), som väljs i tabell 4.5 efter tvärsnittets geometri (h/b, godstjocklek), tillverkningen (valsad, svetsad, varm- eller kallformad), knäckriktningen (styv eller vek) och stålsorten.

Med snittkraftsmetoden. Imperfektionerna ingår i stället som en ekvivalent initialkrokighet $e_0 = (\alpha/\varepsilon)\beta_{bow}L$ (ekv. (4.36)). Den är större än den verkliga krokigheten, eftersom den också ska täcka egenspänningarna; därför beror den på knäckkurvan genom α. Andra ordningens moment beräknas med e_0 och Eulerlasten (ekv. (4.35)) och jämförs med tvärsnittets bärförmåga.

> **Svar:** Slankheten (knäcklängd och tröghetsradie), initialimperfektioner (krokighet och excentricitet) och egenspänningar. Med knäckkurvan beaktas de genom $\bar{\lambda}$ och genom valet av knäckkurva och α med snittkraftsmetoden genom N_{cr} och den ekvivalenta initialkrokigheten e_0.

Uppgift 4.6 Interaktion mellan moment och normalkraft i en stålpelare

Två vägar i EC3. Momentet och normalkraften förstärker varandra: normalkraften förstorar utböjningen från momentet, och utböjningen ger normalkraften en hävarm. EC3 erbjuder två sätt att hantera det:

- **Knäckkurvor med interaktionsfaktorer** (EC3 8.3.3, formel (8.88) och (8.89)). Normalkraften jämförs med χN_{Rk} och momentet med vippningskapaciteten, och termerna kombineras med faktorerna k_{yy}, k_{yz}, k_{zy} och k_{zz}. Metoden används inte i kursen.
- **Snittkraftsmetoden**, som används i kursen (avsnitt 4.7).

Snittkraftsmetoden. Det dimensionerande momentet beräknas enligt andra ordningens teori (ekv. (4.35)):

$$M_{Ed} = N_{Ed} \cdot \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N_{Ed}} \cdot (e_0 + v_1) + M_1$$

Det beror alltså på

- normalkraften N_{Ed}
- Eulerlasten N_{cr} i böjningsplanet;
- första ordningens moment M_1 från sidolast eller ändmoment;
- utböjningen: initialkrokigheten e_0 (ekv. (4.36)) plus första ordningens utböjning v_1 från samma laster som ger M_1.

Tvärsnittets bärförmåga. Tvärsnittet i det mest påkända snittet ska klara kombinationen av N_{Ed} och M_{Ed} samtidigt:

- **Elastiskt** (alla tvärsnittsklasser): kantspänningen $N_{Ed}/A + M_{Ed}/W_{el}$ får inte överstiga f_y/γ_{M1} (ekv. (4.37)).
- **Plastiskt** (klass 1 och 2), med initialkrokigheten bestämd för plastisk kontroll: kring y –y med det linjära sambandet $N_{Ed}/N_{pl,Rd} + M_{Ed}/M_{pl,y,Rd} \le 1$ (ekv. (4.41)), och kring z –z med den fullständiga plastiska interaktionen, där $M_{pl,z,Rd}$ begränsas till $1{,}25\,M_{el,z,Rd}$ (EC3 7.3.3.1(2)).
- **Uppdelat spänningsblock** ger den fullständiga plastiska interaktionen, se figur 4.34. Först beräknas hur stor del av tvärsnittet som behövs för att ta N_{Ed} i en I-profil är det ofta en remsa av livet med höjden $2y_n = N_{Ed}\gamma_{M1}/(t_w f_y)$ (ekv. (4.38)). Resten av tvärsnittet ska ta M_{Ed}, vilket ger den reducerade momentkapaciteten $M_{N,Rd}$ (ekv. (4.39)).

Obs: Den äldre utgåvan av EC3, som kurskompendiet bygger på, använde den fullständiga plastiska interaktionen kring båda axlarna, men med andra, fasta värden på initialkrokigheten. EC3:2022 kräver det linjära sambandet kring den styva axeln, se Vilken interaktion får användas?.

Svar: I kursen med snittkraftsmetoden: andra ordningens moment beräknas från N_{Ed}, N_{cr}, M_1 och $e_0 + v_1$, och tvärsnittet kontrolleras för N_{Ed} och M_{Ed} samtidigt, elastiskt eller plastiskt. Plastiskt används det linjära sambandet kring y –y och den fullständiga plastiska interaktionen, där en del av tvärsnittet tar normalkraften och resten momentet, kring z –z.

Uppgift 4.7 Stålpelare stagad på halva höjden i veka riktningen

1. Tvärsnittsklass.

S355 ger $\varepsilon = 0{,}814$. Flänsens utstickande del är $c = (280 - 8 - 2\cdot 24)/2 = 112$ mm och livets fria höjd $c = 270 - 2\cdot 13 - 2\cdot 24 = 196$ mm. Med tabell 1.10:

$$\frac{c}{t_f} = \frac{112}{13} = 8{,}6 \quad \text{mellan } 10\varepsilon = 8{,}1 \text{ och } 14\varepsilon = 11{,}4$$

$$\frac{c}{t_w} = \frac{196}{8} = 24{,}5 \quad \text{mellan } 28\varepsilon = 22{,}8 \text{ och } 34\varepsilon = 27{,}7$$

Flänsen är i klass 3 och livet i klass 2, så tvärsnittet är i klass 3. För klass 1–3 räknas ändå med hela arean, $N_{b,Rd} = \chi A f_y/\gamma_{M1}$ (ekv. (4.28)).

2. Bärförmåga.

Knäcklängderna är $L_{cr,y} = 9{,}0$ m och $L_{cr,z} = 4{,}5$ m. Med $h/b = 0{,}96 \le 1{,}2$ gäller kurva b ($\alpha = 0{,}34$) kring y –y och kurva c ($\alpha = 0{,}49$) kring z –z (tabell 4.5). $\lambda_1 = 93{,}9\cdot 0{,}814 = 76{,}4$, och ekv. (4.29) ger

$$\bar\lambda_y = \frac{9\,000}{119\cdot 76{,}4} = 0{,}990, \qquad \bar\lambda_z = \frac{4\,500}{70{,}0\cdot 76{,}4} = 0{,}841$$

Styva riktningen, ekv. (4.31) och ekv. (4.30):

$$\Phi_y = 0{,}5\left[1 + 0{,}34\cdot(0{,}790 + 0{,}990^2\right] = 1{,}124$$

$$\chi_y = \frac{1}{1{,}124 + \sqrt{1{,}124^2 - 0{,}990^2}} = 0{,}604$$

Veka riktningen:

$$\Phi_z = 0{,}5\left[1 + 0{,}49\cdot(0{,}641 + 0{,}841^2\right] = 1{,}011$$

$$\chi_z = \frac{1}{1{,}011 + \sqrt{1{,}011^2 - 0{,}841^2}} = 0{,}636$$

Den styva riktningen ger lägst χ:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi_y\, A\, f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0{,}604\cdot 9\,726\cdot 355}{1{,}0} = 2\,085\cdot 10^3 \text{ N} = 2\,085 \text{ kN}$$

3. Utan stag.

Då är $L_{cr,z} = 9{,}0$ m:

$$\bar\lambda_z = \frac{9\,000}{70{,}0\cdot 76{,}4} = 1{,}683$$

$$\Phi_z = 0{,}5\left[1 + 0{,}49\cdot(1{,}483 + 1{,}683^2\right] = 2{,}280$$

$$\chi_z = \frac{1}{2{,}280 + \sqrt{2{,}280^2 - 1{,}683^2}} = 0{,}262$$

$$N_{b,Rd} = 0{,}262 \cdot 9\,726 \cdot 355 = 905 \cdot 10^3 \text{ N} = 905 \text{ kN}$$

Svar: 1. Klass 3 (flänsen), men hela arean får räknas. 2. $N_{b,Rd} = 2\,085$ kN; med staget avgör knäckning kring den styva axeln, och den veka riktningen ger 2 200 kN. 3. Utan stag blir $N_{b,Rd} = 905$ kN. Staget mer än fördubblar bärförmågan, eftersom den veka riktningen annars har både lägre tröghetsradie och sämre knäckkurva.

Uppgift 4.8 Dimensionering av en stålpelare med normalkraft och sidolast

Gemensamma storheter. S275: $f_y = 275$ MPa och $\varepsilon = 0{,}924$. Första ordningens moment i mitten är

$$M_1 = \frac{H_{Ed} L}{4} = \frac{35 \cdot 6{,}0}{4} = 52{,}5 \text{ kNm}$$

IPE-profiler har $h/b = 2 > 1{,}2$ och $t_f \le 40$ mm, så knäckning kring y–y följer kurva a, $\alpha = 0{,}21$ (tabell 4.5). Plastisk kontroll kring y–y ger med ekv. (4.36) samma initialkrokighet för alla IPE-profiler med samma längd:

$$e_0 = \frac{0{,}21}{0{,}924} \cdot \frac{1}{75} \cdot 6\,000 = 18{,}2 \text{ mm} \approx L/330$$

Försök med IPE 220. $A = 3\,337$ mm², $I_y = 27{,}72 \cdot 10^6$ mm⁴ och $W_{pl,y} = 285 \cdot 10^3$ mm³. Eulerlasten och utböjningen från punktlasten:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 27{,}72 \cdot 10^6}{6\,000^2} = 1\,596 \text{ kN}$$

$$v_1 = \frac{H_{Ed} L^3}{48 E I_y} = \frac{35\,000 \cdot 6\,000^3}{48 \cdot 210\,000 \cdot 27{,}72 \cdot 10^6} = 27{,}1 \text{ mm}$$

Ekv. (4.35) ger

$$M_{Ed} = 220 \cdot \frac{(18{,}2 + 27{,}1) \cdot 10^{-3}}{1 - 220/1\,596} + 52{,}5 = 11{,}6 + 52{,}5 = 64{,}1 \text{ kNm}$$

Initialkrokigheten är bestämd för plastisk kontroll kring y–y, så tvärsnittet kontrolleras med det linjära sambandet (EC3 7.3.3.1(2)). Med $N_{pl,Rd} = 3\,337 \cdot 275 = 918$ kN och $M_{pl,y,Rd} = 285 \cdot 10^3 \cdot 275 = 78{,}4$ kNm ger ekv. (4.41)

$$\frac{220}{918} + \frac{64{,}1}{78{,}4} = 0{,}240 + 0{,}818 = 1{,}058 > 1{,}0$$

IPE 220 räcker inte.

Försök med IPE 240. $A = 3\,912$ mm², $I_y = 38{,}92 \cdot 10^6$ mm⁴ och $W_{pl,y} = 367 \cdot 10^3$ mm³:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 38{,}92 \cdot 10^6}{6\,000^2} = 2\,241 \text{ kN}$$

$$v_1 = \frac{35\,000 \cdot 6\,000^3}{48 \cdot 210\,000 \cdot 38{,}92 \cdot 10^6} = 19{,}3 \text{ mm}$$

$$M_{Ed} = 220 \cdot \frac{(18{,}2 + 19{,}3) \cdot 10^{-3}}{1 - 220/2\,241} + 52{,}5 = 9{,}1 + 52{,}5 = 61{,}6 \text{ kNm}$$

Med $N_{pl,Rd} = 3\,912 \cdot 275 = 1\,076$ kN och $M_{pl,y,Rd} = 367 \cdot 10^3 \cdot 275 = 100{,}9$ kNm:

$$\frac{220}{1\,076} + \frac{61{,}6}{100{,}9} = 0{,}204 + 0{,}611 = 0{,}815 \le 1{,}0$$

Svar: IPE 240, med utnyttjandet 0,815. Andra ordningens tillskott är litet här ($M_{Ed}/M_1 = 1{,}17$), eftersom pelaren är förhållandevis styv i böjningsplanet ($N_{Ed}/N_{cr} = 0{,}10$). Om den fullständiga plastiska interaktionen med uppdelat spänningsblock (ekv. (4.39)) hade fått användas med samma e_0, som i den äldre utgåvans arbetssätt, hade IPE 220 verkat räcka: $y_n = 220\,000/(2 \cdot 5{,}9 \cdot 275) = 67{,}8$ mm ryms i livet och $M_{N,Rd} = 275 \cdot (285\,000 - 5{,}9 \cdot 67{,}8^2) = 70{,}9$ kNm $> 64{,}1$ kNm. Kring y –y tillåter EC3:2022 inte den kombinationen, se Obs i Vilken interaktion får användas?.

Uppgift 4.9 Vad påverkar andra ordningens moment i en betongpelare?

Andra ordningens moment är $M_2 = N_{Ed} \cdot e_2$, där e_2 är tillskottsutböjningen (ekv. (4.8)). Utböjningen beror på pelarens böjstyvhet EI: ju lägre styvhet, desto större e_2 och desto större moment. För armerad betong är styvheten inte konstant utan påverkas av:

- **Sprickbildning.** När tvärsnittet spricker (stadium I $\longrightarrow$ stadium II) bär betongen i dragzonen inget, tröghetsmomentet minskar och krökningen för ett givet moment ökar. Då ökar e_2 och därmed M_2.
- **Krypning.** Under långvarig last växer betongens deformationer med tiden. Utböjningen ökar trots att lasten är konstant, och därmed ökar M_2. I EC2 beaktas det med det effektiva kryptalet φ_{ef} (ekv. (4.55)).
- **Icke-linjärt tryck.** Betongens arbetskurva böjer av vid höga tryckspänningar, så den effektiva elasticitetsmodulen minskar. När dragarmeringen dessutom flyter (stadium III) minskar styvheten kraftigt. Utböjningen och M_2 ökar.
- **Armeringen.** Mer armering, eller armering längre från tyngdpunkten, ökar styvheten i det spruckna tvärsnittet och minskar M_2 den ökar också bärförmågan.

Effekterna syns som en allt flackare kurva i diagrammet moment–krökning, figur 4.44. I metoden med nominell krökning ingår de i krökningen $1/r$ vid flytning, ekv. (4.54): armeringens flytning (ε_{yd} och $d - d'$), normalkraften (k_r) och krypningen (k_φ).

Andra faktorer, som gäller alla material, är initialkrokighet och snedställning (formfel), avsiktlig excentricitet, lastens storlek (M_{0Ed} och N_{Ed}) och knäcklasten, det vill säga pelarens längd och inspänning. Ju närmare normalkraften är knäcklasten, desto mer förstoras momentet (ekv. (4.11)).

Uppgift 4.10 Största horisontallast på en slank betongpelare

1. Slankhet.

$l_0 = l = 8{,}0$ m och $i = 400/\sqrt{12} = 115{,}5$ mm ger $\lambda = 8\,000/115{,}5 = 69{,}3$. Med $n = 0{,}341$ och $\omega = 0{,}322$ från exempel 4.11, och $C = 0{,}7$ (momentet kommer från transversell last och formfel), är $\lambda_{lim} = 24{,}0$ enligt ekv. (4.50). Eftersom $\lambda = 69{,}3 > 24{,}0$ är pelaren slank.

2. Andra ordningens moment.

$k_r = (1{,}322 - 0{,}341)/(1{,}322 - 0{,}4) = 1{,}06$ begränsas till 1,0. Krypningen:

$$\beta_{fck} = 0{,}35 + \frac{25}{200} - \frac{69{,}3}{150} = 0{,}013, \qquad k_\varphi = 1 + 0{,}013 \cdot 1{,}4 = 1{,}018$$

Ekv. (4.54) och ekv. (4.56) med $c = 8$ (avstyvad pelare):

$$\frac{1}{r} = 1{,}018 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}175 \cdot 10^{-3}}{300} = 1{,}477 \cdot 10^{-5}\,\text{mm}^{-1}$$

$$e_2 = \frac{8\,000^2}{8} \cdot 1{,}477 \cdot 10^{-5} = 118{,}1 \text{ mm}$$

$$M_2 = 580 \cdot 0{,}1181 = 68{,}5 \text{ kNm}$$

3. Största horisontallast.

Momentkapaciteten vid $N_{Ed} = 580$ kN är $M_{Rd} = 158{,}4$ kNm (punkt E i exempel 4.10). Villkoret $M_{0Ed} + M_2 \le M_{Rd}$ ger det största tillåtna första ordningens momentet:

$$M_{0Ed} \le 158{,}4 - 68{,}5 = 89{,}9 \text{ kNm}$$

Formfelet: $\alpha_h = 2/\sqrt{8{,}0} = 0{,}707$, $\theta_i = 3{,}54 \cdot 10^{-3}$ och $e_i = \theta_i\, l_0/2 = 14{,}1$ mm, så $N_{Ed}\, e_i = 580 \cdot 0{,}0141 = 8{,}2$ kNm. Med $M_{0Ed} = Hl/4 + N_{Ed}\, e_i$:

$$H \le \frac{4 \cdot (89{,}9 - 8{,}2)}{8{,}0} = 40{,}8 \text{ kN}$$

> **Svar:** $H \le 40{,}8$ kN. Andra ordningens moment, 68,5 kNm, tar mer än 40 % av bärförmågan; utan det skulle H kunna vara 75 kN.

Uppgift 4.11 Interaktionsdiagram för ett kvadratiskt pelartvärsnitt

$A_s = 942$ mm² per sida, $A_{s,tot} = 1\,885$ mm², och en sidas armering flyter med kraften $942 \cdot 435 = 409{,}9$ kN.

A, rent tryck. ekv. (4.43):

$$N_{Rd,0} = 160\,000 \cdot 17{,}0 + 1\,885 \cdot 435 = 2\,720 + 820 = 3\,540 \text{ kN}, \qquad M = 0$$

B, balanserat brott. $x_{bal} = 0{,}617 \cdot 350 = 215{,}9$ mm, och tryckarmeringen flyter ($\varepsilon_s' = 2{,}69$ ‰). Armeringskrafterna tar ut varandra:

$$N = F_c = 0{,}8 \cdot 215{,}9 \cdot 400 \cdot 17{,}0 = 1\,174 \text{ kN}$$

$$M = 1\,174 \cdot (0{,}200 - 0{,}0864) + 2 \cdot 409{,}9 \cdot 0{,}150 = 133{,}4 + 123{,}0 = 256{,}5 \text{ kNm}$$

C, ren böjning. Anta att tryckarmeringen är elastisk, $|\,\sigma_s'| = 700(x - 50)/x$ MPa:

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot 17{,}0 \cdot x + 942 \cdot 700 \cdot \frac{x - 50}{x} = 409\,900 \quad \Rightarrow \quad x = 58{,}2 \text{ mm}$$

Kontroll: $\varepsilon_s' = 3{,}5 \cdot 8{,}2/58{,}2 = 0{,}49$ ‰ $< \varepsilon_{yd}$, så $|\,\sigma_s'| = 98{,}9$ MPa och $F_s' = 93{,}2$ kN; dragarmeringen flyter ($\varepsilon_s = 17{,}5$ ‰). Med $F_c = 316{,}8$ kN:

$$M = 316{,}8 \cdot (0{,}200 - 0{,}0233) + 93{,}2 \cdot 0{,}150 + 409{,}9 \cdot 0{,}150 = 56{,}0 + 14{,}0 + 61{,}5 = 131{,}5 \text{ kNm}$$

D, rent drag. $N = -1\,885 \cdot 435 = -820$ kN och $M = 0$.

Diagrammet ser ut som i figur 4.38b: från D växer momentet med tryckkraften genom C till B, och avtar sedan mot A.

2. Kontroll.

Vid $N_{Ed} = 900$ kN flyter båda armeringslagren, $x = 900\,000/(0{,}8 \cdot 400 \cdot 17{,}0) = 165{,}4$ mm, och $M_{Rd} = 243{,}4$ kNm som i exemplet. Eftersom $203{,}9 < 243{,}4$ kNm ligger punkten innanför kurvan.

> **Svar:** A: (0; 3 540 kN), B: (256,5 kNm; 1 174 kN), C: (131,5 kNm; 0), D: (0; −820 kN). Punkten (203,9 kNm; 900 kN) ligger innanför kurvan, i dragbrottsområdet ($900 < 1\,174$ kN), där en större tryckkraft skulle öka momentkapaciteten.

Uppgift 4.12 Största lastexcentricitet för en konsolpelare

Kritiskt snitt och bärförmåga. Momentet är störst i inspänningen, där $N_{Ed} = 550 + 150 = 700$ kN. Med $f_{cd} = 14{,}17$ MPa och $A_s = 6 \cdot 314 = 1\,885$ mm² per sida flyter båda lagren ($F_s = 820$ kN) och

$$x = \frac{700\,000}{0{,}8 \cdot 400 \cdot 14{,}17} = 154{,}4 \text{ mm}$$

$$M_{Rd} = 700 \cdot (0{,}200 - 0{,}0618) + 2 \cdot 820 \cdot 0{,}150 = 96{,}8 + 246{,}0 = 342{,}8 \text{ kNm}$$

Kontroll: $\varepsilon_s' = 2{,}37$ ‰ och $\varepsilon_s = 4{,}43$ ‰, båda större än ε_{yd}.

Slankhet. Konsolpelaren är icke avstyvad, fast inspänd i grunden och fri i toppen. Med den minsta vekheten $f_r = 0{,}1$ i inspänningen ger ekv. (4.49) $\beta = 2{,}23$ (tabell 4.9), så $l_0 = 2{,}23 \cdot 6{,}0 = 13{,}4$ m och $\lambda = 13\,360/115{,}5 = 115{,}7$. Med $n = 0{,}309$, $\omega = 0{,}723$ och $C = 0{,}7$ (icke avstyvad) ger ekv. (4.50) $\lambda_{lim} = 29{,}9$: pelaren är mycket slank.

Andra ordningens moment. $k_r = 1$, och $\beta_{fck} = 0{,}35 + 25/200 - 115{,}7/150 = -0{,}30 < 0$ ger $k_\varphi = 1$. För en enskild icke avstyvad pelare är $c = 10$. På säker sida räknas med hela normalkraften i inspänningen:

$$\frac{1}{r} = \frac{2 \cdot 2{,}175 \cdot 10^{-3}}{300} = 1{,}450 \cdot 10^{-5}\,\text{mm}^{-1}$$

$$e_2 = \frac{13\,360^2}{10} \cdot 1{,}450 \cdot 10^{-5} = 258{,}8\ \text{mm}$$

$$M_2 = 700 \cdot 0{,}2588 = 181{,}2\ \text{kNm}$$

Det största tillåtna första ordningens momentet i inspänningen är därför $M_{0Ed} \le 342{,}8 - 181{,}2 = 161{,}6$ kNm.

Formfel. $\alpha_h = 2/\sqrt{6{,}0} = 0{,}816$ och $\theta_i = 0{,}816/200 = 4{,}08 \cdot 10^{-3}$. Pelaren lutar åt samma håll som den böjs ut, så snedställningen i höjd med N_1 (6,0 m) och N_2 (4,0 m) är

$$e_{i,1} = 4{,}08 \cdot 10^{-3} \cdot 6\,000 = 24{,}5\ \text{mm}, \qquad e_{i,2} = 4{,}08 \cdot 10^{-3} \cdot 4\,000 = 16{,}3\ \text{mm}$$

Utböjning åt höger (mot konsolen). Konsollasten och formfelet verkar åt samma håll:

$$M_{0Ed} = 550 \cdot (e_h + 0{,}0245) + 150 \cdot (0{,}300 + 0{,}0163) = 550 \cdot (e_h + 0{,}0245) + 47{,}4 \le 161{,}6$$

vilket ger $e_h \le 0{,}183$ m.

Utböjning åt vänster. Konsollasten motverkar nu böjningen:

$$M_{0Ed} = 550 \cdot (e_v + 0{,}0245) + 150 \cdot (0{,}0163 - 0{,}300) = 550 \cdot (e_v + 0{,}0245) - 42{,}6 \le 161{,}6$$

vilket ger $e_v \le 0{,}347$ m.

> **Svar:** N_1 får angripa högst 347 mm till vänster och 183 mm till höger om pelarens axel. Andra ordningens moment, 181 kNm, tar mer än hälften av bärförmågan. Med den teoretiska knäcklängden $l_0 = 2l = 12{,}0$ m hade M_2 blivit 146 kNm och excentriciteterna 410 respektive 247 mm: den lilla eftergivligheten i inspänningen kostar mycket för en så slank pelare.